การคาดการณ์ประชากรโดยแบบจำลอง GOMPERTZ

โดย รศ. ดร. วรรณศิลป์ พีรพันธุ์ © 2006

Gompertz Curve ได้รับการพัฒนาโดย Benjanning Gompertz (1779-1865) มีรูปแบบทั่วไปของสมการ คือ :

$$\mathbf{Y_c = ca^{b^X}} \qquad \text{..........} \ \mathbf{(1)}$$

เมื่อนำสมการ (1) มาแปลงเป็นค่า log จะได้ดังนี้ :

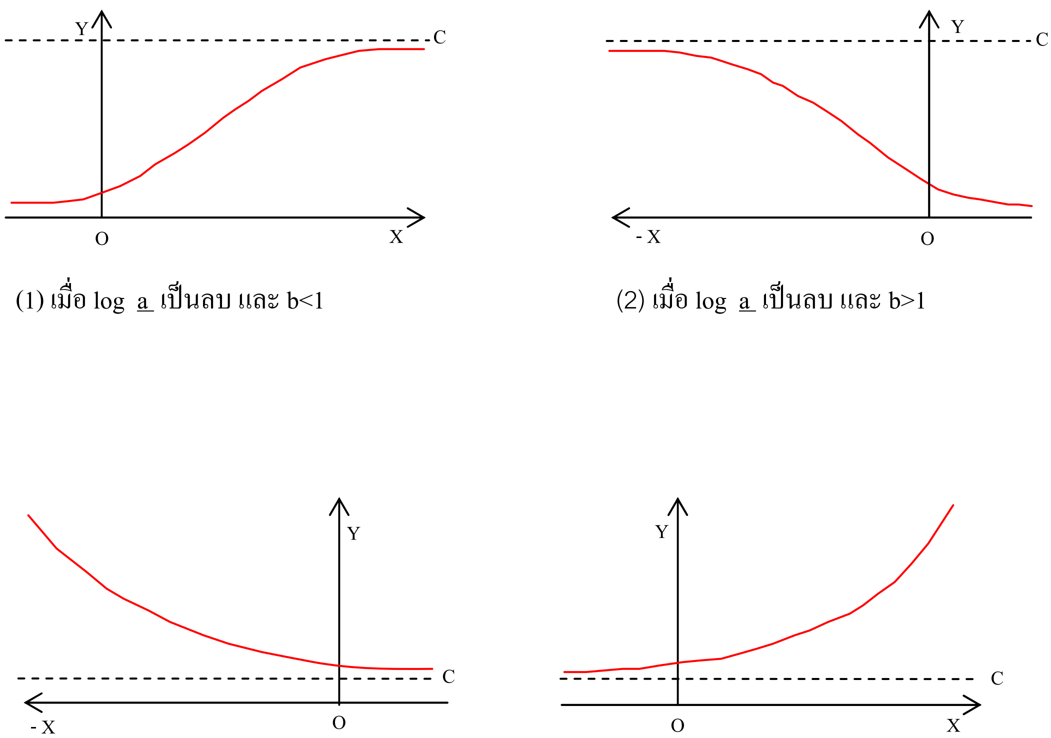
$$Y_c = ca^{b^x}$$

$$\log Y_c = \log (ca^{b^x})$$

$$\log Y_c = \log c + \log (a^{b^x})$$

$$\mathbf{\log Y_c = \log c + (\log a)\, b^X} \qquad \text{..........} \ \mathbf{(2)}$$

จะเห็นว่าสมการ (2) มีรูปแบบเดียวเหมือนกับสมการทั่วไปของ Modified Exponential Curve ยกเว้นค่า log ที่เพิ่มขึ้นมา



(1) เมื่อ log a เป็นลบ และ b<1

(2) เมื่อ log a เป็นลบ และ b>1

(3) เมื่อ log a เป็นบวก และ b<1

(4) เมื่อ log a เป็นบวก และ b>1

ภาพที่ 1 ลักษณะต่างๆ ของ Gompertz Curve

ที่มา : Croxton, Cowden and Klein, 1967 : 268.

เงื่อนไขในการใช้แบบจำลอง :

1. ข้อมูลดิบของประชากร ต้องมีไม่น้อยกว่า 9 ช่วงเวลา และสามารถหารด้วย 3 ลงตัว
2. กำหนดค่า Index เรียงโดยเริ่มจาก 0 , 1 , 2 , 3 ,…,n

วิธีคำนวณ

ขั้นตอนที่ 1

1. สร้างตาราง ให้มีคอลัมน์ต่าง ๆ ดังในตารางที่ 1
2. นำข้อมูลดิบที่จะคาดการณ์ประชากรในแต่ละปี (Y) มาใส่ลงในตาราง โดยแบ่งข้อมูลออกเป็น 3 ส่วน แต่ละส่วนมีจำนวนข้อมูลเท่า ๆ กัน
3. ใส่ค่า Index (X)
4. หาค่า logY
5. หาผลรวมของข้อมูลแต่ละส่วน (Partial Sum → $\sum_n$ logY)

Table 1 Compertz Curve Computation

Year	Index (X)	Observation* (Y)	Logarithm (log Y)	Partial sum ($\sum_n$ log Y)
1930	0	18	1.255273	
1935	1	23	1.361728	$\sum_1$ log Y
1940	2	27	1.431364	= 4.0484
1945	3	36	1.556303	
1950	4	41	1.612784	$\sum_2$ log Y
1955	5	50	1.69897	= 4.8680
1960	6	64	1.80618	
1965	7	74	1.869232	$\sum_3$ log Y
1970	8	85	1.929419	= 5.6048

* Value express in 1,000s

ขั้นตอนที่ 2

หาค่า b^n (n = จำนวนข้อมูลประชากร / 3 หรือ จำนวนข้อมูลในแต่ละส่วนที่ใช้หา Partial Sum), b , a , และ c จากสูตร :

$$b^n = \frac{(\sum_3 \log Y - \sum_2 \log Y)}{(\sum_2 \log Y - \sum_1 \log Y)} \qquad \text{.......} (3)$$

$$\log a = (\sum_2 \log Y - \sum_1 \log Y)\left[\frac{(b-1)}{(b^n - 1)^2}\right] \qquad \text{.......} (4)$$

$$\log c = 1/n\left[\frac{\sum_1 \log Y \sum_3 \log Y - (\sum_2 \log Y)^2}{\sum_1 \log Y + \sum_3 \log Y - 2\sum_2 \log Y}\right] \qquad \text{.......} (5)$$

จากตารางที่ 1 :

$$b^n = \frac{(5.6048 - 4.8680)}{(4.8680 - 4.0484)} = 0.8988$$

$$b = (0.8988)^{1/3} = 0.9651$$

$$\log\ a = (4.8680 - 4.0484)\left[\frac{(0.9651 - 1)}{(0.8988 - 1)^2}\right]$$

$$= -2.7976$$

และ $\log c = 1/3\left[\frac{\{(4.0484)(5.6048) - (4.8680)^2\}}{\{4.0484 + 0.5.6048 - 2(4.8680)\}}\right]$

$$= 4.0505$$

เมื่อนำ a , b , c ที่คำนวณได้ มาแทนค่าในสมการ (2) จะได้สูตรสำหรับคาดการณ์ประชากรในอนาคต คือ

$$\log Y_c = 4.0505 - 2.7976(0.9651)^x$$

ซึ่งสามารถนำไปใช้คาดการณ์ประชากรในอนาคตได้ดังตารางที่ 2 โดยเมื่อใช้สูตรในการหาค่า log Y_c ได้แล้ว ก็หาค่า Y_c โดยการ antilog Y_c (ซึ่งก็เท่ากับ 10 ยกกำลัง log Y_c นั่นเอง)

ตารางที่ 2 Logistic Curve Estimations

Year	Index X	log Y_c	Population* Y_c
1930	0	1.2529	17.90
1935	1	1.3506	22.42
1940	2	1.4449	27.85
1945	3	1.5359	34.35
1950	4	1.6237	42.04
1955	5	1.7085	51.10
1960	6	1.7903	61.70
1965	7	1.8692	73.99
1970	8	1.9454	88.18
1975	9	2.0189	104.45
1980	10	2.0899	122.98
1985	11	2.1583	143.99
1990	12	2.2244	167.65
1995	13	2.2882	194.17
2000	14	2.3497	223.73

* Value express in 1,000s