พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 1)

2/1 บทนำ

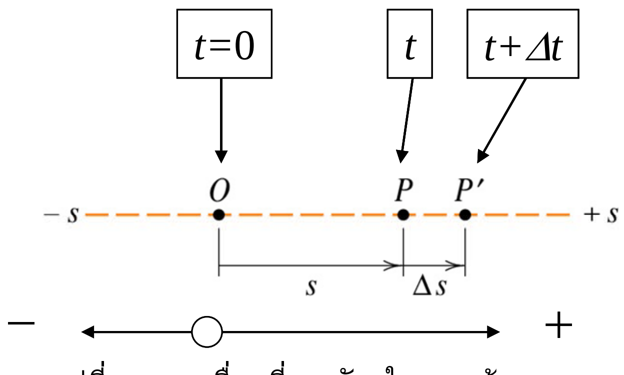
พลศาสตร์ เป็นสาขาหนึ่งของวิชากลศาสตร์ พลศาสตร์เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้แรงกระทำ พลศาสตร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 สาขาย่อย ได้แก่

1. Kinematics ซึ่งจะพิจารณาถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยยังไม่พิจารณาถึงแรงกระทำกับวัตถุนั้น
2. Kinetics ซึ่งจะพิจารณาผลของแรงที่กระทำบนวัตถุ ว่าทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่อย่างไร

สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึง Kinematics of particles หรือการเคลื่อนที่ของอนุภาค ในที่นี้อนุภาคหมายถึงวัตถุที่มีขนาดเล็กเมื่อเทียบเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่ของรถยนต์ ถือเป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาค เนื่องจากขนาดของรถยนต์เล็กกว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของรถบนถนนมาก ตัวอย่างอื่นๆ เช่นการเคลื่อนที่ของเครื่องบิน ลูกกระสุนปืน เป็นต้น

2/2 การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงของวัตถุแสดงดังรูปที่ 1 วัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากจุด O โดยเคลื่อนที่ไปทางขวา (แกนบวก) ที่เวลา t วัตถุอยู่ที่จุด P ซึ่งมีระยะห่างจากจุดเริ่มต้น s เมื่อเวลาผ่านไป Δt วัตถุเคลื่อนที่ไปที่จุด P’ และมีระยะห่าง $s+\Delta s$ จากจุดเริ่มต้น การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในช่วงเวลา Δt เรียกว่า การขจัด Δs การขจัดเป็นปริมาณเวคเตอร์ มีค่าบวกเมื่อเคลื่อนที่ไปตามแกนบวก และจะมีค่าลบเมื่อเคลื่อนที่ไปในทิศทางลบ



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรง

ความเร็วและความเร่ง

ความเร็ว (Velocity) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งเมื่อเทียบกับเวลา ความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลา Δt หาได้จากการหารการขจัด Δs ที่เคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลา Δt ด้วยเวลา Δt หรือเขียนเป็นสมการได้เป็น $v = \Delta s/\Delta t$ ถ้าต้องการพิจารณาความเร็วที่จุดใดๆ สามารถหาได้โดยพิจารณาในช่วงเวลาเล็กๆ เข้าใกล้ศูนย์ ความเร็วที่จุดใดๆ หาได้จาก

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad (1)$$

โดย สัญลักษณ์จุดเหนือตัวเลข แสดงให้เห็นว่าเป็นการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา

ความเร็วเป็นปริมาณเวคเตอร์ โดยความเร็วที่ทำให้การขจัดมีความเพิ่มขึ้น (เคลื่อนที่ไปทางบวก) จะมีค่าเป็นบวก ส่วนความเร็วที่ทำให้การขจัดมีค่าลดลง (เคลื่อนที่ไปทางลบ) จะมีค่าเป็นลบ

ความเร่ง (Acceleration) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วเมื่อเทียบกับเวลา ความเร่งเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลา Δt หาได้จากการหารความเร็ว Δv ด้วยเวลา Δt หรือเขียนเป็นสมการได้เป็น $a = \Delta v/\Delta t$ ถ้าต้องการพิจารณาความเร่งที่จุดใดๆ สามารถหาได้โดยพิจารณาในช่วงเวลาเล็กๆ เข้าใกล้ศูนย์ ความเร่งที่จุดใดๆ หาได้จาก

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \qquad (2)$$

ความเร่งเป็นปริมาณเวคเตอร์ โดยความเร่งเป็นบวกเมื่อความเร็วมีค่าเพิ่มขึ้น และความเร่งเป็นลบเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ช้าลง เรียกความเร่งที่เป็นลบว่า ความหน่วง (Deceleration)

จากสมการ (1) และ (2) สามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ใหม่โดยใช้กฎลูกโซ่ดังนี้

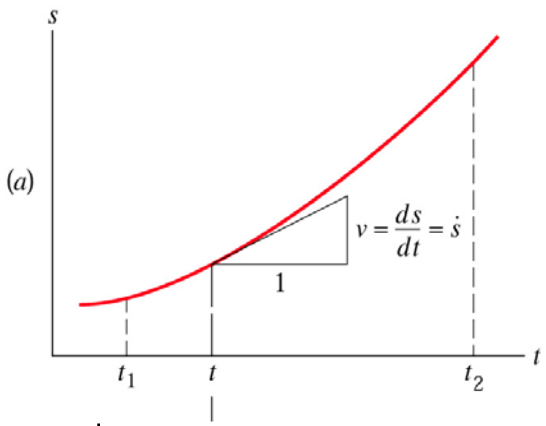
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = a \frac{ds}{dv}$$

$$v\,dv = a\,ds \qquad (3)$$

ข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ได้จากกราฟการเคลื่อนที่

การจะทราบว่าจะสามารถดึงข้อมูลใดจากกราฟการเคลื่อนที่ที่กำหนดให้ได้ ให้พิจารณากราฟการเคลื่อนที่ และสมการที่ (1) – (3) ประกอบกัน โดยส่วนใหญ่ข้อมูลที่ได้จากกราฟมักจะได้จากความชันของกราฟ (เช่น อัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา) และพื้นที่ใต้กราฟ (ผลคูณของปริมาณหนึ่ง กับส่วนย่อยๆ ของอีกปริมาณหนึ่ง)

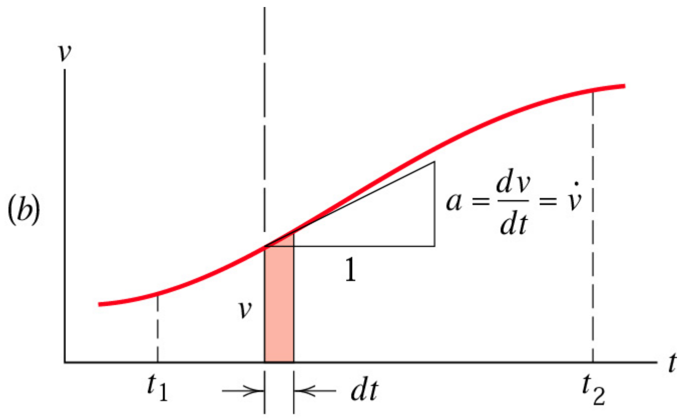
1. กราฟระหว่างการขจัดกับเวลา



รูปที่ 2 กราฟระหว่างการขจัดและเวลา

กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ s-t ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับตัวแปร s-t ซึ่งจากสมการ (1) - (3) จะพบว่ามีเพียงสมการ (1) เท่านั้นที่แสดงความสัมพันธ์ ของ s-t จากสมการ (1) จะได้ $v = \frac{ds}{dt}$ ซึ่งค่าอัตราการเปลี่ยนแปลง $\frac{ds}{dt}$ ก็คือความชันของกราฟนั่นเอง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าความชันของกราฟที่จุดใดๆ จะแสดงค่าความเร็วของการเคลื่อนที่ที่จุดนั้นๆ

2. กราฟระหว่างความเร็วกับเวลา



รูปที่ 3 กราฟระหว่างความเร็วและเวลา

กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ v-t ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับตัวแปร v-t จะพบว่ามีสองสมการ ที่แสดงความสัมพันธ์ ของ v-t ได้แก่สมการ (1) จะได้ $v = \frac{ds}{dt}$ และสมการ (2) $a = \frac{dv}{dt}$

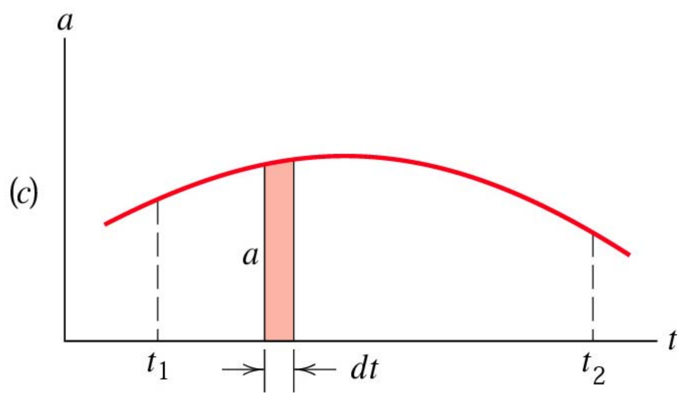
สมการ (1) สามารถจัดรูปและเขียนได้ดังนี้ $ds = vdt$ จะพบว่าผลคูณของ v และ dt จะแสดงถึงพื้นที่ย่อยๆ ซึ่งแรเงาในรูป และมีค่าเท่ากับการขจัดย่อยๆ ds เมื่ออินทิเกรตตลอดช่วงตั้งแต่ t1 จนถึง t2 พื้นที่ย่อยๆ จะกลายเป็นพื้นที่ใต้กราฟ และ การขจัดย่อยๆ จะกลายเป็นการขจัดที่เกิดในช่วงเวลาตั้งแต่ t1 จนถึง t2 ดังสมการ

$$\text{displacement } s = \int_{t_1}^{t_2} vdt = \text{Area under } v-t \text{ curve} \qquad (4)$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าพื้นที่ใต้กราฟของกราฟที่ v-t จะแสดงค่าการขจัดของการเคลื่อนที่ในขอบเขตนั้นๆ

สมการ (2) $a = \dfrac{dv}{dt}$ มีรูปแบบเดียวกับกรณีกราฟ s-t ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าความชันของกราฟที่จุดใดๆ จะแสดงค่าความเร่งของการเคลื่อนที่ที่จุดนั้นๆ

3. กราฟระหว่างความเร่งกับเวลา



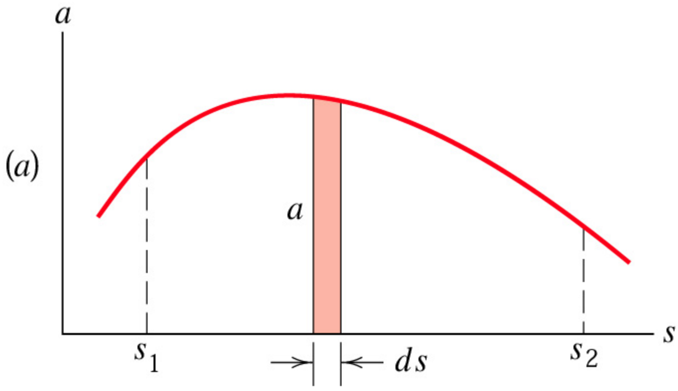
รูปที่ 4 กราฟระหว่างความเร่งและเวลา

กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ a-t ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับตัวแปร a-t จะพบว่าสมการ (2) แสดงความสัมพันธ์ ของ a-t โดยความสัมพันธ์คือ $a = \dfrac{dv}{dt}$ ซึ่งสามารถจัดรูปได้เป็น $dv = adt$ ผลคูณของ a และ dt คือพื้นที่ใต้กราฟย่อยๆ ส่วนที่แรเงาในรูป และมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว dv เมื่อคิดตลอดช่วงตั้งแต่ t1 จนถึง t2 จะได้ ผลต่างความเร็วของจุด 1 และจุด 2 ดังสมการ

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} adt = \text{Area under } a-t \text{ curve} \qquad (5)$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าพื้นที่ใต้กราฟในช่วง t1-t2 จะแสดงผลต่างของความเร็วตั้งแต่ที่เวลา t1-t2

4. กราฟระหว่างความเร่งกับการขจัด

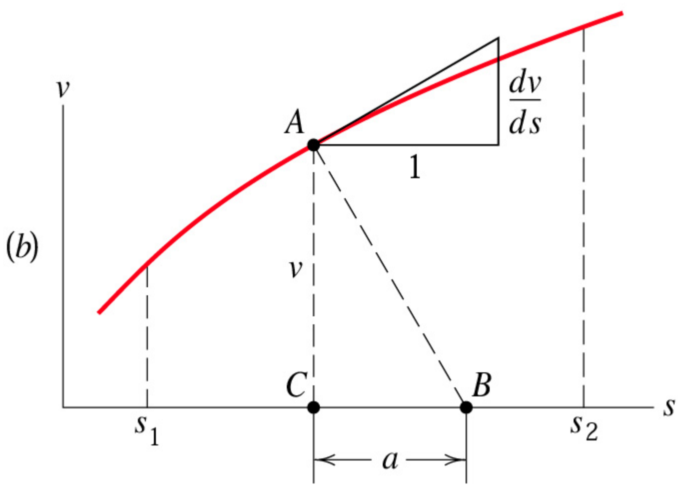


รูปที่ 5 กราฟระหว่างความเร่งและการขจัด

กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ a-s ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร a-s พบว่าสมการ (3) แสดงความสัมพันธ์ของ a-s ดังนี้ $vdv = ads$ ด้านขวาของสมการ (3) แสดงถึงพื้นที่ย่อยๆ ที่แรเงาในรูปที่ 5 ดังนั้นพื้นที่ใต้กราฟทั้งหมดในช่วง s1 ถึง s2 จะแสดงค่าของ $\int_{v1}^{v2} vdv$ ความสัมพันธ์ของพื้นที่ใต้กราฟกับความเร็ว v แสดงในสมการ (6)

$$\int_{v1}^{v2} vdv = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \int_{s_1}^{s_2} ads = \text{area under } a - s \text{ curve} \qquad (6)$$

5. กราฟระหว่างความเร็วกับการขจัด



รูปที่ 6 กราฟระหว่างความเร็วและการขจัด

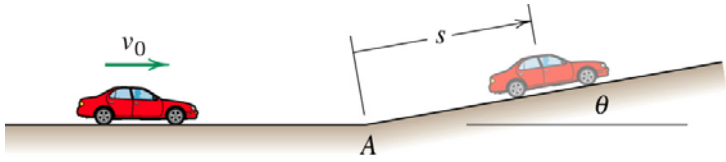
กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ v-s ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร v-s พบว่าสมการ (3) แสดงความสัมพันธ์ของ v-s ดังนี้ $vdv = ads$ สมการนี้สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\frac{dv}{ds} = \frac{a}{v} = \frac{CB}{v} \tag{7}$$

โดย $\frac{dv}{ds}$ แสดงถึงความชันของกราฟ v-s สำหรับ เส้นตรง AB เป็นเส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุด A ดังนั้นสามเหลี่ยม ABC จึงเป็นสามเหลี่ยมที่คล้ายกับสามเหลี่ยมด้านบน ซึ่งประกอบจากเส้นสัมผัสโค้ง เนื่องจากระยะ AC มีค่าเท่ากับ v ดังนั้น ระยะ CB จึงต้องมีค่าเท่ากับ a ด้วย ดังนั้นในกราฟ v-s นี้ จะหาความเร่งได้จากระยะ CB ในรูปที่ 6

หมายเหตุ การหาความเร่งด้วยวิธีนี้ หน่วยของการขจัด และความเร็ว ต้องมีความสอดคล้องกัน และ หน่วยความเร่งที่ได้ก็จะสอดคล้องกับหน่วยของการขจัด และความเร็วด้วย เช่น การขจัดและความเร็วมีหน่วยเป็น m, m/s ตามลำดับ จะได้หน่วยของความเร่งเป็น m/s2

2/25 The car traveling at a constant speed v_0 = 100 km/h on the level position of the road. When the 6-percent ($\tan\theta$ = 6/100) incline is encountered, the driver does not change the throttle setting and consequently the car decelerates at the constant rate $g\sin\theta$. Determine the speed of the car (a) 10 seconds after passing point A and (b) when s = 100 m.



วิธีทำ กำหนด $v_0 = 100\text{ km/h}$ $\theta = \arctan(\frac{6}{100})$

$$a = -g\sin\theta = -0.5875\text{ m/s}^2$$

(a) กำหนดความเร่ง และเวลาที่ต้องการ ให้หาความเร็ว
จากเงื่อนไขนี้จะทราบว่าต้องใช้สมการ $a = \frac{dv}{dt}$ ในการคำนวณ

$[dv = adt]$
$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t_1} adt = \int_{0}^{10} -0.5875dt$$

$$v - \frac{100\times10^3}{3600} = -0.5875(10)$$

$$v = 21.9\text{ m/s}$$ *Ans*

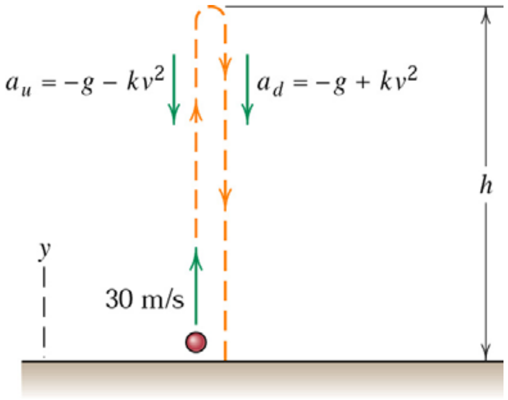
(b) กำหนดความเร่ง และระยะทางที่ต้องการ ให้หาความเร็ว
จากเงื่อนไขนี้จะทราบว่าต้องใช้สมการ $vdv = ads$ ในการคำนวณ

$[vdv = ads]$
$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{s_0}^{s_1} ads = \int_{0}^{100} -0.5875ds$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - (\frac{100\times10^3}{3600})^2) = -0.5875(100)$$

$$v = 25.57\text{ m/s}$$ *Ans*

2/51 When the effect of aerodynamic drag is included, the y-acceleration of a baseball moving vertically upward is $a_u = -g - kv^2$, while the acceleration when the ball is moving downward is $a_d = -g + kv^2$, where k is a positive constant and v is the speed in meters per second. If the ball is thrown upward at 30 m/s from essentially ground level, compute its maximum height h and its speed v_f upon impact with the ground. Take k to be 0.006 m^{-1} and assume that g is constant.



วิธีทำ คิดช่วงที่บอลลอยขึ้นด้านบน

กำหนดความเร็วต้นของบอล 30 m/s ความเร็วที่จุดสูงสุด 0 m/s และ
ความเร่ง ให้หาระยะทาง h

จากเงื่อนไขนี้ทำให้ทราบว่าต้องใช้สมการ $vdv = ads$

$[vdv = ads]$
$$vdv = (-g - kv^2)ds$$

$$\frac{v}{-g - kv^2}dv = ds$$

$$\int \frac{v}{-g - kv^2}dv = \int ds$$

$$\frac{-1}{2k}\ln(c\cdot(g + kv^2)) = s \qquad (1)$$

แทนค่า S = 0, v = 30: $\frac{-1}{2(0.006)}\ln(c\cdot(9.81 + 0.006\cdot 30^2)) = 0$

$$c = 0.0657$$

สมการ (1) กลายเป็น

$$\frac{-1}{2(0.006)}\ln(0.0657\cdot(9.81 + 0.006v^2)) = s$$

แทนค่าที่จุดสูงสุด v = 0, s = h

$$\frac{-1}{2(0.006)}\ln(0.0657\cdot(9.81+0.006\cdot 0^2))=h$$

$$h=36.54\,\text{m}$$ *Ans*

คิดช่วงที่บอลเคลื่อนที่ลงจนตกกระทบพื้น

ในข้อนี้ไม่สามารถจะคิดรวมตั้งแต่บอลลอยขึ้นจนตกกระทบพื้นได้ เนื่องจากความเร่งในช่วงบอลลอยขึ้น และบอลตกลงไม่เท่ากัน

กำหนดความเร็วต้นของบอล 0 m/s ทราบความเร่ง และทราบระยะทาง h ให้หาความเร็วปลายตอนบอลกระทบพื้น
จากเงื่อนไขนี้ทำให้ทราบว่าต้องใช้สมการ $vdv=ads$

$[vdv=ads]$

$$vdv=(-g+kv^2)ds$$

$$\frac{v}{-g+kv^2}dv=ds$$

$$\int\frac{v}{-g+kv^2}dv=\int ds$$

$$\frac{1}{2k}\ln(c\cdot(-g+kv^2))=s \qquad (2)$$

แทนค่า S = 36.54, v = 0: $$\frac{1}{2(0.006)}\ln(c\cdot(-9.81+0.006\cdot 0^2))=36.54$$

$$c=-0.158$$

สมการ (2) กลายเป็น

$$\frac{-1}{2(0.006)}\ln(-0.158\cdot(-9.81+0.006v^2))=s$$

หา v ตอนกระทบพื้น s = 0

$$\frac{-1}{2(0.006)}\ln(-0.158\cdot(-9.81+0.006v^2))=0$$

$$v=24.091\,\text{m/s}$$ *Ans*