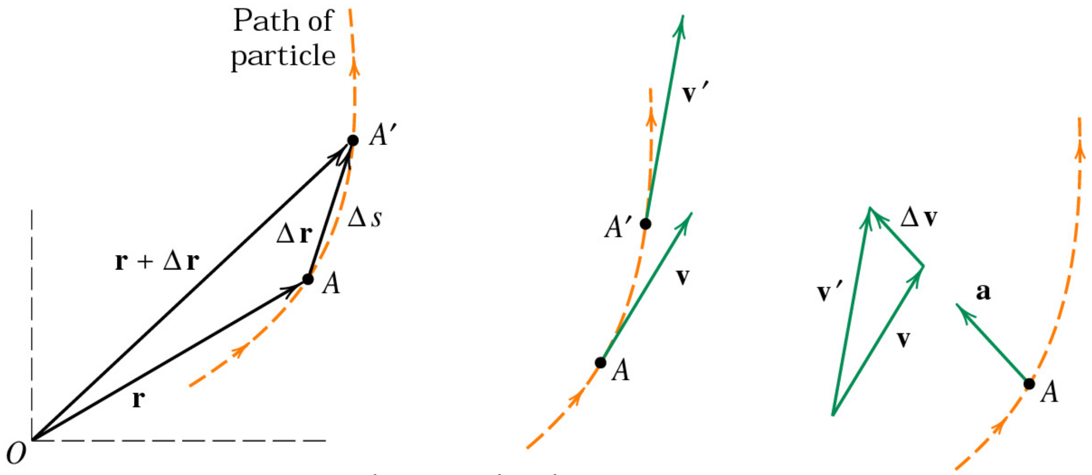
พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 2)

2/3 การเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ

การเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ (Plane Curvilinear Motion) หมายถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุตามแนวเส้นโค้งใดๆ บนระนาบหนึ่ง ดังนั้นปัญหาการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบจึงเป็นปัญหาประเภท 2 มิติ



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ

พิจารณาการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบแสดงดังรูปที่ 1 ที่เวลา t วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง A ตำแหน่งของจุด A สามารถบอกได้โดยใช้เวคเตอร์บอกตำแหน่ง $\bar{r}$ ซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดอ้างอิงใดๆ (เลือกตามความสะดวกในการพิจารณา) เมื่อเวลาเปลี่ยนไปเป็น t+Δt วัตถุนี้จะเคลื่อนที่ไปที่ตำแหน่ง A’ เวคเตอร์บอกตำแหน่งจะเปลี่ยนไปเป็น $\bar{r}+\Delta\bar{r}$ การขจัดของวัตถุ (ปริมาณเวคเตอร์) ได้แก่การเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์บอกตำแหน่ง มีค่าเท่ากับ $\Delta\bar{r}$ ส่วนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ (ปริมาณสเกลาร์) ได้แก่ระยะทาง Δs ตามแนวเส้นทางการเคลื่อนที่ (เส้นสีส้ม)

ความเร็ว

ความเร็ว คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งเทียบกับเวลา ความเร็วเป็นปริมาณเวคเตอร์หาได้ดังสมการ (1)

$$\vec{v} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \tag{1}$$

เนื่องจากเวลา t เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้นความเร็วจึงมีทิศทางเดียวกับการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ตำแหน่ง $\Delta\bar{r}$ เมื่อคิดช่วงเวลาสั้นๆ ทิศทางของ $\Delta\bar{r}$ จะเข้าใกล้กับ

เส้นสัมผัสของเส้นโค้งแนวทางการเคลื่อนที่ ดังนั้นความเร็วขณะใดๆ จะมีทิศทางเป็นทิศเดียวกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งแนวทางการเคลื่อนที่

อัตราเร็ว คือขนาดของความเร็ว อัตราเร็วเป็นปริมาณสเกลาร์ สามารถหาได้

$$v = |\bar{v}| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \tag{2}$$

ความเร่ง

ความเร่ง คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลา ความเร่งเป็นปริมาณเวคเตอร์หาได้ดังสมการ (3)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} \tag{3}$$

ถึงแม้ว่าทิศทางของความเร็วจะสัมผัสกับเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ แต่ทิศทางของความเร่งไม่มีความสัมพันธ์กับเส้นแนวทางการเคลื่อนที่เลย

การหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์

ในการศึกษาการเคลื่อนที่แนวโค้ง จำเป็นที่จะต้องใช้วิธีการเวคเตอร์ในการพิจารณา ในที่นี้จึงทบทวนการหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์สักเล็กน้อย โดยสมการการหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์ในกรณีต่างๆ แสดงในสมการที่ (4)-(7)

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \dot{P}_x\hat{i} + \dot{P}_y\hat{j} + \dot{P}_z\hat{k} \tag{4}$$

$$\frac{d\bar{P}u}{dt} = \bar{P}\dot{u} + \dot{\bar{P}}u \tag{5}$$

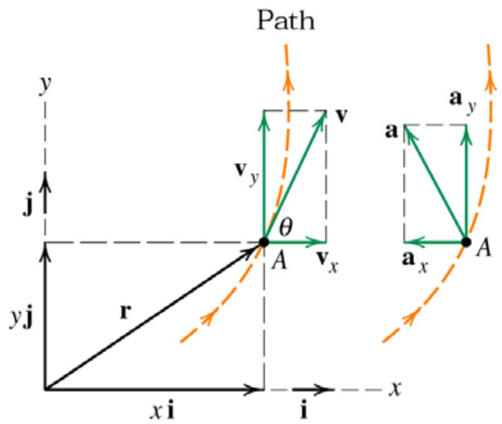
$$\frac{d(\bar{P}\cdot\bar{Q})}{dt} = \bar{P}\cdot\dot{\bar{Q}} + \dot{\bar{P}}\cdot\bar{Q} \tag{6}$$

$$\frac{d(\bar{P}\times\bar{Q})}{dt} = \bar{P}\times\dot{\bar{Q}} + \dot{\bar{P}}\times\bar{Q} \tag{7}$$

ระบบพิกัดในการพิจารณาการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ

ในการพิจารณาการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบนั้น สามารถพิจารณาได้ในระบบพิกัดต่างๆ ระบบพิกัดที่ใช้กันโดยทั่วไปมี 3 แบบ ได้แก่ 1) ระบบพิกัดแบบ x-y, 2) ระบบพิกัดแบบ n-t, และ 3) ระบบพิกัดแบบ r-θ ระบบพิกัดแต่ละแบบจะเหมาะกับรูปแบบปัญหาแตกต่างกันไป โดยจะอธิบายต่อไปดังนี้

2/4 ระบบพิกัดแบบ x-y



รูปที่ 2 การใช้ระบบพิกัดแบบ x-y กับการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ

ระบบพิกัดแบบ x-y เหมาะกับปัญหาที่ตัวแปร x และ y สามารถแยกคิดได้โดยอิสระต่อกัน เช่นปัญหาการโยนลูกบอลในอากาศ ซึ่งความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกจะส่งผลในแนวดิ่ง (แนว y) เท่านั้น แต่ไม่ส่งผลกับการเคลื่อนที่ไปด้านหน้าของลูกบอล (แนว x)

รูปที่ 2 แสดงตัวอย่างการใช้ระบบพิกัด x-y กับการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ เมื่อวัตถุอยู่ที่จุด A วัตถุมีเวคเตอร์บอกตำแหน่งเป็น เวคเตอร์ $\bar{r}$ และมีความเร็วการเคลื่อนที่ $\bar{v}$ โดยมีทิศทางสัมผัสกับเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ และทำมุม θ กับแนวระดับ ความเร็วสามารถแตกออกได้เป็นส่วนประกอบย่อยๆ ในแนว x และ y ดังแสดงในรูป สำหรับความเร่งซึ่งทิศทางไม่สัมพันธ์กับเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ก็สามารถแยกออกได้เป็นส่วนประกอบย่อยในแนว x-y เช่นกัน การวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนที่โดยใช้พิกัด x-y จะใช้สมการดังต่อไปนี้

ตำแหน่งวัตถุ $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ (8)

ความเร็ว $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ (9)

ความเร่ง $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ (10)

จากสมการที่ (9) และ (10) จะสามารถหาความเร็ว และความเร่งในแนวแกน x และ y ได้ ถ้าต้องการหาขนาดความเร็ว และความเร่งรวม และหาทิศทางของการเคลื่อนที่ (ทิศทางของความเร็ว) จะสามารถหาได้จากสมการ (11) ถึง (13)

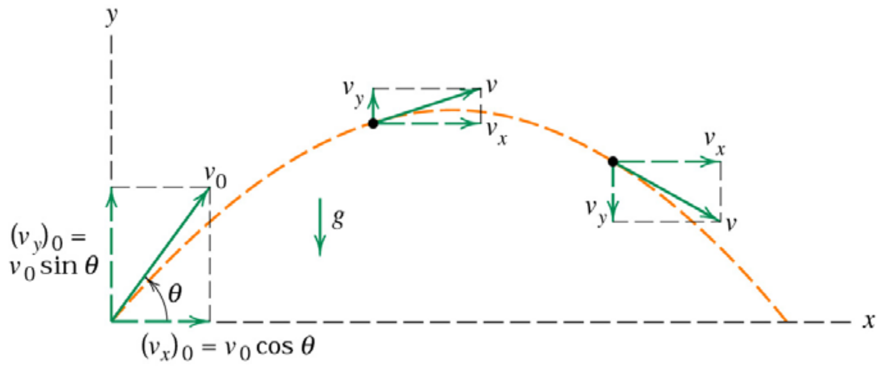
ขนาดความเร็ว $v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$ (11)

ขนาดความเร่ง $a^2 = {a_x}^2 + {a_y}^2$ (12)

ทิศทางการเคลื่อนที่ $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$ (13)

การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์

การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ เป็นการเคลื่อนที่แบบเส้นโค้งในระนาบกรณีหนึ่งที่เหมาะกับการพิจารณาปัญหาด้วยระบบพิกัด x-y การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์แสดงดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ หากไม่คิดถึงผลของแรงต้านอากาศ และคิดว่าการเปลี่ยนแปลงความสูงมีค่าน้อยจนไม่มีผลต่อค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g จากการพิจารณาเช่นนี้จะได้ว่า ความเร่งในแนวดิ่งมีค่าคงที่เท่ากับ g ส่วนในแนวระดับไม่มีแรงกระทำ จึงไม่เกิดความเร่งขึ้น และความเร็วในแนวระดับจะมีค่าคงที่ ความเร่งในแต่ละทิศทางเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$a_y = -g \qquad \text{และ} \qquad a_x = 0 \tag{14}$$

ในการตั้งแกนพิกัด โดยทั่วไปจะตั้งให้มีทิศทางบวกเป็นไปตามทิศทางการเคลื่อนที่ (ทิศความเร็ว) ในที่นี้ความเร่งมีค่าติดลบเนื่องจาก ความเร่งมีทิศตรงข้ามกับ แกนที่ตั้งไว้ และมีทิศทางตรงข้ามกับทิศความเร็วต้น จึงทำให้วัตถุเคลื่อนที่ช้าลงในช่วงแรก

เนื่องจาก<u>ความเร่งมีค่าคงที่</u>ดังนั้นจะสามารถหาค่าต่างๆ ได้จากสมการต่อไปนี้

แกน x $$v_x = (v_x)_0 \qquad \text{และ} \qquad x = x_0 + (v_x)_0 t \tag{15}$$

แกน y $$v_y = (v_y)_0 - gt \tag{16}$$

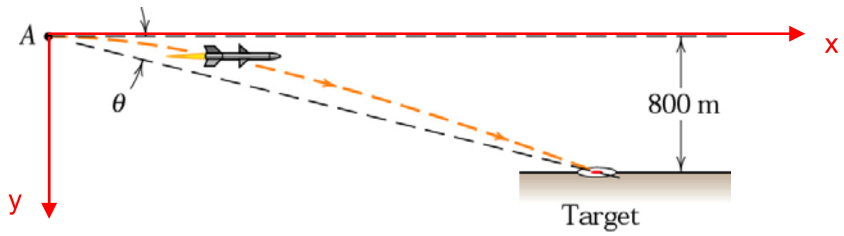
$$y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{17}$$

$$v_y^{\,2} = (v_y)_0^{\,2} - 2g(y - y_0) \tag{18}$$

การคำนวณจะสามารถคิดแยกแนวแกน x และแนวแกน y ได้โดยจุดร่วมของการคิดทั้งสองแกน ได้แก่ที่เวลาเดียวกัน ตำแหน่งบนแกน x และแกน y ต้องมีความสัมพันธ์กัน

<u>หมายเหตุ</u> การคำนวณโดยใช้สมการที่ (15) – (17) จะใช้ได้เมื่อ<u>ความเร่งมีค่าคงที่เท่านั้น</u> หากความเร่งไม่คงที่ เช่นกรณีการคิดแรงต้านอากาศ จะต้องพิจารณาเริ่มจากสมการการเคลื่อนที่พื้นฐาน และอินทิเกรตเพื่อหาปริมาณต่างๆ โดยตรง

2/77 A rocket is released at point *A* from a jet aircraft flying horizontally at 1000 km/h at an altitude of 800 m. If the rocket thrust remains horizontal and gives the rocket a horizontal acceleration of 0.5*g*, determine the angle θ from the horizontal to the line of sight to the target.



วิธีทำ จากโจทย์จะทราบค่าต่างๆ ดังนี้

$$v_{x0} = v_0 = 1000 \times \frac{10^3}{3600} = \frac{1000}{3.6} \text{ m/s}$$

$$v_{y0} = 0 \text{ m/s}$$

$$a_x = 0.5g \text{ m/s}^2 \qquad a_y = g \text{ m/s}^2$$

ตั้งแกน x และแกน y ดังแสดงในรูป

พิจารณาในแนวแกน x

$$\left[\frac{dv_x}{dt} = a_x\right] \qquad \frac{dv_x}{dt} = 0.5g$$

$$v_x = 0.5gt + C_1$$

$$t = 0, \quad v_x = \frac{1000}{3.6} \text{ m/s} \qquad \frac{1000}{3.6} = 0 + C_1 \longrightarrow C_1 = \frac{1000}{3.6}$$

$$v_x = 0.5gt + \frac{1000}{3.6}$$

$$\left[\frac{ds_x}{dt} = v_x\right] \qquad \frac{ds_x}{dt} = 0.5gt + \frac{1000}{3.6}$$

$$s_x = \frac{0.5g}{2}t^2 + \frac{1000}{3.6}t + C_2$$

$$t = 0, \quad s_x = 0 \text{ m} \qquad 0 = 0 + 0 + C_2 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$s_x = \frac{0.5g}{2}t^2 + \frac{1000}{3.6}t$$

พิจารณาในแนวแกน y

$\left[\dfrac{dv_y}{dt} = a_y\right]$ $\qquad \dfrac{dv_y}{dt} = g$

$$v_x = gt + C_3$$

$t = 0, \quad v_y = 0\,\text{m/s}$ $\qquad 0 = 0 + C_3 \longrightarrow C_3 = 0$

$$v_y = 5gt$$

$\left[\dfrac{ds_y}{dt} = v_y\right]$ $\qquad \dfrac{ds_y}{dt} = gt$

$$s_y = \frac{g}{2}t^2 + C_4$$

$t = 0, \quad s_y = 0\,\text{m}$ $\qquad 0 = 0 + C_4 \longrightarrow C_4 = 0$

$$s_y = \frac{g}{2}t^2$$

เมื่อจรวดตกกระทบพื้น $\qquad s_y = 800\,\text{m}$

$$800 = \frac{g}{2}t^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{800\times 2}{9.81}} = 12.771\,\text{s}$$

แทนใน s_x ได้ $\qquad s_x = \dfrac{0.5g}{2}(12.771)^2 + \dfrac{1000}{3.6}(12.771) = 3947.5\,\text{m}$

$$\theta = \arctan\left(\frac{s_y}{s_x}\right) = \arctan\left(\frac{800}{3947.5}\right) = 11.46^\circ$$

Ans

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์