พลศาสตร์ (Dynamics)

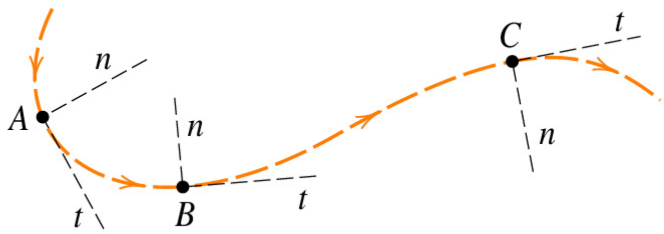
บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 3)

2/5 ระบบพิกัดแบบ n-t

พิกัดแบบ n-t (Normal and Tangential coordinate) หรือพิกัดแบบตั้งฉากแนวการเคลื่อนที่และสัมผัสแนวการเคลื่อนที่ สามารถตั้งได้ตามตัวอย่างแสดงในรูปที่ 1 โดยมีหลักการการตั้งแกนดังนี้

1. แกน t เป็นแกนสัมผัสแนวการเคลื่อนที่ และมีทิศทางบวกชี้ไปตามแนวการเคลื่อนที่
2. แกน n เป็นแกนตั้งฉากการเคลื่อนที่ และมีทิศทางบวกชี้เข้าไปหาจุดศูนย์กลางความโค้งของเส้นแนวการเคลื่อนที่
3. แกนพิกัด n-t จะเปลี่ยนตำแหน่งไปตามวัตถุที่เคลื่อนที่

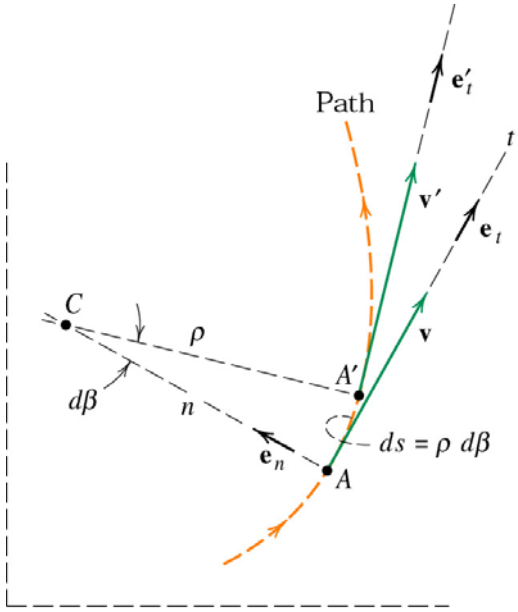
จากตัวอย่างแสดงในรูปที่ 1 จะพบว่าที่จุด A, B และ C จะมีแกนพิกัด n-t แตกต่างกันอย่างไรก็ตามหลักเกณฑ์การตั้งแกนพิกัดจะเป็นไปตามที่กล่าวไว้ข้างต้น



รูปที่ 1 การตั้งพิกัดแบบ n-t

การเคลื่อนที่บางกรณีไม่สะดวกที่จะบอกพิกัดโดยคิดเทียบกับจุดอ้างอิงแบบพิกัด x-y แต่จะเหมาะสมกว่าถ้าใช้พิกัดแบบ n-t เช่น การเคลื่อนที่ของรถยนต์บนถนนโค้ง ในกรณีเช่นนี้ถ้าบอกความเร็วเป็นพิกัด x-y จะมีความยุ่งยาก เนื่องจากความเร็วในแนว x และ y จะเป็นความเร็วเพียงส่วนหนึ่งของรถยนต์เท่านั้น ไม่ใช่ขนาดความเร็วจริงของรถยนต์ตามแนวทางการเคลื่อนที่ จำเป็นที่จะต้องคำนวณรวมความเร็วในแนว x และ y ก่อน จึงจะได้ความเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์ อย่างไรก็ตามโดยทั่วไปอัตราเร็วของรถสามารถวัดได้จากเครื่องวัดอัตราเร็วที่ติดตั้งในรถ ส่วนทิศทางของความเร็วเป็นทิศทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์อยู่แล้ว ในกรณีนี้การบอกพิกัดแบบ n-t จะเหมาะสมกว่า

ความเร็วและความเร่งในระบบพิกัดแบบ n-t



รูปที่ 2 ความเร็วในพิกัดแบบ n-t

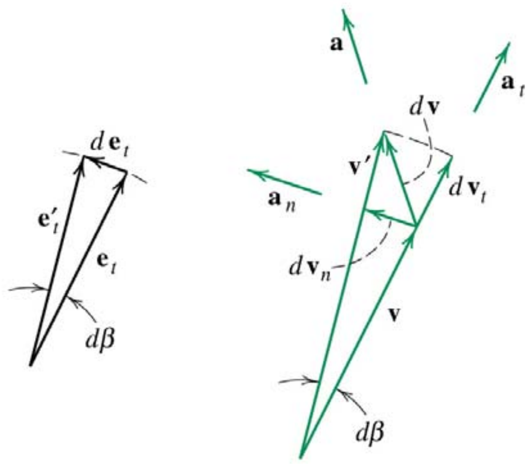
พิจารณารูปที่ 2 ซึ่งแสดงถึงการเคลื่อนที่และความเร็วของวัตถุ ในระบบพิกัด n-t เมื่อวัตถุอยู่ที่จุด A จะตั้งแกนพิกัดได้ดังแสดงด้วยแกน n และแกน t ในรูปที่ 2 โดยจุด C แสดงจุดศูนย์กลางความโค้งของเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ในขณะนั้น เวคเตอร์ $\hat{e}_n$ และ $\hat{e}_t$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง n และ t ตามลำดับ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปเล็กน้อยจนถึงจุด A' แกนพิกัดจะเปลี่ยนไปเล็กน้อยดังแสดงในรูป เนื่องจากพิจารณาระยะการเคลื่อนที่น้อยๆ จุดศูนย์กลางความโค้งสามารถพิจารณาว่าไม่เปลี่ยนตำแหน่งได้ และรัศมีความโค้งของเส้นแนวทางการเคลื่อนที่มีค่า ρ เท่าเดิม มุมที่จุดศูนย์กลางความโค้งที่เปลี่ยนไปมีค่าเท่ากับ $d\beta$ ดังนั้นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ได้แก่ $ds = \rho d\beta$ อัตราเร็วในการเคลื่อนที่หาได้จาก $\dfrac{ds}{dt} = \rho\dfrac{d\beta}{dt}$ เนื่องจากความเร็วเป็นปริมาณเวคเตอร์ ดังนั้นจึงต้องแสดงทิศทางของความเร็วด้วย โดยความเร็วจะมีทิศทางตามแนวเส้นสัมผัส ได้แก่ แนวเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ นั่นเอง ดังนั้น ความเร็ว $\bar{v}$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\bar{v} = v\hat{e}_t = \rho\dot{\beta}\hat{e}_t \tag{1}$$

ความเร่งในระบบพิกัดแบบ n-t สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของความเร็วในสมการ (1) เทียบกับเวลา ดังนี้

$$\bar{a} = \frac{d(v\hat{e}_t)}{dt} = v\dot{\hat{e}}_t + \dot{v}\hat{e}_t \tag{2}$$

จากสมการ (2) จะเห็นว่าต้องทราบค่าอนุพันธ์ของเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ เทียบกับเวลาก่อน จึงจะหาความเร่งได้ พิจารณาการหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ ดังแสดงในรูปที่ 3 ได้ดังนี้



รูปที่ 3 การหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์ $\hat{e}_t$

รูปที่ 3 ด้านซ้ายมือวาดโดยดึงเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ และ $\hat{e}'_t$ ในรูปที่ 2 มาเขียนต่อกัน จะพบว่าการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ แสดงโดยเวคเตอร์ $d\hat{e}_t$ และมีทิศทางเป็นทิศเดียวกับ $\hat{e}_n$ ขนาดของเวคเตอร์ $d\hat{e}_t$ หาได้จากรูปที่ 3 ทางด้านซ้ายมือเช่นกัน โดย $|d\hat{e}_t| = |\hat{e}_t| d\beta = d\beta$ จากความสัมพันธ์นี้จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$d\hat{e}_t = (d\beta)\hat{e}_n$$

และหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$\dot{e}_t = \dot{\beta}\hat{e}_n \qquad (3)$$

แทนความสัมพันธ์ในสมการ (3) ลงในสมการ (2) จะได้

$$\bar{a} = \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n + \dot{v}\hat{e}_t \qquad (4)$$

โดย

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta}$$

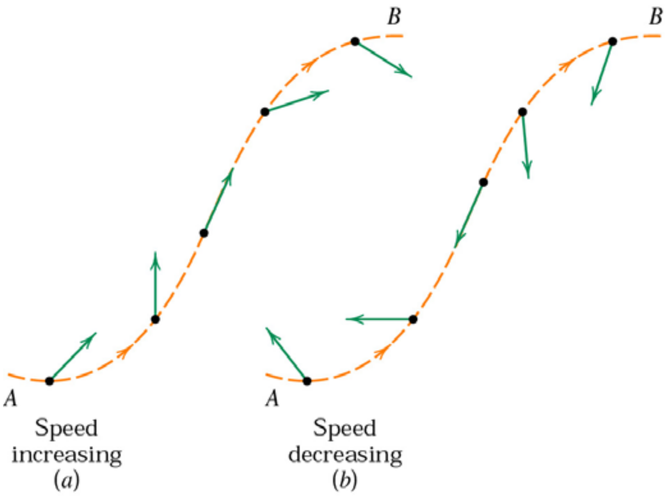
$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

รูปที่ 3 ทางด้านขวามือแสดงการเปลี่ยนแปลงของความเร็วจากความเร็ว $\bar{v}$ มาเป็น $\bar{v}'$ ซึ่งมีทิศทางต่างกันโดยทำมุมกัน $d\beta$ ทิศทางของความเร่ง $\bar{a}$ จะมีทิศทางเดียวกับทิศของ การเปลี่ยนแปลงความเร็ว $d\bar{v}$ ดังแสดงในรูป การเปลี่ยนแปลงความเร็ว $d\bar{v}$ นี้สามารถแตกออกเป็น $d\bar{v}_t$ ซึ่งเป็นส่วนประกอบในทิศทางการเคลื่อนที่ (แนว t) และ $d\bar{v}_n$ ซึ่งเป็นส่วนประกอบในทิศตั้งฉากการเคลื่อนที่ (แนว n) เมื่อพิจารณาช่วงเวลาเล็กๆ มุม $d\beta$ จะมีขนาดเล็กมาก การเปลี่ยนแปลง $d\bar{v}_t$ จึงเป็นการเปลี่ยนแปลงขนาดของเวคเตอร์ความเร็ว และการเปลี่ยนแปลง $d\bar{v}_n$ จึงเป็นการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากทิศทางของความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าความเร่งในแนวสัมผัส $\bar{a}_t$ จึงเป็นผลเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงขนาด

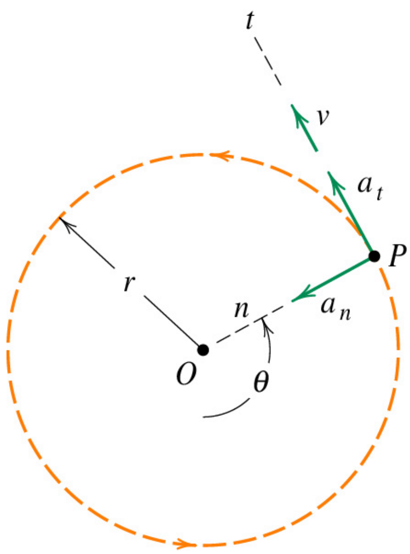
ของความเร็ว ส่วนความเร่งในแนวตั้งฉาก $\bar{a}_n$ จึงเป็นผลเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของทิศทางของความเร็ว

เมื่อพิจารณาถึงกรณีการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงซึ่งไม่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางการเคลื่อนที่ จึงมีเฉพาะความเร่งในแนว t เท่านั้น และมีค่าเท่ากับ $\dot{v}$ เราอาจจะพิจารณาหาความเร่งจากสมการที่ (4) ได้เช่นกัน เนื่องจากการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีรัศมีความโค้งการเคลื่อนที่เป็นอนันต์ (∞) ดังนั้นพจน์ $\frac{v^2}{\rho}$ ในสมการที่ (4) จึงมีค่าเป็น 0 นั่นคือไม่มีส่วนประกอบในแนว n นั่นเอง



รูปที่ 4 ทิศทางความความเร่ง

การใช้พิกัดแบบ n-t จะทำให้ทราบทิศทางของความเร่งอย่างหยาบๆ ได้โดยง่าย พิจารณาการเคลื่อนที่ในรูปที่ 4(a) ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่โดยมีความเร็วเพิ่มขึ้น การเพิ่มความเร็วแสดงให้เห็นว่า ทิศทางของความเร่งในแนว t ต้องมีทิศทางตามทิศทางการเคลื่อนที่ ส่วนความเร่งในแนว n จะชี้เข้าสู่จุดศูนย์กลางของเส้นโค้งการเคลื่อนที่เสมอ ดังแสดงในรูป เมื่อวัตถุเคลื่อนที่และมีความเร็วลดลง ก็สามารถพิจารณาได้ทำนองเดียวกัน โดยทิศทางของความเร่งแสดงดังรูปที่ 4(b)



รูปที่ 5 การเคลื่อนที่แบบวงกลม

การเคลื่อนที่แบบวงกลม

การเคลื่อนที่แบบวงกลม สามารถพิจารณาโดยใช้พิกัดแบบ n-t ได้ดังนี้

1. รัศมีความโค้งมีค่าคงที่ $\rho = r$
2. มุมรอบจุดศูนย์กลางความโค้ง $\beta = \theta$

จากเงื่อนไขทั้ง 2 ข้อ สามารถหาความเร็ว ความเร่งได้ดังสมการ

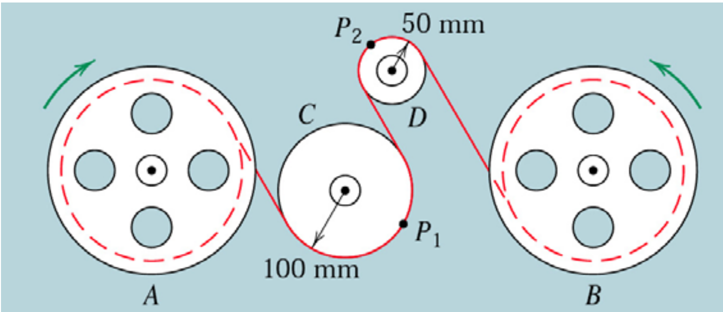
$$v = r\dot{\theta} \tag{5}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta} \tag{6}$$

$$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta} \tag{7}$$

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์

2/113 Magnetic tape is being transferred from reel A to reel B and passes around idler pulleys C and D. At a certain instant, point P_1 on the tape is in contact with pulley C and point P_2 is in contact with pulley D. If the normal component of acceleration of P_1 is 40 m/s^2 and the tangential component of acceleration of P_2 is 30 m/s^2 at this instant, compute the corresponding speed v of the tape, the magnitude of the total acceleration of P_1, and the magnitude of the total acceleration of P_2.



วิธีทำ จากโจทย์จะทราบค่าต่างๆ ดังนี้

จุด P_1 $\quad a_n = 40 \text{ m/s}^2$

จุด P_2 $\quad a_t = 30 \text{ m/s}^2$

ต้องการหา v, a_1, a_2

พิจารณาที่จุด P_1

$$\left[a_n = \frac{v^2}{\rho}\right] \qquad 40 = \frac{v^2}{0.1} \longrightarrow v = 2 \text{ m/s}$$

Ans

เทปทั้งเส้นจะต้องมี v และ a_t เท่ากัน ถ้าไม่เท่ากันจะทำให้เทปขาด หรือเทปย่น ทำงานไม่ได้ ด้วยเหตุผลนี้จะได้

จุด P_1 $\quad a_t = 30 \text{ m/s}^2$

จุด P_2 $\quad v = 2 \text{ m/s}$

เพราะฉะนั้น $\quad a_1 = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ m/s}^2$ *Ans*

พิจารณาที่จุด P_2

$$\left[a_n = \frac{v^2}{\rho}\right] \qquad a_n = \frac{2^2}{0.05} = 80 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{80^2 + 30^2} = 85.44 \text{ m/s}^2$$ *Ans*

2/119 A particle moving in the *x-y* plane has a position vector given by $\vec{r} = \frac{3}{2}t^2\hat{i} + \frac{2}{3}t^3\hat{j}$, where $\vec{r}$ is in meters and *t* is in seconds. Calculate the radius of curvature ρ of the part for the position of the particle when t = 2 s. Sketch the velocity *v* and the curvature of the path for this particular instant.

วิธีทำ จากโจทย์ต้องการหาค่า ρ ที่เวลา t = 2 s

เนื่องจากต้องการหาค่า ρ แต่ ρ เกี่ยวข้องกับ a_n จึงต้องหาค่า a_n ให้ได้ก่อน

$$\vec{r} = \frac{3}{2}t^2\hat{i} + \frac{2}{3}t^3\hat{j} \longrightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}} = 3t\hat{i} + 2t^2\hat{j}$$

$$\longrightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = 3\hat{i} + 4t\hat{j}$$

ที่เวลา t = 2 s $\quad \vec{v} = 6\hat{i} + 8\hat{j} \longrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 8\hat{j} \longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \text{ m/s}^2$$

ความเร่งที่ได้นี้เป็นความเร่งรวม เมื่อต้องการจะหาส่วนประกอบในแนว n หรือ ในแนว t จะต้องแตกความเร่งเข้าแกน n-t ก่อน อย่างไรก็ตามในข้อนี้จะไม่ทราบทิศทางของแกน n-t โดยตรง แต่จะสามารถหาได้โดยใช้หลักที่ว่า ความเร็วมีทิศทางเดียวกับทิศทางการเคลื่อนที่

เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการเคลื่อนที่ (ทิศทางความเร็ว) หาได้จาก $\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

ขนาดความเร่งในแนว t หาได้จาก

$$a_t = \vec{a}\cdot\hat{e}_t = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(3\hat{i} + 8\hat{j}\right)\cdot\frac{\left(6\hat{i} + 8\hat{j}\right)}{10} = \frac{(3)(6) + (8)(8)}{10} = 8.2 \text{ m/s}^2$$

ขนาดความเร่งในแนว n หาได้จาก $\quad a_n = \sqrt{a^2 + a_t^2} = \sqrt{73 - 8.2^2} = 2.4 \text{ m/s}^2$

$$\left[a_n = \frac{v^2}{\rho}\right] \qquad 2.4 = \frac{10^2}{\rho} \longrightarrow \rho = 41.67 \text{ m}$$

Ans