พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 4)

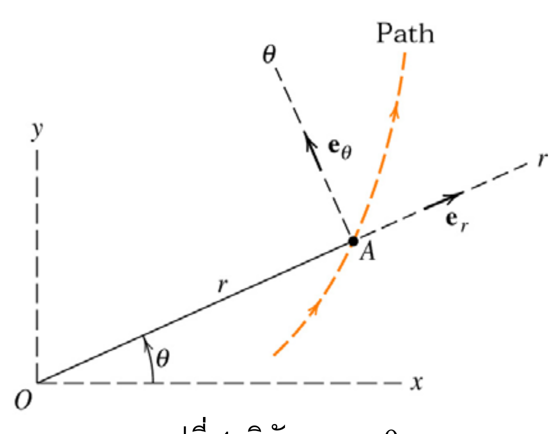
2/6 ระบบพิกัดแบบ r-θ

ในส่วนก่อนหน้ากล่าวถึงระบบพิกัดแบบต่างๆ ซึ่งเหมาะสมกับปัญหาในลักษณะแตกต่างกันไปโดย ระบบพิกัดฉากเหมาะกับปัญหาที่ผู้สังเกตอยู่นิ่ง และสามารถพิจารณาลักษณะการเคลื่อนที่เป็นระบบพิกัดฉากได้ง่าย เช่น ปัญหาการเคลื่อนที่วิถีโค้งในระนาบหรือโปรเจคไตล์ สำหรับพิกัดแบบ n-t จะเหมาะในกรณีที่ผู้สังเกตหรืออุปกรณ์ตรวจวัดการเคลื่อนที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับวัตถุ เช่น การเคลื่อนที่ของรถยนต์บนถนนโค้ง เป็นต้น

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงระบบพิกัดแบบเชิงขั้ว หรือ ระบบพิกัด r-θ ซึ่งจะเหมาะกับปัญหาที่ผู้สังเกตอยู่นิ่ง และสังเกตการณ์เคลื่อนที่ของวัตถุโดยวัดระยะทาง และมุมที่เปลี่ยนไปได้ง่าย ตัวอย่างของปัญหานี้ เช่น การทำงานของเรดาร์ติดตามการเคลื่อนที่ ซึ่งจะบอกข้อมูลเป็นระยะทางของวัตถุที่ห่างจากตัวเรดาร์ และมุมซึ่งแสดงตำแหน่งของวัตถุเทียบกับแกนอ้างอิง

พิกัดแบบ r-θ (Polar coordinate) สามารถตั้งเพื่อบอกตำแหน่งของวัตถุซึ่งอยู่ที่จุด A ในขณะนั้นได้ตามตัวอย่างแสดงในรูปที่ 1 โดยมีหลักการการตั้งแกนดังนี้

1. ตำแหน่งจุด A วัดเทียบกับจุดอ้างอิงอยู่นิ่ง O โดยจุด A อยู่ห่างจากจุด O เท่ากับ r และ เส้นตรงที่ลากเชื่อมจุด O กับ A ทำมุม θ กับแนวระดับ
2. แกน r-θ มีจุดกำเนิดอยู่ที่จุด A ซึ่งเป็นตำแหน่งของวัตถุที่สนใจในขณะนั้น
3. แกน r ตั้งอยู่ในแนวเดียวกับเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุด O กับจุด A และมีทิศทางบวกชี้ออกจากจุดอ้างอิง O (ทิศทางที่ทำให้ระยะ r มีค่าเพิ่มมากขึ้น) เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน r คือเวคเตอร์ $\hat{e}_r$
4. แกน θ อยู่ตั้งฉากกับแกน r และมีทิศทางบวกชี้ไปในทิศทางที่ทำให้มุม θ เพิ่มมากขึ้น เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน θ คือเวคเตอร์ $\hat{e}_\theta$



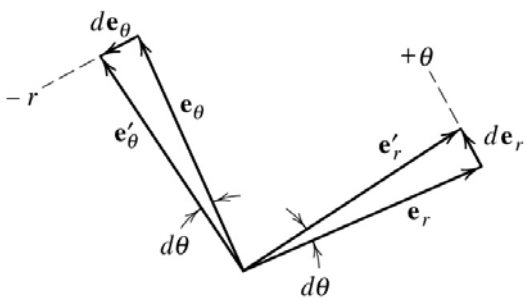
รูปที่ 1 พิกัดแบบ r-θ

จากหลักเกณฑ์การตั้งแกนพิกัด และรูปที่ 1 จะได้ว่าตำแหน่งจุด A สามารถบอกได้ในรูปของเวคเตอร์บอกตำแหน่งดังนี้

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \tag{1}$$

เมื่อได้เวคเตอร์บอกตำแหน่งแล้ว การหาความเร็วและความเร่งในระบบพิกัด r-θ ก็สามารถทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการที่ (1) เทียบกับเวลา เช่นเดียวกับระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดแบบ n-t อย่างไรก็ตามพบว่าการหาอนุพันธ์ของสมการที่ (1) จำเป็นต้องทราบค่าอนุพันธ์ของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ เทียบกับเวลาเสียก่อน และในการหาความเร่งยังต้องทราบค่าอนุพันธ์ของ $\hat{e}_\theta$ เทียบกับเวลาด้วย ดังนั้นในที่นี้จะอธิบายถึงการหาอนุพันธ์ของ $\hat{e}_r$ และ $\hat{e}_\theta$ เทียบกับเวลาก่อนดังนี้

การหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในพิกัด r-θ



รูปที่ 2 การหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในพิกัด r-θ

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ และ $\hat{e}_\theta$ แสดงดังรูปที่ 2 เมื่อวัตถุเคลื่อนที่จากจุด A ไปเป็นจุด A' เวคเตอร์ $\hat{e}_r$ และเวคเตอร์ $\hat{e}_\theta$ จะเปลี่ยนไปเป็นเวคเตอร์ $\hat{e}'_r$ และเวคเตอร์ $\hat{e}'_\theta$ ตามลำดับ โดยเวคเตอร์ก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลงทำมุมกัน dθ

การเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ แสดงโดยเวคเตอร์ $d\hat{e}_r$ เวคเตอร์นี้จะชี้ไปทิศทาง +θ ดังแสดงในรูป การเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ เขียนแทนด้วยสมการได้ดังนี้

$$d\hat{e}_r = |d\hat{e}_r|\hat{e}_\theta \tag{2}$$

เนื่องจากขนาดของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ดังนั้นขนาดของเวคเตอร์ $d\hat{e}_r$ หาได้จาก

$$|d\hat{e}_r| = |\hat{e}_r|d\theta = d\theta \tag{3}$$

แทนสมการ (3) ในสมการ (2) จะได้

$$d\hat{e}_r = d\theta\hat{e}_\theta$$

$$\boxed{\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta} \tag{4}$$

การเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_\theta$ สามารถหาได้ทำนองเดียวกัน

โดย $$|d\hat{e}_\theta| = |\hat{e}_\theta|d\theta = d\theta$$

เนื่องจากทิศทางการการเปลี่ยนแปลงชี้ไปทาง –r ดังนั้น

$$d\hat{e}_\theta = -d\theta \hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r \tag{5}$$

สมการที่ (4) และ (5) จะนำไปใช้ในการหาความเร็วและความเร่งในพิกัด r-θ ต่อไป

ความเร็ว

ความเร็วสามารถหาได้โดยหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์บอกตำแหน่งในสมการ (1) เทียบกับเวลาดังนี้

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{6}$$

โดย $v_r = \dot{r}$ เกิดจากการเปลี่ยนแปลงขนาดของเวคเตอร์ $\vec{r}$

$v_\theta = r\dot{\theta}$ เนื่องจากพจน์นี้เกิดจากพจน์ $r\dot{\hat{e}}_r$ จึงแสดงถึงผลของการเปลี่ยนแปลงทิศทางของเวคเตอร์ $\vec{r}$

ขนาดของความเร็วรวมหาได้จาก $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

ความเร่ง

ความเร่งหาได้โดยหาอนุพันธ์ของความเร็วในสมการ (6) เทียบกับเวลาดังนี้

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta) + (\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{e}_r))$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \tag{7}$$

โดย $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

ขนาดของความเร่งรวมหาได้จาก $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$

การเคลื่อนที่แบบวงกลม

การเคลื่อนที่แบบวงกลม สามารถพิจารณาโดยใช้พิกัดแบบ r-θ โดยผู้สังเกตอยู่ที่จุดกึ่งกลางวงกลม กรณีนี้รัศมีความโค้งมีค่าคงที่ ดังนั้น $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ และจะได้

$$v = v_\theta = r\dot{\theta} \tag{8}$$

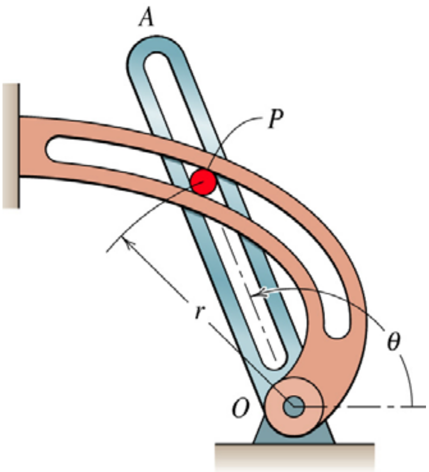
$$a_r = -r\dot{\theta}^2 \tag{9}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} \tag{10}$$

ผลที่ได้จะสอดคล้องกับการใช้พิกัด n-t ในการพิจารณา สังเกตว่า $a_r = -a_n$ ทั้งนี้เนื่องจากวิธีการตั้งแกนของพิกัดแบบ n-t ต่างกับพิกัดแบบ r-θ โดยแกน n ในพิกัดแบบ n-t จะ

ชี้เข้าหาจุดศูนย์กลางความโค้งเสมอ ส่วนแกน r ในพิกัดแบบ r-θ จะชี้ออกจากจุดอ้างอิง ซึ่งในที่นี้คือจุดศูนย์กลางของวงกลม

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์



2/149 The slotted arm *OA* forces the small pin to move in the fixed spiral guide defined by $r = K\theta$. Arm *OA* starts from rest at $\theta = \pi/4$ and has a constant counterclockwise angular acceleration $\ddot{\theta} = \alpha$. Determine the magnitude of the acceleration of the pin *P* when $\theta = 3\pi/4$.

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $r = K\theta$

$$t = 0,\ \theta = \pi/4,\ v = 0 \longrightarrow \begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} = 0;\quad \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} = \alpha$$

จาก $r = K\theta \longrightarrow \dot{r} = K\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{r} = K\ddot{\theta} = K\alpha$

$\ddot{\theta} = \alpha \longrightarrow \dot{\theta} = \alpha t + C_1$ ที่ $t = 0,\ \dot{\theta} = 0$ ดังนั้น $C_1 = 0$

$$\dot{\theta} = \alpha t$$

$\dot{\theta} = \alpha t \longrightarrow \theta = \dfrac{\alpha t^2}{2} + C_2$ ที่ $t = 0,\ \theta = \pi/4$ ดังนั้น $C_2 = \pi/4$

$$\theta = \frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\pi}{4}$$

ต้องการหาที่ $\theta = 3\pi/4$, $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\alpha t^2}{2} + \dfrac{\pi}{4} \longrightarrow t = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$

$$\dot{\theta} = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\alpha\pi}$$

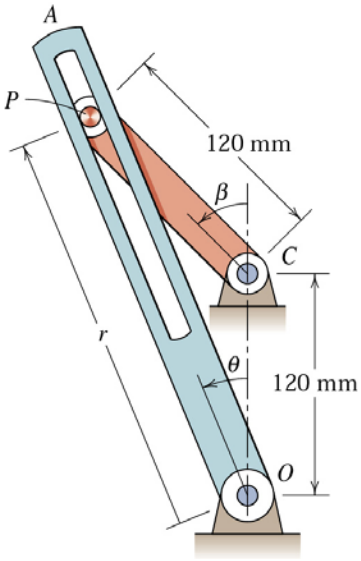
$$\dot{r} = K\dot{\theta} = K\sqrt{\alpha\pi}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = K\alpha - (K)(\frac{3\pi}{4})(\alpha\pi) = K\alpha(1 - \frac{3}{4}\pi^2) = -6.402K\alpha$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (K)(\frac{3\pi}{4})(\alpha) + 2(K\sqrt{\alpha\pi})(\sqrt{\alpha\pi})$$

$$a_\theta = K\alpha(\frac{3\pi}{4} + 2\pi) = \frac{11}{4}\pi K\alpha$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = K\alpha\left[\sqrt{(-0.642)^2 + \left(\frac{11\pi}{4}\right)^2}\right] = 10.753K\alpha \qquad \underline{Ans}$$



2/165 For a limited range of motion, crank *CP* causes the slotted link *OA* to rotate. If β is increasing at the constant rate of 4 rad/s when β = π/4, determine the r- and θ-components of the acceleration of pin P for this position and specify the corresponding values of $\dot{r}$ and $\ddot{r}$.

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $\dot{\beta} = 4\text{ rad/s}$ constant

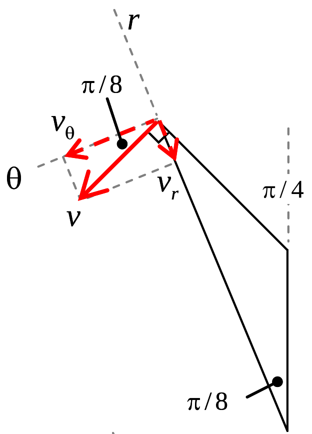
ต้องการหาค่า $a_r, a_\theta, \dot{r}, \ddot{r}$ เมื่อ β = π/4

จุด P เป็นจุดบนชิ้นส่วน PC และเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด C ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ จุด P จะมีความเร็ว และความเร่งดังนี้

$$v = 0.12\dot{\beta} = (0.12)(4) = 0.48\text{ m/s}$$

$$a = (0.12)(\dot{\beta})^2 = (0.12)(4)^2 = 1.92\text{ m/s}^2$$

ทิศทางของความเร็วและความเร่งแสดงดังในรูป



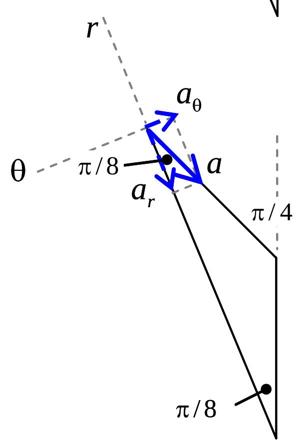
v_r, v_θ, a_r, a_θ สามารถหาได้โดยแตกความเร็วและความเร่งเข้าในแนวแกน *r*-θ ดังนี้

$$v_r = -v\sin\frac{\pi}{8} = -0.48\sin\frac{\pi}{8} = -0.1837\text{ m/s}$$

$$v_\theta = v\cos\frac{\pi}{8} = 0.48\cos\frac{\pi}{8} = 0.4435\text{ m/s}$$

$$a_r = -a\cos\frac{\pi}{8} = -1.92\cos\frac{\pi}{8} = -1.7738\text{ m/s}^2 = -1774\text{ mm/s}^2$$

$$a_\theta = -a\sin\frac{\pi}{8} = -1.92\sin\frac{\pi}{8} = -0.7348\text{ m/s}^2 = -734.8\text{ mm/s}^2$$



Ans

$$\dot{r} = v_r = -0.1837\text{ m/s} = -183.7\text{ mm/s}$$ *Ans*

$$r = 2(120)\cos\frac{\pi}{8} = 221.7311\text{ mm}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} = \frac{0.4435}{0.2217} = 2 \text{ rad/s}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 = -1.7738 + (0.2217)(2^2)$$

$$\ddot{r} = -0.887 \text{ m/s}^2 = -887 \text{ mm/s}^2$$ *Ans*