

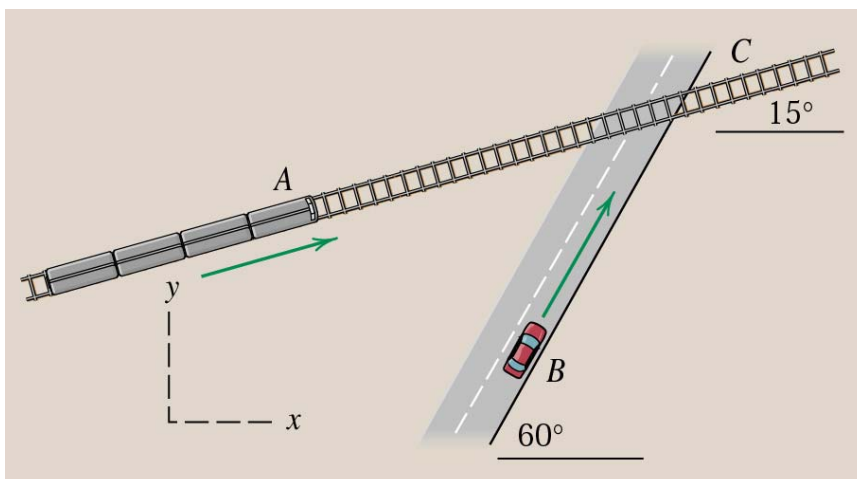
## พลศาสตร์ (Dynamics)

### บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 5)

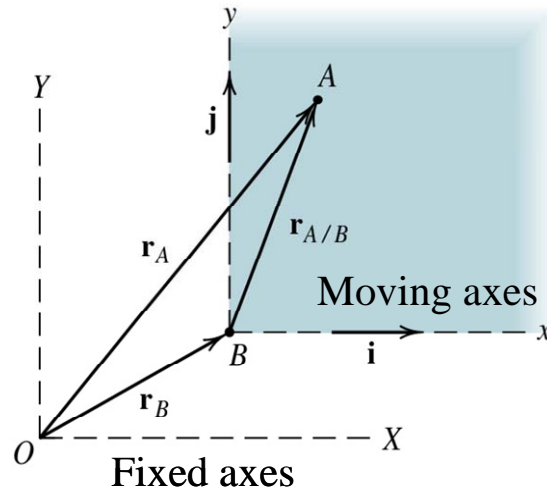
#### 2/8 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (Translating axes)

ในหัวข้อก่อนๆ การสังเกตการณ์เคลื่อนที่ของวัตถุจะเป็นการสังเกตโดย (เทียบกับ) ผู้สังเกตที่อยู่กับที่ การเคลื่อนที่ของวัตถุที่สังเกตได้จากผู้สังเกตที่อยู่หนึ่งนั้นจะเรียกว่า “การเคลื่อนที่สัมบูรณ์ (Absolute motion)” อย่างไรก็ตามหากผู้สังเกตไม่ได้อยู่นิ่งกับที่แต่เคลื่อนที่อยู่ การเคลื่อนที่ของวัตถุที่สังเกตได้จะไม่ใช้ค่าที่แท้จริง เรียกการเคลื่อนที่ของวัตถุที่สังเกตจากผู้สังเกตที่เคลื่อนที่ว่า “การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (Relative motion)” รูปที่ 1 แสดงตัวอย่างการสังเกตการเคลื่อนที่ หากต้องการสังเกตการเคลื่อนที่ของรถไฟ A เมื่อผู้สังเกตยืนอยู่กับที่ จะสังเกตการเคลื่อนที่ของรถไฟและบอกการเคลื่อนที่สัมบูรณ์ของรถไฟได้ อย่างไรก็ตามหากผู้สังเกตนั่งอยู่ในรถยนต์ B และทำการสังเกตการเคลื่อนที่ของรถไฟ A ค่าที่ผู้สังเกตสังเกตได้จะไม่ใช้ค่าสัมบูรณ์ แต่จะเป็นค่าการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ที่เทียบกับรถยนต์ B ในกรณีนี้การเคลื่อนที่สัมบูรณ์ของรถไฟ A ก็ยังสามารถหาได้ หากทราบการเคลื่อนที่ของผู้สังเกต ซึ่งในที่นี้คือรถยนต์ B

**Note** ในความเป็นจริงวัตถุใดๆ มีการเคลื่อนที่ โลกก็มีการเคลื่อนที่เช่นกัน ดังนั้นการเคลื่อนที่ที่สังเกตได้จึงควรเป็นการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ทุกๆ กรณี อย่างไรก็ตามในปัญหาต่างๆ จะถือว่าหากผู้สังเกตอยู่นิ่งบนพื้นโลก การเคลื่อนที่ที่ผู้สังเกตสังเกตได้จะเป็นการเคลื่อนที่สัมบูรณ์ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า แกนพิกัดที่ตั้งให้หยุดนิ่งเทียบกับโลกจะถือเป็นแกนที่หยุดนิ่ง



รูปที่ 1 ตัวอย่างการสังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุจากผู้สังเกตที่เคลื่อนที่



รูปที่ 2 การเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์

รูปที่ 2 แสดงวิธีการพิจารณาการเคลื่อนที่โดยใช้วิธีการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ โดย วัตถุ A เป็นวัตถุที่ต้องการสังเกต ผู้สังเกต B เป็นผู้สังเกตที่เคลื่อนที่ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาผู้สังเกตที่เคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ (Translation) เท่านั้น ไม่รวมผู้สังเกตที่เคลื่อนที่แบบหมุน (Rotation) ซึ่งต้องอาศัยการพิจารณาที่แตกต่างกันไป แกนพิกัด X-Y เป็นแกนพิกัดที่อยู่บนพื้นโลก ส่วนแกนพิกัด x-y เป็นแกนพิกัดที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับผู้สังเกต B

จากรูปที่ 2 จะได้ว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุ A เทียบกับแกนหยุดนิ่ง X-Y จะเป็นค่าสัมบูรณ์ ส่วนการเคลื่อนที่ของวัตถุ A เมื่อสังเกตโดยผู้สังเกต B จะเป็นค่าสัมพัทธ์ ซึ่งไม่เท่ากับค่าสัมบูรณ์

การเคลื่อนที่ของวัตถุ A เมื่อเทียบกับแกนหยุดนิ่งแสดงได้โดยเวกเตอร์  $\vec{r}_A$  การเคลื่อนที่ของผู้สังเกต B เมื่อเทียบกับแกนหยุดนิ่งแสดงได้โดยเวกเตอร์  $\vec{r}_B$  ส่วนการเคลื่อนที่ของวัตถุ A เมื่อเทียบกับผู้สังเกต B (สังเกตโดยผู้สังเกต B) แสดงโดยเวกเตอร์  $\vec{r}_{A/B}$  (A/B อักษรตัวแรกแสดงวัตถุที่สังเกต อักษรตัวหลังแสดงผู้สังเกต) จากรูปจะได้ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ทั้ง 3 ดังนี้

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \quad (1)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (1) เทียบกับเวลา จะได้ความสัมพันธ์แสดงความเร็วและความเร่งของวัตถุ A ดังนี้

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{A/B} \quad \text{หรือ} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \quad (2)$$

$$\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}}_B + \ddot{\vec{r}}_{A/B} \quad \text{หรือ} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \quad (3)$$

โดย ความเร็วและความเร่งที่ห้อยด้วยตัวอักษร A, B จะแสดงความเร็วและความเร่งสัมบูรณ์ (เทียบกับแกนหยุดนิ่ง) ส่วนความเร็วและความเร่งที่ห้อยด้วยอักษร A/B จะแสดงความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์ ของวัตถุ A เทียบกับผู้สังเกต B

เมื่อผู้สังเกต B ใช้ระบบพิกัดฉากในการบอกตำแหน่งวัตถุ A จะสามารถเขียนเวกเตอร์  $\vec{r}_{A/B}$  ซึ่งแสดงตำแหน่งของ A เมื่อเทียบกับผู้สังเกต B ได้ดังนี้

$$\vec{r}_{A/B} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (4)$$

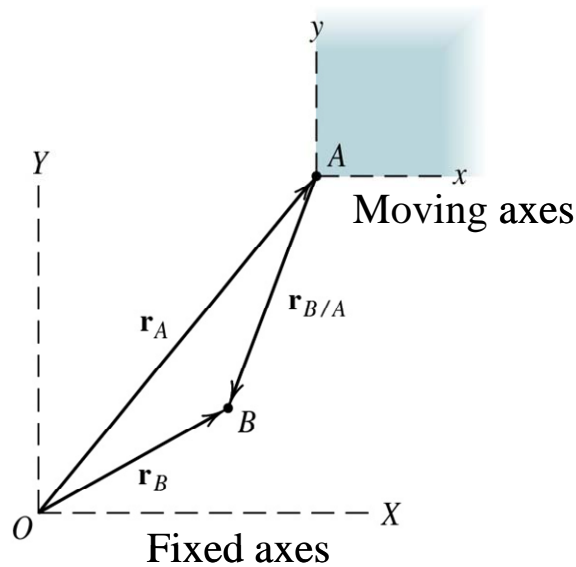
โดย  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ  
 $x$ ,  $y$  คือพิกัดของวัตถุ  $A$  เมื่อวัดโดยแกน  $x$ - $y$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (4) เทียบกับเวลา จะได้ความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์ดังนี้

$$\vec{v}_{A/B} = \dot{\vec{r}}_{A/B} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \quad (5)$$

$$\vec{a}_{A/B} = \ddot{\vec{r}}_{A/B} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \quad (6)$$

**Note** ผู้สังเกต  $B$  สามารถใช้ระบบพิกัดแบบอื่นๆ เช่น พิกัดแบบ  $n$ - $t$  หรือพิกัดแบบ  $r$ - $\theta$  เพื่อบอกตำแหน่งของวัตถุ  $A$  ได้เช่นเดียวกัน ในกรณีนี้สมการ (4)-(6) จะเปลี่ยนไปตามระบบพิกัดที่ใช้



รูปที่ 3 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (ผู้สังเกตอยู่ที่จุด  $A$ )

รูปที่ 3 แสดงการเคลื่อนที่สัมพัทธ์เช่นเดียวกับรูปที่ 2 แต่ต่างกันว่า ในกรณีนี้ผู้สังเกตอยู่ที่จุด  $A$  และตั้งแกนพิกัด  $x$ - $y$  โดยเคลื่อนที่ไปพร้อมกับจุด  $A$  ส่วนวัตถุที่ต้องการสังเกตอยู่ที่จุด  $B$  จากรูปจะได้ว่า

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad (7)$$

ทำนองเดียวกันจะได้

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (8)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad (9)$$

เมื่อเทียบสมการ (1) – (3) กับสมการ (7) – (9) จะได้ว่า

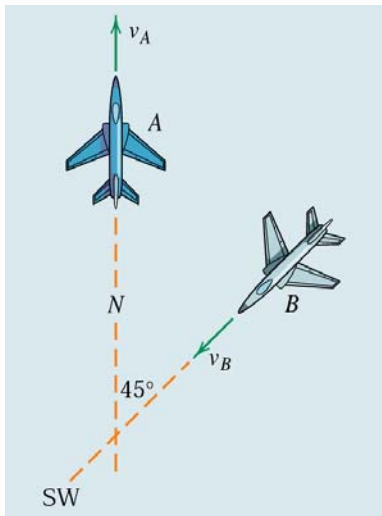
$$\vec{r}_{A/B} = -\vec{r}_{B/A} \quad (10)$$

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} \quad (11)$$

$$\vec{a}_{A/B} = -\vec{a}_{B/A} \quad (12)$$

นั่นคือ ถ้าเลือกวัตถุที่สังเกต และผู้สังเกตกลับกัน จะได้ว่าตำแหน่งสัมพัทธ์ ความเร็วสัมพัทธ์ และความเร่งสัมพัทธ์ จะมีค่าเท่ากันแต่เครื่องหมายตรงกันข้าม ซึ่งหมายถึงมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกันนั่นเอง

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์



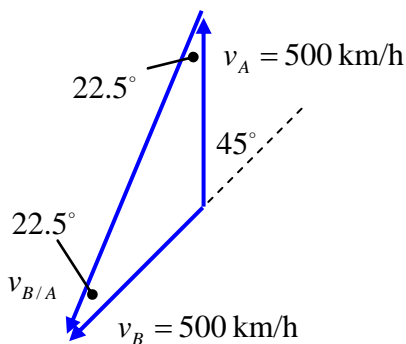
**2/201** Airplane *A* is flying north with a constant horizontal velocity of 500 km/h. Airplane *B* is flying south-west at the same altitude with a velocity of 500 km/h. From the frame of reference of *A* determine the magnitude  $v_r$  of the apparent or relative velocity of *B*. Also find the magnitude of the apparent velocity  $v_n$  with which *B* appears to be moving sideways or normal to its centerline. Would the results be different if the two airplanes were flying at different but constant altitudes? [Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.2/201]

**วิธีทำ** โจทย์กำหนดให้  $v_A = v_B = 500 \text{ km/h}$

- ต้องการหาค่า 1.  $v_r$  ซึ่งเป็น  $v$  ของเครื่องบิน *B* เมื่อเทียบกับผู้สังเกต *A* ซึ่งก็คือ  $v_{A/B}$  นั่นเอง  
 2.  $v_n$  หรือส่วนประกอบของ  $v_{A/B}$  ในทิศทางตั้งฉากกับ  $v_A$

ในกรณีนี้ผู้สังเกตอยู่ที่ *A* พิจารณาความสัมพันธ์  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

ความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนเป็นแผนภาพเวกเตอร์ได้ดังนี้



จากรูป และกฎของ cosine

$$v_{A/B}^2 = v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos 135^\circ$$

$$v_{A/B}^2 = 500^2 + 500^2 - 2(500)(500) \cos 135^\circ$$

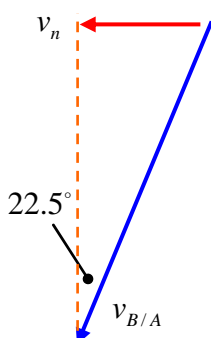
$$v_{A/B} = 923.88 \text{ km/h} \quad \text{Ans}$$

$v_n$  คือส่วนประกอบของ  $v_{A/B}$  ในทิศทางตั้งฉากกับ  $v_A$

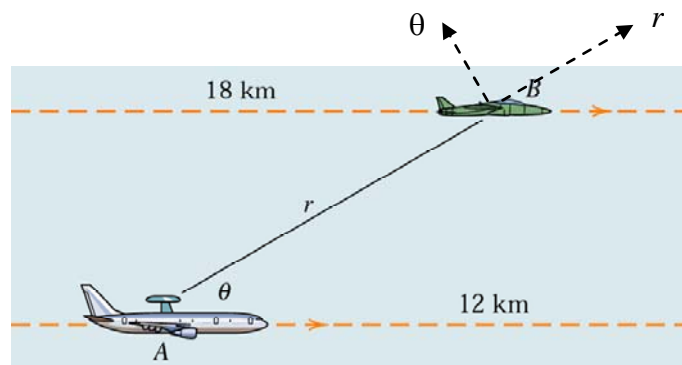
จากรูปจะได้

$$v_n = v_{B/A} \sin 22.5^\circ$$

$$v_n = 923.88 \sin 22.5^\circ = 353.55 \text{ km/h} \quad \text{Ans}$$



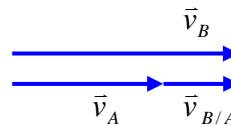
**2/204** The aircraft *A* with radar detection equipment is flying horizontally at an altitude of 12 km and is increasing its speed at the rate of 1.2 m/s each second. Its radar locks onto an aircraft *B* flying in the same direction and in the same vertical plane at an altitude of 18 km. If *A* has a speed of 1000 km/h at the instant when  $\theta = 30^\circ$ , determine the values of  $\dot{r}$  and  $\ddot{\theta}$  at this same instant if *B* has a constant speed of 1500 km/h. [Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.2/204]



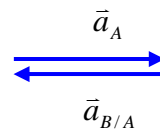
**วิธีทำ** โจทย์กำหนดให้  $v_A = 1000 \text{ km/h}$ ,  $a_A = 1.2 \text{ m/s}^2$   
 $v_B = 1500 \text{ km/h}$ , constant  
 $\theta = 30^\circ$

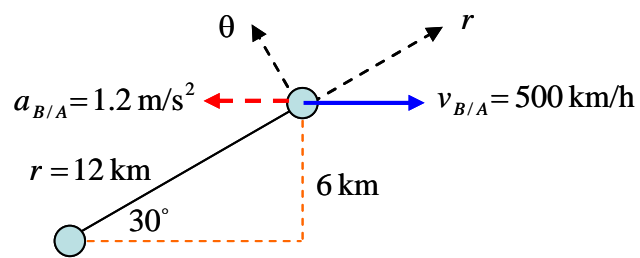
พิจารณาสูตร  $r$ - $\theta$   $\left. \begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned} \right\}$  ต้องการหา  $\dot{r}$  และ  $\ddot{\theta}$  จำเป็นต้องรู้  $a$  ในทิศทาง  $r$ - $\theta$  ก่อน สำหรับ  $a_r$  และ  $a_\theta$  นั้นเป็นความเร่งที่สังเกตได้จากเครื่องบิน *A* จึงเป็นความเร่งสัมพัทธ์นั่นเอง

พิจารณาความเร็ว  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$   
 $1500 = 100 + v_{B/A}$   
 $v_{B/A} = 500 \text{ km/h}$



พิจารณาความเร่ง  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$   
 $0 = 1.2 + a_{B/A}$   
 $a_{B/A} = -1.2 \text{ m/s}^2$





จากรูป  $v_r = 500 \cos 30^\circ = 433.0127 \text{ km/h}$

$$v_\theta = -500 \sin 30^\circ = -250 \text{ km/h}$$

$$v_r = \dot{r} \longrightarrow \dot{r} = 433.0127 \text{ km/h} = 120.2813 \text{ m/s}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{-250}{3.6} \left( \frac{1}{12000} \right) = -0.00579 \text{ m/s}$$

$$a_r = -1.2 \cos 30^\circ = -1.0392 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = 1.2 \sin 30^\circ = 0.6 \text{ m/s}^2$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \longrightarrow -1.0392 = \ddot{r} - (12 \times 10^3)(-0.00579)^2$$

$$\ddot{r} = -0.6369 \text{ m/s}^2 \quad \underline{\text{Ans}}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \longrightarrow 0.6 = (12 \times 10^3)\ddot{\theta} + 2(120.2813)(-0.00579)$$

$$\ddot{\theta} = 1.6607 \times 10^{-4} \text{ rad/s}^2 \quad \underline{\text{Ans}}$$