

## พลศาสตร์ (Dynamics)

### บทที่ 3 จลน์ศาสตร์ของอนุภาค

#### 3/1 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

จลน์ศาสตร์เป็นการศึกษาผลของแรงที่ไม่สมดุลส่งผลให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ ปัญหาทางจลน์ศาสตร์นั้นสามารถแก้ได้ 3 วิธี ได้แก่ 1) การพิจารณาความสัมพันธ์ของมวล-แรง-ความเร่ง 2) การใช้วิธีงานและพลังงาน และ 3) การใช้วิธีอิมพัลส์และโมเมนตัม ในที่นี้จะกล่าวถึงเพียงวิธีแรกคือการใช้ความสัมพันธ์ของมวล-แรง-ความเร่ง ตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตันเท่านั้น กฎข้อที่ 2 ของนิวตันแสดงได้โดยสมการที่ (1)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

โดย  $\sum \vec{F}$  คือแรงลัพธ์ที่กระทำกับวัตถุ มีหน่วยเป็นนิวตัน N,  $m$  คือมวลของวัตถุ มีหน่วยเป็น kg, และ  $\vec{a}$  คือความเร่งของวัตถุ มีหน่วยเป็น  $\text{m/s}^2$

ปัญหาจลน์ศาสตร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท

1. ปัญหาที่สามารถหาความเร่งได้จากการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ และนำความเร่งที่ได้ไปคำนวณแรง
2. ปัญหาที่ทราบแรง โดยแรงจะเป็นแรงคงที่หรือเป็นฟังก์ชันของตัวแปรการเคลื่อนที่อื่นก็ได้ และนำแรงที่ได้ไปคำนวณหาค่าความเร่ง

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุสามารถใช้วิธีการที่เรียนมาแล้วในบทที่ 2 มาคำนวณหาการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นได้ โดยการเคลื่อนที่อาจเป็นการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง หรือการเคลื่อนที่แนวโค้งก็ได้ เนื่องจากการวิเคราะห์ในบทนี้จำเป็นต้องทราบแรงทั้งหมดที่กระทำกับวัตถุ ดังนั้นจึงต้องวาด Free body diagram ก่อนการวิเคราะห์เสมอ

#### 3/2 จลน์ศาสตร์กรณีการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

ในกรณีนี้จะสามารถเลือกตั้งแกนพิกัดให้ตรงกับทิศทางการเคลื่อนที่ได้ ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่จะเป็นดังแสดงในสมการ (2) ทิศทางอื่นซึ่งไม่มีการเคลื่อนที่จะอยู่ในสภาวะสมดุล

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \quad (2)$$

อย่างไรก็ตามอาจไม่จำเป็นที่จะต้องตั้งแกนพิกัดให้ตรงกับทิศทางการเคลื่อนที่ก็ได้ ในกรณีนี้จะมีแรงและความเร่งทั้ง 3 ทิศทาง ดังแสดงในสมการ (3)

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z \quad (3)$$

แรงและความเร่งลัพธ์สามารถหาได้จากสมการ (4) และ (5) ดังนี้

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (4)$$

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}, \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (5)$$

### 3/3 จลน์ศาสตร์กรณีการเคลื่อนที่ในแนวโค้ง

เนื่องจากการเคลื่อนที่แนวโค้ง วิธีการพิจารณาจึงใช้ระบบพิกัดต่างๆ ตามที่เรียนมาในบทที่ 2 ดังนี้

1. ระบบพิกัดฉาก  $\sum F_x = ma_x$ ,  $\sum F_y = ma_y$  (6)

โดย  $a_x = \ddot{x}$  และ  $a_y = \ddot{y}$

2. พิกัด n-t  $\sum F_n = ma_n$ ,  $\sum F_t = ma_t$  (7)

โดย  $a_n = \rho\dot{\beta}^2 = v^2/\rho$  และ  $a_t = \dot{v}$

3. พิกัด r- $\theta$   $\sum F_r = ma_r$ ,  $\sum F_\theta = ma_\theta$  (8)

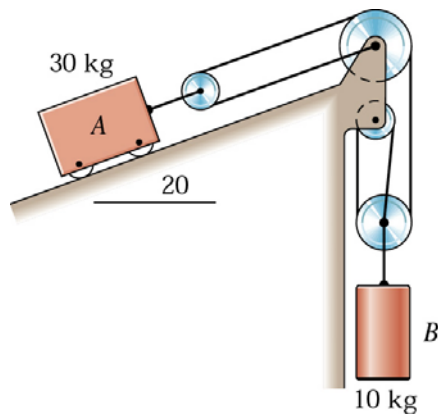
โดย  $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$  และ  $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

### 3/4 แนวทางการคำนวณปัญหาจลศาสตร์ของอนุภาค

ปัญหาจลศาสตร์ส่วนใหญ่มีแนวทางการคำนวณเป็นลำดับขั้นดังต่อไปนี้

- เขียน FBD ของวัตถุที่สนใจทุกชิ้น และเขียนแกนพิกัดที่เหมาะสม
- เขียนสมการการเคลื่อนที่  $\sum F = ma$  โดยใช้สมการความเร่งที่เหมาะสมกับระบบพิกัดที่เลือก
- ในกรณีปัญหาที่ทราบแรงทั้งหมดจากสมการในขั้นที่ 2 จะสามารถหาค่าความเร่งได้ และจากความเร่งจะสามารถหาค่า ความเร็ว และการขจัดต่อไปตามสมการการเคลื่อนที่ที่ได้เรียนมาแล้วในบทที่ 2
- ในกรณีที่ทราบข้อมูลการเคลื่อนที่ เช่นการขจัด หรือความเร็ว จะสามารถหาความเร่งในจุดที่ต้องการคำนวณได้ตามวิธีการที่ได้เรียนมาแล้วในบทที่ 2 เมื่อได้ความเร่งจึงนำไปหาแรงได้จากสมการในขั้นที่ 2
- ในกรณีที่มีวัตถุหลายชิ้นแต่ถูกบังคับให้เคลื่อนที่สัมพันธ์กัน ต้องหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุให้ได้ก่อน ใช้ความสัมพันธ์นี้ร่วมกับสมการการเคลื่อนที่ในขั้นที่ 2 จะสามารถหาค่าที่ต้องการทราบ (แรง ความเร่ง ฯลฯ) ได้
- กรณีมีแรงเสียดทาน และมีวัตถุที่จะพิจารณามากกว่า 1 ก้อน ให้สมมุติก่อนว่าวัตถุจะติดกันไป หรือวัตถุเกิดการไถลไม่ติดกัน 1) ถ้าวัตถุติดกันไป-วัตถุทุกชิ้นต้องมีความเร่งเท่ากัน และมีแรงเสียดทานแต่ละพื้นผิวน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด 2) ถ้าวัตถุไม่ติดกัน-วัตถุแต่ละชิ้นจะมีความเร่งต่างกัน และแรงเสียดทานจะมีค่าเท่ากับแรงเสียดทานจลน์

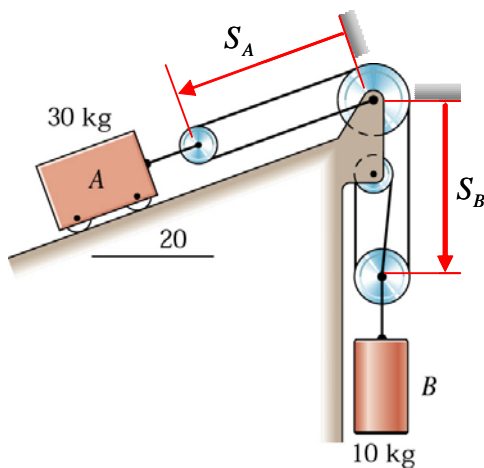
เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์



3/27 From the figure, neglect all friction and the mass of the pulleys and determine the accelerations of bodies A and B upon release from rest .

[Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.3/27]

**วิธีทำ** เนื่องจากมวล A และมวล B ไม่ได้ต่อกันแบบยึดแน่น เมื่อเคลื่อนที่ไปมวลทั้งสองก้อนจึงอาจเคลื่อนที่ด้วยความเร่งที่ไม่เท่ากันได้ ดังนั้นจึงต้องหาความสัมพันธ์ของความเร่งของมวลทั้งสองก้อนเสียก่อน



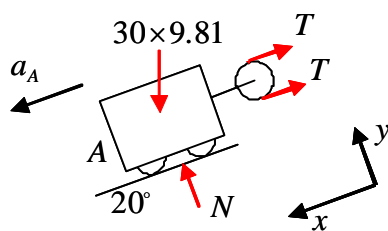
พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของมวล A และมวล B จะพบว่าการเคลื่อนที่ของมวล A และมวล B สามารถแทนได้ด้วยระยะ  $S_A$  และ  $S_B$  ซึ่งวัดจากจุดศูนย์กลางของรอก ดังแสดงในรูป จุดที่ใช้อ้างอิงในการวัดระยะ ต้องเป็นจุดที่หยุดนิ่งไม่เคลื่อนที่เท่านั้น

เนื่องจากความยาวของเชือก L ต้องมีค่าคงที่ ดังนั้น

$$2S_A + 3S_B + \text{Constant} = L$$

$$2\dot{S}_A + 3\dot{S}_B = 0$$

$$2\ddot{S}_A + 3\ddot{S}_B = 0 \longrightarrow 2a_A + 3a_B = 0 \quad (1)$$



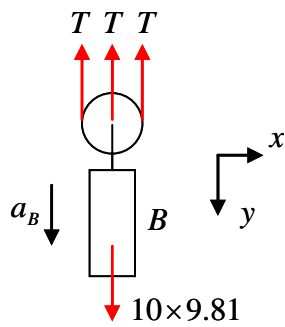
พิจารณา FBD ของวัตถุ A

$$[\sum F_y = 0] \quad N - 30(9.81) \cos 20^\circ = 0$$

$$N = 276.5515 \text{ N}$$

$$[\sum F_x = ma_x]$$

$$30(9.81) \sin 20^\circ - 2T = 30a_A \quad (2)$$



พิจารณา FBD ของวัตถุ B

$$[\sum F_y = ma_y]$$

$$10(9.81) - 3T = 10a_B \quad (3)$$

ระบบสมการ (1)-(3) มีตัวแปร 3 ตัวคือ  $a_A, a_B, T$

แก้ระบบสมการ (1)-(3) จะได้

$$a_A = 1.024 \text{ m/s}^2 \quad \swarrow$$

$$a_B = -0.6824 \text{ m/s}^2 \quad \downarrow$$

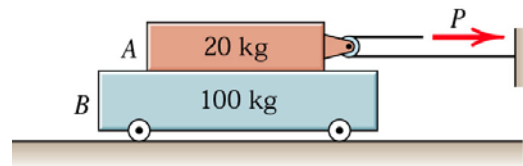
$$T = 34.97 \text{ N}$$

$$\therefore a_B = 0.6824 \text{ m/s}^2 \quad \uparrow$$

} Ans

Note การตั้งแกน x-y และกำหนดทิศทาง+ ของความเร็ว  $a_A$  และ  $a_B$  ต้องสอดคล้องกับการกำหนดทิศทางบวกของ  $S_A$  และ  $S_B$  ไม่เช่นนั้นความสัมพันธ์ในสมการที่ (1) จะไม่สอดคล้องกับสมการที่ (2) และ (3)

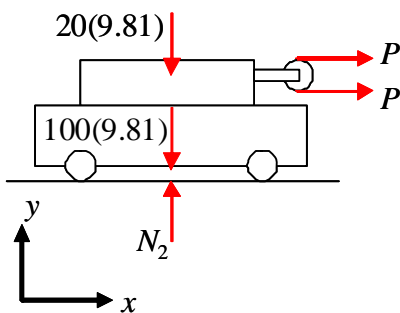
**3/23** If the coefficients of static and kinetic friction between the 20-kg block A and the 100-kg cart B are both essentially the same value of 0.5, determine the acceleration of each part for (a)  $P = 60$  N and (b)  $P = 40$  N. [Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.3/23]



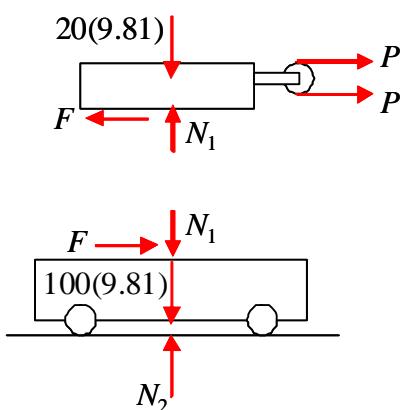
**วิธีทำ** จากรูปเมื่อดึงเชือกด้วยแรง  $P$  จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่ที่เป็นไปได้กรณีใดกรณีหนึ่ง ดังต่อไปนี้

- มวล A และ B ติดกัน จึงเคลื่อนที่ไปด้วยกันด้วยความเร่งเท่ากัน และเมื่อพิจารณาถึงแรงเสียดทานระหว่าง A และ B จะพบว่าแรงเสียดทานระหว่างมวลทั้งสองก้อนต้องมีค่าน้อยกว่าค่าแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด
- มวล A และ B เกิดการไถลไม่ติดกัน กรณีนี้ความเร่งของมวลก้อน A และก้อน B จะไม่เท่ากัน และขนาดแรงเสียดทานระหว่างมวลทั้งสองก้อนจะมีค่าเท่ากับแรงเสียดทานจลน์

**FBD รวม 2 ก้อน**



**FBD แยกก้อน**



**(a)  $P = 60$  N**

สมมุติให้มวลทั้งสองก้อนติดกันไป ตามกรณีที่ 1 คิด FBD รวมทั้ง 2 ก้อน

$$[\sum F_y = 0] \quad N_2 - 20(9.81) - 100(9.81) = 0$$

$$N_2 = 1177.2 \text{ N}$$

$$[\sum F_x = ma_x] \quad 2P = (m_A + m_B)a$$

$$2(60) = (20 + 100)a$$

$$a = 1 \text{ m/s}^2$$

ตรวจว่าความเร่งที่ได้มาเป็นไปได้หรือไม่ โดยคำนวณแยกทีละก้อน

**มวล A**

$$[\sum F_y = 0] \quad N_1 - 20(9.81) = 0$$

$$N_1 = 196.2 \text{ N}$$

$$[\sum F_x = ma_x] \quad 2P - F = m_A a$$

$$2(60) - F = 20(1)$$

$$F = 100 \text{ N}$$

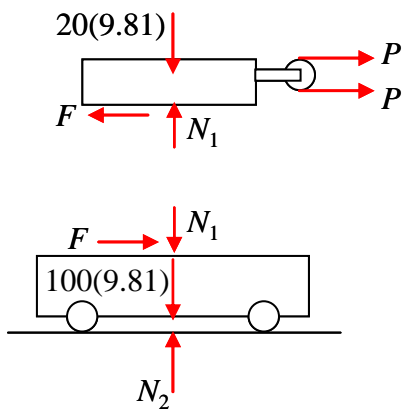
ตรวจสอบกับค่าแรงเสียดทานสถิตสูงสุดที่เป็นไปได้

$$F_{\max} = \mu_s N_1 = 0.5(196.2) = 98.1 \text{ N}$$

$F = 100 \text{ N} > F_{\max} \rightarrow$  เป็นไปได้ แสดงว่าออกแรง 60 N มวลทั้งสองต้องเกิดการไถล (ไม่ได้เคลื่อนที่ติดกันเป็นชิ้นเดียว) ดังนั้นไม่สามารถคิดรวมเป็นก้อนเดียวได้ เพราะความเร่งแต่ละก้อนไม่เท่ากัน

เนื่องจากมวลทั้งสองก้อนเกิดการไถล แรงเสียดทานระหว่างมวลทั้งสองก้อนจะมีค่าเท่ากับแรงเสียดทานจลน์

FBD แยกก้อน



$$F = \mu_k N_1 = 0.5(196.2) = 98.1 \text{ N}$$

มวล A

$$[\sum F_x = ma_x] \quad 2P - F = m_A a_A$$

$$2(60) - 98.1 = 20a_A$$

$$a_A = 1.095 \text{ m/s}^2 \quad \underline{\text{Ans}}$$

มวล B

$$[\sum F_y = 0] \quad N_2 - N_1 - 100(9.81) = 0$$

$$N_2 = 1177.2 \text{ N}$$

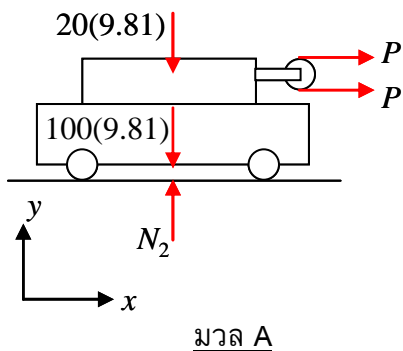
$$[\sum F_x = ma_x] \quad F = m_B a_B$$

$$98.1 = 100a_B \rightarrow a_B = 0.981 \text{ m/s}^2 \quad \underline{\text{Ans}}$$

(a)  $P = 40 \text{ N}$

สมมุติให้มวลทั้งสองก้อนติดกันไป คิด FBD รวมทั้ง 2 ก้อน

FBD รวม 2 ก้อน



$$[\sum F_x = ma_x] \quad 2P = (m_A + m_B)a$$

$$2(40) = (20 + 100)a$$

$$a = 0.6667 \text{ m/s}^2$$

ตรวจสอบว่าความเร่งที่ได้มาเป็นไปได้หรือไม่ โดยคำนวณแยกทีละก้อน (ความเร่งแต่ละก้อนต้องเท่ากัน และแรงเสียดทานระหว่างกัน ต้องน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด)

มวล A

$$\begin{aligned} [\sum F_x = ma_x] \quad 2P - F &= m_A a \\ 2(40) - F &= 20(0.6667) \\ F &= 66.6667 \text{ N} < F_{\max} \end{aligned}$$

เนื่องจากค่าแรงเสียดทานที่คำนวณมาได้ มีค่าน้อยกว่าความแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด ดังนั้นการสมมุติถูกต้องแล้ว

มวล B

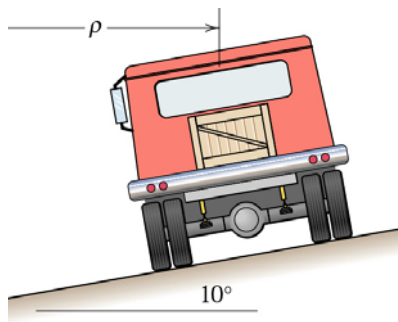
ตรวจสอบความเร่งของมวล B

$$\begin{aligned} [\sum F_x = ma_x] \quad F &= m_B a_B \\ 66.6667 &= 100a_B \longrightarrow a_B = 0.6667 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

ความเร่งรวม เท่ากับความเร่งของมวล A และความเร่งของมวล B จริง  
ดังนั้น ความเร่งในกรณีนี้

$$a_A = a_B = 0.6667 \text{ m/s}^2$$

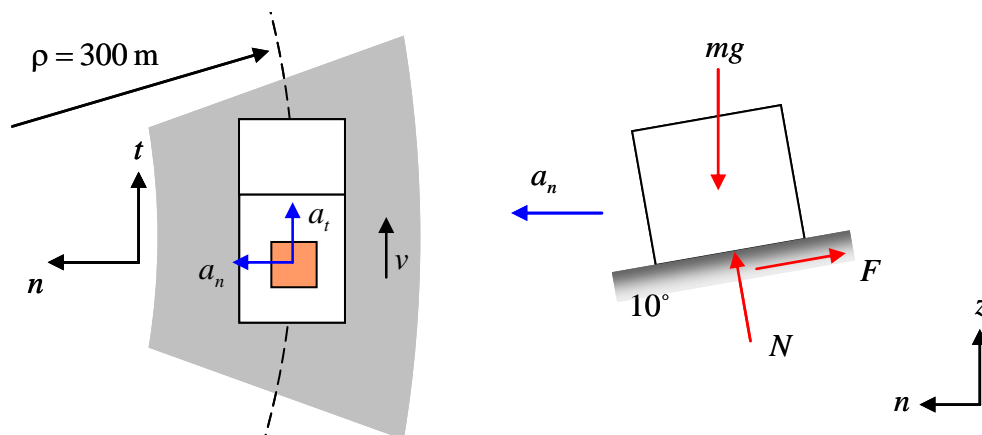
Ans



**3/69** A flatbed truck going 100 km/h rounds a horizontal curve of 300-m radius inwardly banked at  $10^\circ$ . The coefficient of static friction between the truck bed and the 200-kg crate it carries is 0.70. Calculate the friction force  $F$  acting on the crate.

[Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.3/69]

**วิธีทำ** เขียน FBD ของกล่องบนรถ



รถวิ่งด้วยความเร็วคงที่  $a_t = 0$

ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง  $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \left(\frac{100}{3.6}\right)^2 \frac{1}{300} \text{ m/s}^2$

$$\left[\sum F_z = 0\right] \quad N \cos 10^\circ + F \sin 10^\circ - 200(9.81) = 0 \quad (1)$$

$$\left[\sum F_n = ma_n\right] \quad N \sin 10^\circ - F \cos 10^\circ = 200 \left(\frac{100}{3.6}\right)^2 \frac{1}{300} \quad (2)$$

แก้สมการ (1) และ (2) ได้  $N = 2021.518 \text{ N}$

$$F = -165.891 \text{ N}$$

$$F = 165.891 \text{ N} \leftarrow$$

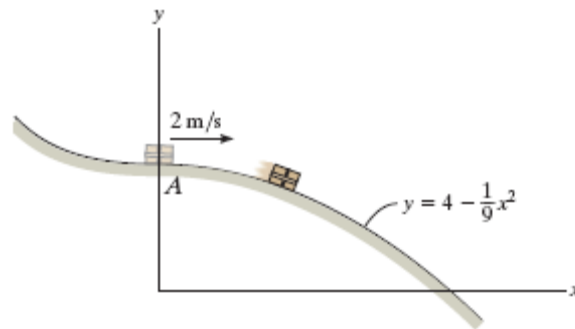
Ans

Note สามารถตรวจสอบค่าแรงเสียดทานสถิตมากที่สุดได้จาก

$$F_{\max} = \mu_s N = 0.7(2021.518) = 1415.06 \text{ N}$$

จะพบว่าแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด จึงไม่เกิดการไถล ดังนั้นความเร่งของกล่องจึงเท่ากับความเร่งของตัวรถ

**13/77** The 35-kg box has a speed of 2 m/s when it is at A on the smooth ramp. If the surface is in the shape of a parabola, determine the normal force on the box at the instant  $x = 3$  m. Also, what is the rate of increase in its speed at this instant. [Engineering Mechanics Dynamics 11<sup>th</sup> edition, R.C.Hibbeler, prob.13-77]



**วิธีทำ** ในข้อนี้กำหนดการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อเริ่มเคลื่อนที่ (วัตถุอยู่ที่ A) และให้หาแรงเมื่อวัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง  $x = 3$  ขั้นตอนการทำจะคล้ายกับตัวอย่างก่อนหน้า คือต้องใช้สมการการเคลื่อนที่หาความเร็วที่ตำแหน่งที่ต้องการให้ได้ก่อน เนื่องจากในข้อนี้ลักษณะเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นสมการคณิตศาสตร์ จึงสามารถใช้สมการนี้หาความสัมพันธ์ของความเร็ว และความเร่งโดยทำได้ดังนี้

จาก  $y = 4 - \frac{1}{9}x^2$

Diff. เทียบเวลา  $\dot{y} = -\frac{2}{9}x\dot{x} \longrightarrow v_y = -\frac{2}{9}xv_x$

Diff. เทียบเวลา  $\ddot{y} = -\frac{2}{9}\dot{x}^2 - \frac{2}{9}x\ddot{x} = -\frac{2}{9}(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) \longrightarrow a_y = -\frac{2}{9}(v_x^2 + xa_x) \quad (1)$

และ  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9}x$

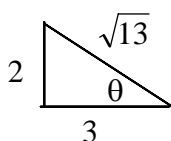
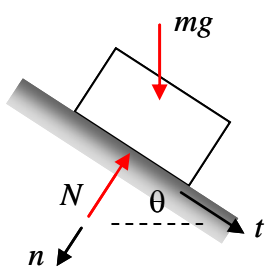
พิจารณาที่จุด  $x = 3$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9}x \Big|_{x=3} = -\frac{2}{3}$$

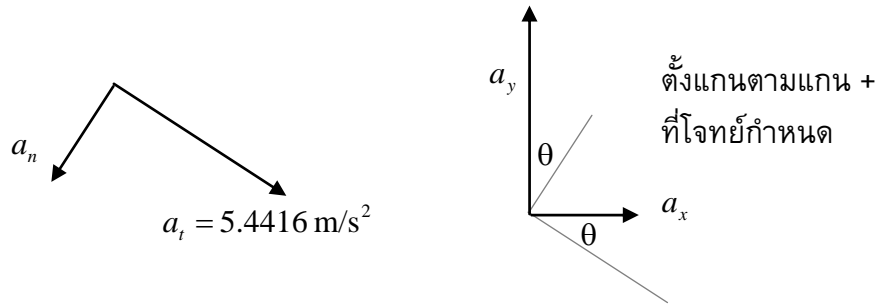
$$[\sum F_t = ma_t] \quad mg \sin \theta = ma_t$$

$$a_t = g \sin \theta = 9.81 \left( \frac{2}{13} \right) = 5.4416 \text{ m/s}^2 \quad \underline{\text{Ans}}$$

$$[\sum F_n = ma_n] \quad mg \cos \theta - N = ma_n \quad (2)$$



ในขณะนี้ทราบความสัมพันธ์ความเร่ง  $a_x$  และ  $a_y$  และค่า  $a_t$  จะสามารถหาค่า  $a_n$  ได้ดังนี้



ความเร่งที่แสดงในรูปเป็นความเร่งที่ตำแหน่ง  $x = 3$  ทั้งคู่ ความเร่งทั้งสองจึงต้องมีขนาดเท่ากัน ในรูปเพียงแต่แสดงค่าโดยพิถีพิถันเท่านั้น

จากรูปจะได้

$$a_x \cos \theta - a_y \sin \theta = a_t \longrightarrow a_x \frac{3}{\sqrt{13}} - a_y \frac{2}{\sqrt{13}} = 5.4416 \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

$$-a_x \sin \theta - a_y \cos \theta = a_n \longrightarrow -a_x \frac{2}{\sqrt{13}} - a_y \frac{3}{\sqrt{13}} = a_n \quad (4)$$

จาก (1) จะพบว่าหากทราบค่าความเร็วที่จุด  $x = 3$  แล้วจะสามารถหาความสัมพันธ์ของ  $a_x$  และ  $a_y$  ซึ่งเมื่อนำไปแทนในสมการ (3) และ (4) จะสามารถหาค่า  $a_n$  ได้

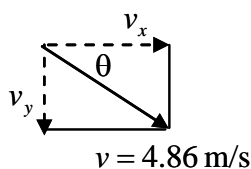
$$a_y = -\frac{2}{9}(v_x^2 + xa_x) \quad (1)$$

หาความเร็วจุด  $x = 3$  เนื่องจากระบบนี้ไม่มีแรงเสียดทาน จึงไม่มีการสูญเสียพลังงาน

$$E_A = E_{x=3}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}2^2 + 9.81(4-3) = \frac{1}{2}v^2 \longrightarrow v = 4.86 \text{ m/s}$$



จากรูปจะได้  $v_x = v \cos \theta = 4.86 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 4.0438 \text{ m/s}$

แทนค่า  $v_x$  ในสมการ (1) และแทนค่า  $x = 3$  จะได้

$$a_y = -\frac{2}{9}(4.0438^2 + 3a_x) \quad (5)$$

แก้สมการ (3) และ (5) จะได้  $a_x = 2.8505 \text{ m/s}^2$

$$a_y = -5.5342 \text{ m/s}^2$$

แทนค่า  $a_x$  และ  $a_y$  ลงในสมการ (4) จะหา  $a_n$  ได้โดย

$$a_n = 3.0235 \text{ m/s}^2$$

แทนค่า  $a_n$  ลงในสมการ (2)

$$35(9.81) \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - N = 35(3.0235)$$

$$N = 179.86 \text{ N}$$

Ans

หมายเหตุ ข้อนี้สามารถหาค่า  $a_n$  ได้อีกวิธี โดยการหารัศมีความโค้งของเส้นทางการเคลื่อนที่ดังนี้

รัศมีความโค้งของเส้นโค้งหาจาก

$$\rho_{xy} = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}$$

สมการเส้นโค้ง	$y = 4 - \frac{1}{9}x^2$	}	ที่ $x = 3$
	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9}x$		$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9} \cdot 3 = -\frac{2}{3}$
	$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}$		$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}$

แทนค่าในสมการหารัศมีความโค้ง

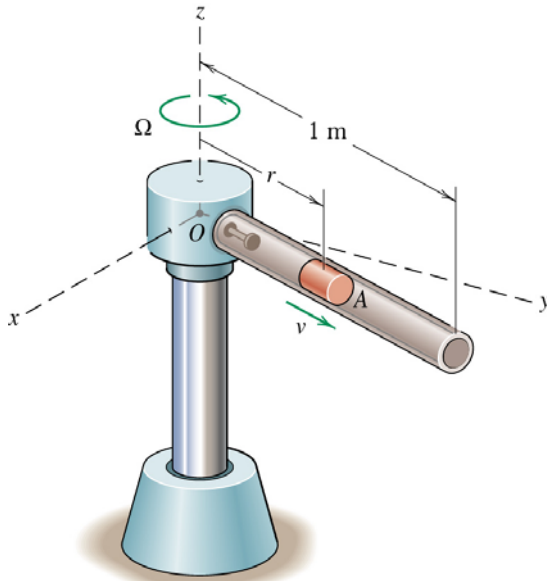
$$\rho_{xy} = \frac{\left[ 1 + \left( -\frac{2}{3} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| -\frac{2}{9} \right|} = 7.812$$

หา  $a_n$  จาก

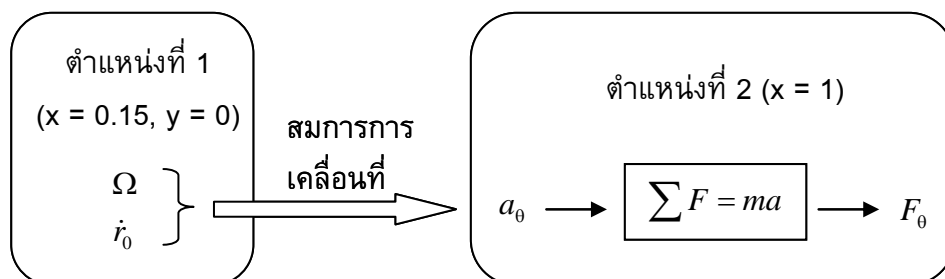
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4.86^2}{7.812} = 3.0235 \text{ m/s}^2$$

จะพบว่า  $a_n$  มีค่าเท่ากับการหาจากวิธีแรก

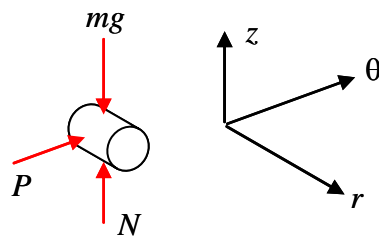
**3/83** A small 180-g slider *A* moves without appreciable friction in the hollow tube, which rotates in a horizontal plane with a constant speed  $\Omega = 7$  rad/s. The slider is launched with an initial speed  $\dot{r}_0 = 20$  m/s relative to the tube at the inertial coordinate  $x = 150$  mm and  $y = 0$ . Determine the magnitude  $P$  of the horizontal force exerted on the slider by the tube just before the slider exits the tube. [Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.3/83]



**วิธีทำ** ในข้อนี้กำหนดการเคลื่อนที่ของวัตถุที่สภาวะเริ่มต้นเคลื่อนที่ (วัตถุอยู่ที่  $x = 0.15$ ,  $y = 0$ ) และให้หาแรงที่สภาวะก่อนวัตถุ *A* จะหลุดออกจากท่อ ( $x = 1$ ) เพื่อหาแรงที่สภาวะก่อนออกจากท่อ จึงต้องทราบความเร็วก่อนออกจากท่อก่อน โดยความเร็วก่อนออกจากท่อหาได้โดยสมการการเคลื่อนที่ โดยใช้ข้อมูลจากการเคลื่อนที่ที่โจทย์กำหนดให้  
ขั้นตอนการทำแสดงดังแผนภาพดังนี้



FBD



เนื่องจากจำเป็นต้องหาค่า  $a_\theta$  ที่ตำแหน่งก่อนวัตถุออกจากท่อ ดังนั้นจึงพิจารณาสมการความเร่งในทิศทาง  $r$ - $\theta$  ก่อน

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\Omega^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\dot{r}\Omega \quad (\dot{\theta} = \Omega = \text{const.})$$

จากสมการจะได้ว่า ถ้าทราบค่า  $\dot{r}$  ที่ตำแหน่งก่อนวัตถุถูกปล่อยจากท่อจะสามารถหาค่า  $a_\theta$  ได้

$$\begin{aligned} [\sum F_r = ma_r] \quad 0 &= m(\ddot{r} - r\Omega^2) \\ \ddot{r} &= r\Omega^2 \end{aligned} \quad (1)$$

จากกฎลูกโซ่จะได้  $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \dot{r} \cdot \frac{d\dot{r}}{dr}$

แทนความสัมพันธ์นี้ลงในสมการ (1)

$$\dot{r} = \dot{r} \cdot \frac{d\dot{r}}{dr} = r\Omega^2 \quad \longrightarrow \quad r d\dot{r} = r\Omega^2 dr$$

จากความสัมพันธ์นี้จะสามารถหาค่า  $\dot{r}$  ที่ตำแหน่งก่อนวัตถุออกจากท่อได้

$$\int_{20}^{\dot{r}} r d\dot{r} = \int_{0.15}^1 r\Omega^2 dr$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} \Big|_{20}^{\dot{r}} = \Omega^2 \frac{r^2}{2} \Big|_{0.15}^1$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{20^2}{2} = 7^2 \left( \frac{1^2}{2} - \frac{0.15^2}{2} \right)$$

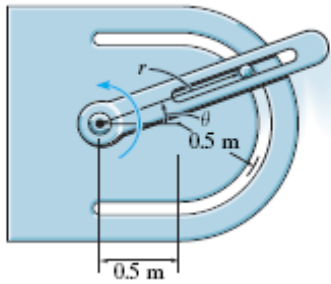
$$\dot{r} = 21.1636 \text{ m/s}$$

จะได้  $a_\theta = 2\dot{r}\Omega = 2(21.1636)(7)$

$$[\sum F_\theta = ma_\theta] \quad P = ma_\theta = 0.18(2)(21.1636)(7) = 53.3 \text{ N}$$

Ans

- ข้อสังเกต 1. ในข้อนี้แม้จะไม่มีแรงกระทำในแนว  $r$  และ  $a_r = 0$  แต่ก็ยังมีค่า  $\ddot{r}$  ซึ่งแสดงว่าผู้สังเกตที่หมุนไปกับท่อจะมองเห็นวัตถุเคลื่อนที่ออกจากท่อด้วยความเร่ง  $\ddot{r}$
2. สมการ  $r\dot{d}\dot{r} = \ddot{r}dr$  เทียบได้กับสมการ  $v dv = a ds$



**13/90** The 5-N ( $\approx 0.5$ -kg) particle is guided along the circular path using the slotted arm guide. If the arm has an angular velocity  $\dot{\theta} = 4$  rad/s and an angular acceleration  $\ddot{\theta} = 8$  rad/s<sup>2</sup> at the instant  $\theta = 30^\circ$ , determine the force of the guide on the particle. Motion occurs in the *horizontal plane*.

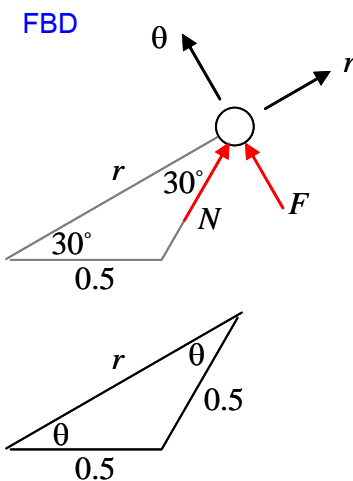
[Engineering Mechanics Dynamics 11<sup>th</sup> edition, R.C.Hibbeler, prob.13-90]

**วิธีทำ** ค่าต่างๆ ที่โจทย์กำหนดมีดังนี้

$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{\theta} = 8 \text{ rad/s}^2$$

$$\theta = 30^\circ$$



$$\left[ \sum F_r = ma_r \right] \quad N \cos 30^\circ = \frac{5}{9.81} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$\left[ \sum F_\theta = ma_\theta \right] \quad N \sin 30^\circ + F = \frac{5}{9.81} (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) ต้องหาค่า  $\dot{r}$ ,  $\ddot{r}$  ให้ได้เสียก่อน จึงจะหาแรง N และ แรง F ได้

จากรูปจะได้

$$\text{ที่ } \theta = 30^\circ$$

$$r = 2(0.5) \cos \theta = \cos \theta$$

$$\dot{r} = (-\sin \theta) \dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = (-\cos \theta) \dot{\theta}^2 - (\sin \theta) \ddot{\theta}$$

$$r = \cos 30^\circ = 0.866$$

$$\dot{r} = (-\sin 30)4 = -2$$

$$\ddot{r} = (-\cos 30)4^2 - (\sin 30)8 = -17.8564$$

แทนในสมการ (1) และ (2)

$$N \cos 30^\circ = \frac{5}{9.81} (-17.8564 - 0.866(16)) \rightarrow N = -18.6638 \text{ N}$$

$$N = 18.6638 \text{ N} \quad \swarrow$$

$$(-18.6638) \sin 30^\circ + F = \frac{5}{9.81} (0.866(8) + 2(-2)(4))$$

$$F = 4.708 \text{ N}$$

Ans