พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 5 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

5/1 บทนำ

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาค และได้ทราบถึงระบบพิกัด และสมการที่ใช้วิเคราะห์การเคลื่อนที่แต่ละรูปแบบมาแล้ว สำหรับการเคลื่อนที่ของอนุภาค หรือวัตถุอื่นใดที่ถูกพิจารณาเป็นอนุภาค การเคลื่อนที่ของตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งของอนุภาคก็เพียงพอที่จะบอกการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งก้อน สำหรับในบทนี้วัตถุที่เราพิจารณาจะมีขนาดใหญ่ขึ้นเทียบกับเส้นทางการเคลื่อนที่ ในกรณีนี้การเคลื่อนที่ของจุดแต่ละจุดในวัตถุอาจจะไม่เท่ากัน เนื่องจากเกิดการหมุนของวัตถุขึ้น ดังนั้นในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งจึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาการเคลื่อนที่ทั้งแบบเชิงเส้น และแบบเชิงมุม

การศึกษาในบทนี้สามารถนำไปใช้วิเคราะห์การทำงานของชิ้นส่วนกลต่างๆ เช่น เฟือง ลูกเบี้ยว หรือกลไกข้อต่อต่างๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญของการศึกษาจลศาสตร์ของวัตถุแข็งเกร็ง ซึ่งจะพิจารณาผลของแรงและการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งต่อไป

วัตถุแข็งเกร็ง

วัตถุแข็งเกร็งคือวัตถุที่ระยะห่างระหว่าง 2 จุดใดๆ ในวัตถุมีค่าคงที่เสมอ นั่นคือ วัตถุแข็งเกร็งคือวัตถุที่ไม่มีการเสียรูปเมื่อมีแรงมากระทำนั่นเอง แต่ในความเป็นจริงวัตถุทุกชนิดจะต้องมีการเสียรูปเสมอเมื่อมีแรงมากระทำ หากการเสียรูปนั้นมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่อื่นของวัตถุ เราอาจจะสมมุติให้วัตถุนั้นเป็นวัตถุแข็งเกร็งได้

การเคลื่อนที่ในระนาบ

การเคลื่อนที่ในระนาบเกิดขึ้นเมื่อทุกๆ ส่วนของวัตถุเคลื่อนที่ในระนาบที่ขนานกัน หรืออาจกล่าวว่าปัญหาการเคลื่อนที่ในระนาบ เป็นการเคลื่อนที่ในสองมิตินั่นเอง การเคลื่อนที่ในระนาบสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 รูปแบบดังแสดงในรูปที่ 1

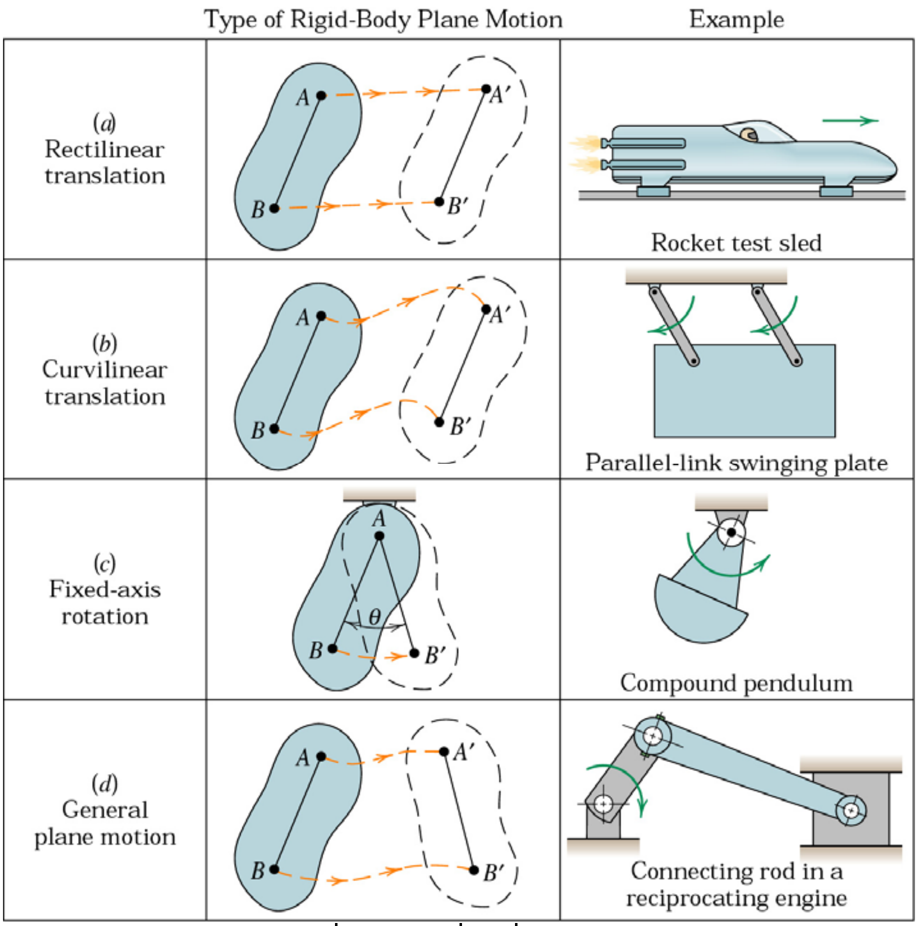
1. <u>การเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ (Translation)</u>

การเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ เป็นการเคลื่อนที่ซึ่งทุกๆ เส้นใดๆ ในวัตถุ จะเคลื่อนที่ขนานกับตำแหน่งเริ่มแรกของเส้นนั้นเสมอ การเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่จึงเป็นการเคลื่อนที่ที่ไม่มีการหมุน ตัวอย่างการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ในแนวเส้นตรง (Rectilinear translation) แสดงดังรูปที่ 1(a) ส่วนการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ในแนวเส้นโค้ง (Curvilinear translation) แสดงดังรูปที่ 1(b) ตัวอย่างด้านขวามือในรูปที่ 1(b) แสดงการเคลื่อนที่ของแผ่นกระดานที่ถูกห้อยด้วยข้อต่อขนานกัน 2 ข้อ ซึ่งการเคลื่อนที่ของแผ่นกระดานจัดเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ในแนวโค้ง เนื่องจากทุกๆ เส้นบนแผ่นกระดาน (เช่นเส้นขอบทั้งสองข้าง) วางตัวขนานกับเส้นตอนเริ่มเคลื่อนที่

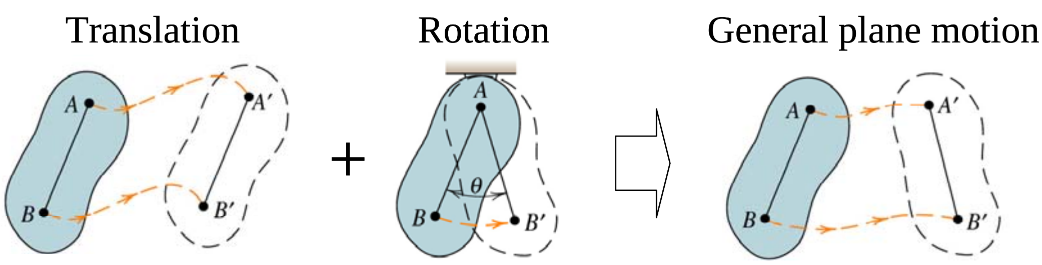
ตลอดเวลาที่ เนื่องจากการเคลื่อนที่ของจุดใดๆ ในวัตถุที่เคลื่อนที่แบบเลื่อนที่จะเหมือนกัน ดังนั้นการจึงสามารถพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรณีนี้ เป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคได้

2. <u>การเคลื่อนที่แบบหมุนรอบจุดยึด (Fixed-axis rotation)</u>

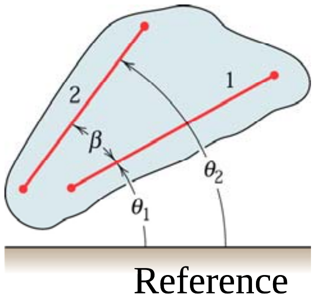
การหมุนรอบจุดยึดแสดงดังรูปที่ 1(c) จะพบว่าจุดใดๆ ในวัตถุจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบแกนหมุน และหมุนด้วยมุมที่เท่าๆ กันที่เวลาเดียวกัน



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่ในระนาบ



รูปที่ 2 การเคลื่อนที่ในระนาบแบบทั่วไป



รูปที่ 3 การหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง

3. <u>การเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ (General plane motion)</u>

การเคลื่อนที่แบบนี้เป็นการเคลื่อนที่ที่ผสมกันระหว่างการเลื่อนที่และการหมุน ดังแสดงในรูปที่ 1(d) และรูปที่ 2 ซึ่งการเคลื่อนที่ของวัตถุสามารถแบ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ในช่วงแรก และค่อยเคลื่อนที่แบบหมุนในช่วงต่อมา ตัวอย่างด้านขวามือ ในรูปที่ 1(d) แสดงการเคลื่อนที่กลไกลูกสูบ โดยการเคลื่อนที่ของข้อต่อสีฟ้าเป็นการเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ สำหรับข้อเหวี่ยงจะเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุน ส่วนกระบอกสูบจะเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่

5/2 การหมุน

พิจารณาการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งแสดงดังรูปที่ 3 การเคลื่อนที่ของเส้น 1 และเส้น 2 วัดจากจุดอ้างอิงแสดงด้วยมุม θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ โดยเส้นทั้งสองเส้นวางตัวทำมุมกัน β ความสัมพันธ์ของมุม θ_1 และ θ_2 เป็นดังนี้

$$\theta_2 = \theta_1 + \beta \tag{1}$$

เนื่องจากเป็นวัตถุแข็งเกร็งไม่มีการเสียรูป มุม β จึงมีค่าคงที่ตลอด จากสมการ (1) จะได้

$$\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1, \qquad \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1, \qquad \ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1 \tag{2}$$

ซึ่งหมายความว่าเส้นใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็งจะหมุนด้วยการขจัดเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม และความเร่งเชิงมุมเท่ากัน เมื่อกำหนดให้วัตถุหมุนโดยมีการขจัดเชิงมุมเป็น θ จะสามารถหาความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมได้จาก

ความเร็วเชิงมุม $$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \tag{3}$$

ความเร่งเชิงมุม $$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \tag{4}$$

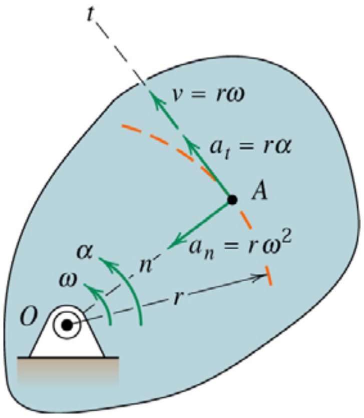
ความสัมพันธ์อื่นๆ สามารถหาได้ทำนองเดียวกับการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ดังนี้

$$vdv = ads \quad \Rightarrow \quad \omega d\omega = \alpha d\theta \text{ หรือ } \dot{\theta}d\dot{\theta} = \ddot{\theta}d\theta \tag{5}$$

<u>ข้อสังเกต</u> รูปแบบสมการที่ (3) (4) และ (5) เป็นเช่นเดียวกับการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ เพียงแต่เปลี่ยน x เป็น θ, v เป็น ω และเปลี่ยน a เป็น α

การหมุนรอบจุดยึด

การหมุนรอบจุดยึดแสดงดังรูปที่ 4 การพิจารณาสามารถทำได้โดยใช้พิกัดแบบ n-t โดยแกน n ตั้งให้ทิศทางบวกชี้เข้าสู่จุดศูนย์กลางส่วนโค้ง ซึ่งในที่นี้คือจุดที่ยึดแน่น ส่วนแกน t ตั้งให้มีทิศทางบวก ตามทิศทางการหมุน โดยใช้สมการในระบบพิกัด n-t ที่ได้ศึกษามาแล้วในบทที่ 2 จะสามารถหาความเร็ว และความเร่งได้ดังนี้



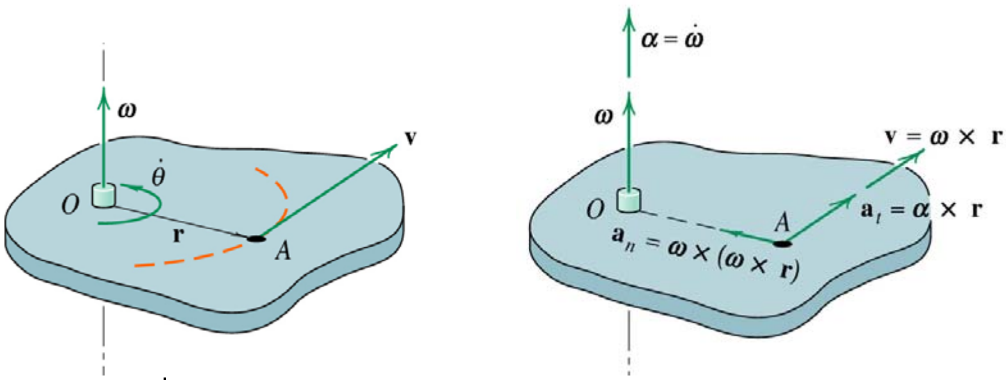
รูปที่ 4 การหมุนรอบจุดยึด

ความเร็วจุด A $v = \omega r$ (6)

ความเร่งในแนว n $a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v\omega$ (7)

ความเร่งในแนว t $a_t = r\alpha$ (8)

<u>การพิจารณาในแบบเวคเตอร์</u>



รูปที่ 5 การพิจารณาความเร็วและความเร่งของการหมุนแบบเวคเตอร์

ความเร็วเชิงมุม ϖ เป็นปริมาณเวคเตอร์ หาทิศทางได้จากกฎมือขวา โดยวางมือให้นิ้วทั้ง 4 วนตามทิศทางการหมุน จะได้ว่าทิศทางของ ϖ จะเป็นทิศทางตามการชี้ของนิ้วโป้ง ใน

รูปที่ 5(ซ้าย) แสดงทิศทางการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้น $\vec{\omega}$ จึงมีทิศพุ่งขึ้นด้านบน ความเร็วเชิงเส้น $\vec{v}$ ที่จุด A สามารถหาได้ดังนี้

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (9)$$

สำหรับความเร่งสามารถหาได้โดยหาอนุพันธ์ของความเร็วในสมการ (9) ดังนี้

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad (10)$$

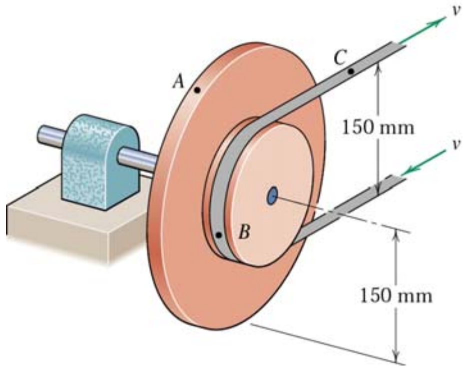
เมื่อพิจารณาทิศทางของความเร่งจากรูปที่ 5(ขวา) จะได้ว่า

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (11)$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad (12)$$

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์

5/15 The belt-driven pulley and attached disk are rotating with increasing angular velocity. At a certain instant the speed *v* of the belt is 1.5 m/s, and the total acceleration of point *A* is 75 m/s^2. For this instant determine (*a*) the angular acceleration α of the pulley and disk, (*b*) the total acceleration of point *B*, and (*c*) the acceleration of point *C* on the belt. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/15]



วิธีทำ โจทย์กำหนดความเร็ว ความเร่งที่จุดต่างๆ ดังนี้

$$v_C = 1.5\ \text{m/s} \qquad a_A = 75\ \text{m/s}^2$$

ความเร็ว v_C ของสายพานที่จุด C มีค่าเท่ากับความเร็วของสายพานที่สัมผัสกับพูลเล่ย์และความเร็วของพูลเล่ย์ที่จุดสัมผัสนั้น จากความเร็วของพูลเล่ย์จะหาความเร็วรอบหมุนของพูลเล่ย์ได้

$$[v = \omega r] \qquad 1.5 = \omega(0.15/2) \longrightarrow \omega = 20\ \text{rad/s}$$

เนื่องจากพูลเล่ย์ถือเป็นวัตถุแข็งเกร็ง ดังนั้นความเร็วเชิงมุมของพูลเล่ย์ที่ตำแหน่งใดๆ ต้องมีค่าเท่ากัน และเท่ากับ 20 rad/s

<u>พิจารณาความเร่งที่จุด A</u>

$$[a_n = \omega^2 r] \qquad a_n = \omega^2 r_A = 20^2(0.15) = 60\ \text{m/s}^2$$

$$\left[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\right] \qquad a_t = \sqrt{a^2 - a_n^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45\ \text{m/s}^2$$

$$[a_t = \alpha r] \qquad \alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{45}{0.15} = 300\ \text{rad/s}^2$$ <u>Ans</u>

ทำนองเดียวกับความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุมของพูลเล่ย์ที่ตำแหน่งใดๆ ต้องมีค่าเท่ากันเช่นกัน และมีค่าเท่ากับ 300 rad/s^2

<u>พิจารณาความเร่งที่จุด B</u>

$[a_t = \alpha r]$ $a_t = 300(0.15/2) = 22.5 \text{ m/s}^2$

$[a_n = \omega^2 r]$ $a_n = 20^2(0.15/2) = 60 \text{ m/s}^2$

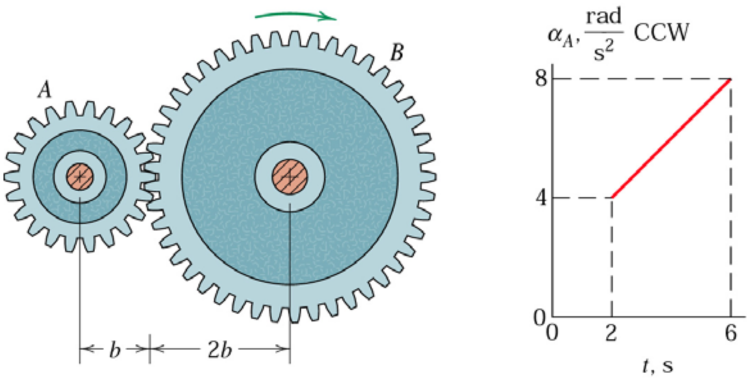
$\left[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\right]$ $a_B = \sqrt{22.5^2 + 30^2} = 37.5 \text{ m/s}^2$ <u>Ans</u>

<u>พิจารณาความเร่งที่จุด C</u>

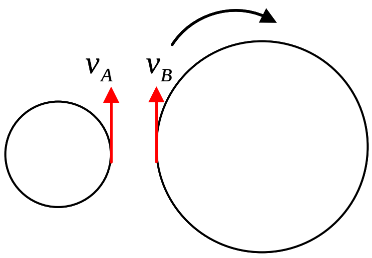
จุด C เป็นจุดบนสายพานซึ่งเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ ดังนั้นความเร่งจึงอยู่ในทิศทางของการเคลื่อนที่เท่านั้น ความเร่งนี้ต้องมีค่าเท่ากับความเร่งในแนวสัมผัส a_t ที่จุด B เพราะถ้าความเร่งในแนวสัมผัสที่ 2 จุดบนสายพานไม่เท่ากันแล้ว เมื่อเวลาผ่านไปจะทำให้ความเร็วทั้ง 2 จุดนั้นไม่เท่ากัน สายพานจะหย่อน หรือขาดได้ ด้วยเหตุผลนี้

$$a_C = (a_t)_B = 22.5 \text{ m/s}^2$$ <u>Ans</u>

5/23 The design characteristics of a gear-reduction unit are under review. Gear *B* is rotating clockwise with a speed of 300 rev/min when a torque is applied to gear *A* at time t = 2 s to give gear *A* a counterclockwise acceleration α which varies with the time for a duration of 4 seconds as shown. Determine the speed N_B of gear *B* when t = 6 s. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/23]



วิธีทำ ในโจทย์ข้อนี้บอกข้อมูลของเฟือง A และให้หาข้อมูลของเฟือง B ดังนั้นจึงจำเป็นจะต้องทราบความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของเฟือง A กับเฟือง B เสียก่อน



เฟืองขบกัน ตำแหน่งที่เฟืองขบกันต้องมีความเร็วเท่ากัน

$$v_A = v_B$$

$$\omega_A r_A = \omega_B r_B$$

$$\omega_A b = \omega_B (2b) \longrightarrow \quad \omega_A = 2\omega_B$$

เมื่อเฟือง B หมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 300 rev/min เฟือง A จึงหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 600 rev/min $= 600(\frac{2\pi}{60}) = 20\pi$ rad/s

พิจารณาเฟือง A

$$\left[\alpha = \frac{d\omega}{dt}\right]$$

$\int_{20\pi}^{\omega_A} d\omega = \int_2^6 \alpha dt$ = พื้นที่ใต้กราฟ a-t ในช่วง 2-6 วินาที

$$\omega_A - 20\pi = \frac{1}{2}(4)(4+8)$$

$$\omega_A = 20\pi + 24$$

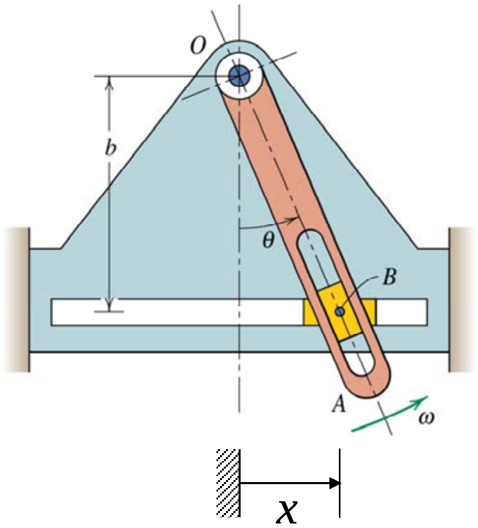
$$\omega_B = \frac{\omega_A}{2} = 10\pi + 12 = 43.4159 \text{ rad/s} \longrightarrow \quad \omega_B = 414.59 \text{ rev/min}$$ Ans

5/3 Absolute Motion

วิธีการ Absolute Motion เป็นวิธีการหาค่าการขจัด ความเร็วและความเร่ง ของจุด หรือชิ้นส่วนโดยอาศัยการสร้างความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ และการหาอนุพันธ์ของความสัมพันธ์นั้นเทียบกับเวลา พิจารณาตัวอย่างด้านล่าง

<u>ตัวอย่างการคำนวณ Absolute Motion</u>

หากกำหนดให้ชิ้นส่วน OA ในกลไกที่แสดงในรูปที่ 6 มีความเร็วเชิงมุมคงที่ ω ให้คำนวณหาความเร็วและความเร่งของหมุน B



รูปที่ 6 การเคลื่อนที่ของหมุด B ในสล๊อต

เนื่องจากต้องการหาความเร็วเชิงเส้นของหมุด B โดยทราบความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วน OA ดังนั้นจึงต้องหาความพันธ์ระหว่างมุม θ และระยะ x จากรูปจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = b\tan\theta$$

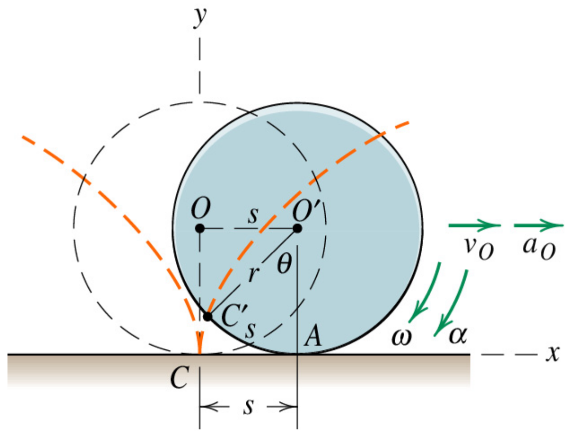
หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา $v_B = \dot{x} = b\dot{\theta}\sec^2\theta = b\omega\sec^2\theta$ <u>Ans</u>

$$a_B = \ddot{x} = b\ddot{\theta}\sec^2\theta + 2b\dot{\theta}^2\sec^2\theta\tan\theta$$

$\ddot{\theta} = 0$ เนื่องจากชิ้นส่วนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ ดังนั้น

$a_B = 2b\dot{\theta}^2\sec^2\theta\tan\theta = 2b\omega^2\sec^2\theta\tan\theta$ <u>Ans</u>

SP.5/4 A wheel of radius r rolls on a flat surface without slipping. Determine the angular motion of the wheel in terms of the linear motion of its center *O*. Also determine the acceleration of a point on the rim of the wheel as the point come into contact with the surface on which the wheel rolls. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, sample prob.5/4]



วิธีทำ รูปโจทย์แสดงการกลิ้งของล้อโดยไม่ไถล เริ่มแรกจุดศูนย์กลางล้ออยู่ที่จุด *O* และล้อสัมผัสพื้นที่จุด *C* เมื่อล้อหมุนไป จุดศูนย์กลางจะเคลื่อนไปที่ตำแหน่ง *O′* และจุดสัมผัสพื้นเปลี่ยนไปเป็นจุด *A* ส่วนจุดสัมผัสเดิม *C* เคลื่อนที่ไปที่ตำแหน่ง *C′* โดยล้อหมุนไปได้ θ

เมื่อพิจารณาระยะการเคลื่อนที่ จะพบว่าระยะที่จุดศูนย์กลางเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ *s* ซึ่งจะเท่ากับระยะจากจุด *C* ไปยังจุด *A* ด้วย ซึ่งถ้าล้อกลิ้งโดยไม่ไถลจะได้ว่าระยะจากจุด *C* ไปยังจุด *A* จะเท่ากับระยะจากจุด *C′* ไปยังจุด *A* ซึ่งเป็นความยาวส่วนโค้ง ซึ่งมีมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับมุมที่ล้อหมุนไปได้ θ ดังนั้น

$$s = \mathrm{arc}(C'A) = r\theta$$ <u>Ans</u>

หาความเร็วและความเร่งที่จุดศูนย์กลางได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} v_O &= \dot{s} = r\dot{\theta} = r\omega \\ a_O &= \ddot{s} = r\ddot{\theta} = r\alpha \end{aligned}\right\}$$ <u>Ans</u>

โดย ω และ α เป็นความเร็วและความเร่งเชิงมุมของการหมุนของล้อ

<u>พิจารณาความเร็วและความเร่งของจุด *C* ที่อยู่ขอบของล้อ</u>

ตั้งแกนพิกัด *x-y* โดยให้จุด *C* เป็นจุดกำเนิดดังแสดงในรูป การเคลื่อนที่ของจุด *C* แสดงโดยแนวเส้นประสีส้ม ขนาดการเคลื่อนที่ในทิศทาง *x* และ *y* ของจุด *C* แสดงดังสมการได้ดังนี้

$$x = s - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$
$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1-\cos\theta) = v_O(1-\cos\theta)$$
$$\ddot{x} = \dot{v}_O(1-\cos\theta) + v_O\dot{\theta}\sin\theta$$
$$= a_O(1-\cos\theta) + r\omega^2\sin\theta$$

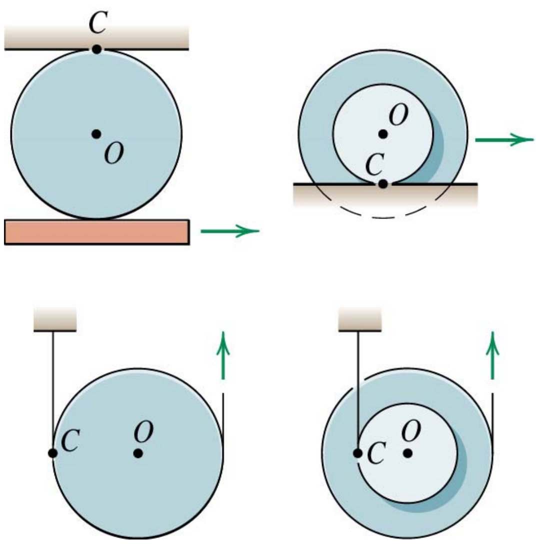
$$y = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta)$$
$$\dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta = v_O\sin\theta$$
$$\ddot{y} = \dot{v}_O\sin\theta + v_O\dot{\theta}\cos\theta$$
$$= a_O\sin\theta + r\omega^2\cos\theta$$

ที่ตำแหน่งสัมผัสพื้น $\theta = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x} = 0 & \dot{y} = 0 \\ \ddot{x} = 0 & \ddot{y} = r\omega^2 \end{array}\right\} \quad \underline{\text{Ans}}$$

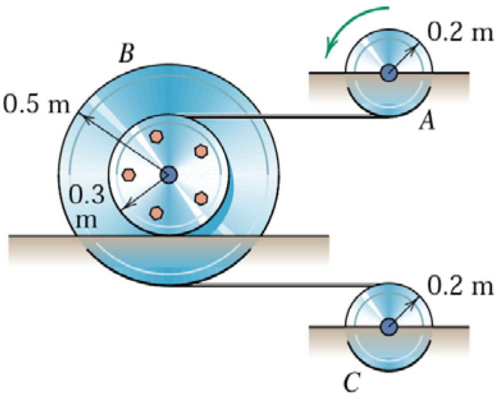
Note

1. ผลในข้อนี้ จะนำไปใช้ต่อไปในการพิจารณาความเร็วและความเร่งของกลไกที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น
2. ผลในข้อนี้อยู่ในเงื่อนไขที่ว่า ล้อกลิ้งโดยไม่ไถล ถ้ามีการไถลเกิดขึ้นความเร็วและความเร่งจะไม่เป็นไปตามนี้
3. ที่จุดสัมผัสพื้น จะมีความเร็วในขณะนั้นเท่ากับศูนย์ ทำนองเดียวกับปัญหาในข้อนี้ จุด C ในรูปต่างๆ ต่อไปนี้ จะมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากเป็นจุดที่สัมผัสกับชิ้นส่วนที่หยุดนิ่ง (ล้อกลิ้งโดยไม่ไถล)



5/40 The cable from drum *A* turns the double wheel *B*, which rolls on its hubs without slipping. Determine the angular velocity ω and angular acceleration α of drum *C* for the instant when the angular velocity and angular acceleration of *A* are 4 rad/s and 3 rad/s^2, respectively, both in the counterclockwise direction.

[Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/40]

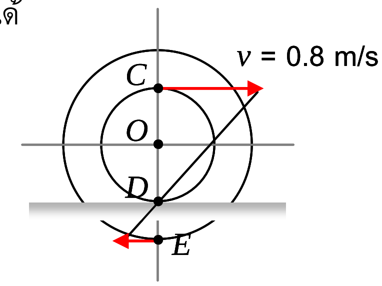


วิธีทำ โจทย์กำหนด ω_A และ α_A มาให้ ทำให้ความความเร็วและความเร่ง (ในแนวสัมผัส) ที่จุด *A* ได้ดังนี้

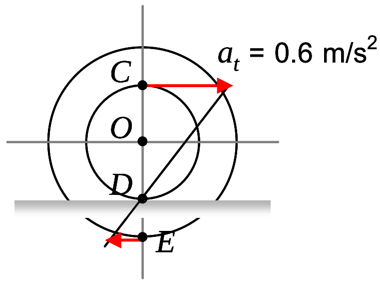
$$v_A = \omega_A r_A = 4(0.2) = 0.8\ \text{m/s} \qquad \text{ทิศทาง} \longrightarrow$$

$$(a_A)_t = \alpha_A r_A = 3(0.2) = 0.6\ \text{m/s}^2 \qquad \text{ทิศทาง} \longrightarrow$$

ความเร็วและความเร่ง (ในแนวสัมผัส) ที่จุด *A* จะต้องเท่ากับความเร็วและความเร่ง (ในแนวสัมผัส)ของเคเบิลที่สัมผัสกับล้อ *B* (จุด *C*) ถ้าไม่เท่ากันเคเบิลอาจจะหย่อนหรือขาดได้



ความเร็ว



ความเร่ง

จุดที่ทราบความเร็วและความเร่งอีกจุดหนึ่งได้แก่จุด *D* ซึ่งเป็นจุดที่ล้อ *B* สัมผัสกับพื้น เนื่องจากเป็นการกลิ้งโดยไม่ไถล ความเร็วและความเร่ง (ในแนวสัมผัส) ที่จุดนี้จึงเป็นศูนย์ ในขณะนี้ จึงเปรียบเสมือนว่าเส้นตรง *EDOC* กำลังหมุนรอบจุด *D* อยู่ ดังนั้นจะหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ที่จุด *D* และจุด *E* ได้ดังนี้

$$ds_C = \overline{DC} \cdot d\theta \qquad v_C = \overline{DC} \cdot \omega_B \qquad (a_C)_t = \overline{DC} \cdot \alpha_B$$

$$ds_E = \overline{DE} \cdot d\theta \qquad v_E = \overline{DE} \cdot \omega_B \qquad (a_E)_t = \overline{DE} \cdot \alpha_B$$

หาค่า ω_B และ α_B ของล้อ *B*

$$v_C = \overline{DC}\cdot\omega_B \longrightarrow 0.8 = 0.6\cdot\omega_B \longrightarrow \omega_B = 4/3\,\text{rad/s}$$

$$(a_C)_t = \overline{DC}\cdot\alpha_B \longrightarrow 0.6 = 0.6\cdot\alpha_B \longrightarrow \alpha_B = 1\,\text{rad/s}^2$$

หาค่า v_E และ a_E ของจุด *E*

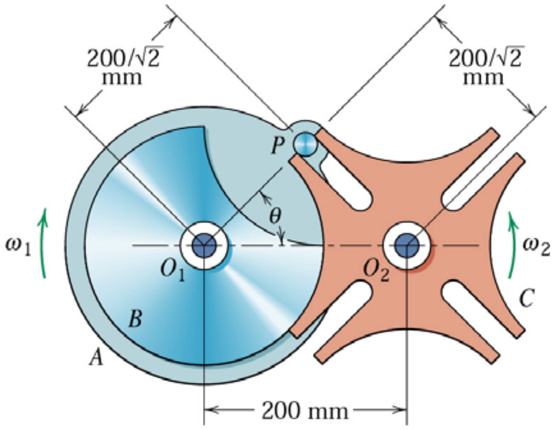
$$v_E = \overline{DE}\cdot\omega_B \longrightarrow v_E = (0.5-0.3)\cdot 4/3 \longrightarrow v_E = 0.2667\ \text{m/s}$$

$$(a_E)_t = \overline{DE}\cdot\alpha_B \longrightarrow (a_E)_t = (0.5-0.3)\cdot 1 \longrightarrow (a_E)_t = 0.2\ \text{m/s}^2$$

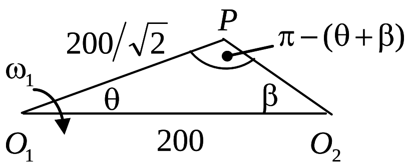
ค่า v_E และ a_E ของจุด *E* จะเท่ากับความเร็วและความเร่งของจุดที่เคเบิลสัมผัสกับล้อ *C* ดังนั้นจะหาค่า ω และ α ของล้อ *C* ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} v_E = \omega_C r_C &\longrightarrow 0.2667 = \omega_C(0.2) \longrightarrow \omega_C = 1.333\,\text{rad/s} \\ (a_E)_t = \alpha_C r_C &\longrightarrow 0.2 = \alpha_C(0.2) \longrightarrow \alpha_C = 1\,\text{rad/s}^2 \end{aligned}\right\}\ \underline{\text{Ans}}$$

5/53 The Geneva wheel is a mechanism for producing intermittent rotation. Pin P in the integral unit of wheel A and locking plate B engages the radial slots in wheel C thus turning wheel C one-fourth of a revolution for each revolution of the pin. At the engagement position shown, $\theta = 45^\circ$. For a constant clockwise angular velocity $\omega_1 = 2$ rad/s of wheel A, determine the corresponding counterclockwise angular velocity ω_2 of wheel C for $\theta = 20^\circ$. (Note that the motion during engagement is governed by the geometry of triangle O_1O_2P with changing θ.) [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/53]



วิธีทำ พิจารณาสามเหลี่ยม O_1O_2P ดังแสดงในรูปด้านล่าง



จากกฎของ sine

$$\frac{200}{\sqrt{2}\sin\beta} = \frac{200}{\sin(\pi-(\theta+\beta))}$$

$$\sin(\pi-(\theta+\beta)) = \sqrt{2}\sin\beta$$

$$\sin(\theta+\beta) = \sqrt{2}\sin\beta$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา $$(\dot{\theta}+\dot{\beta})\cos(\theta+\beta) = \sqrt{2}\dot{\beta}\cos\beta$$

$$\dot{\theta}\cos(\theta+\beta) = \dot{\beta}(\sqrt{2}\cos\beta - \cos(\theta+\beta)) \qquad (1)$$

ที่ θ = 20°

จากกฎของ cosine

$$(O_2P)^2 = \left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + 200^2 - 2\left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)(200)\cos 20^\circ$$

$O_2P = 82.7222$

จากกฎของ sine $\dfrac{200}{\sqrt{2}\sin\beta} = \dfrac{82.7222}{\sin 20^\circ}$

$$\sin\beta = 0.5847 \longrightarrow \beta = 35.7829^\circ$$

แทนค่า θ, β, $\dot{\theta}$ ในสมการ (1)

$$(2)\cos(20^\circ + 35.7829^\circ) = \dot{\beta}\left[\sqrt{2}\cos 35.7829^\circ - \cos(20^\circ + 35.7829^\circ)\right]$$

$$\dot{\beta} = \omega_2 = 1.9227 \text{ rad/s}$$ Ans