

## พลศาสตร์ (Dynamics)

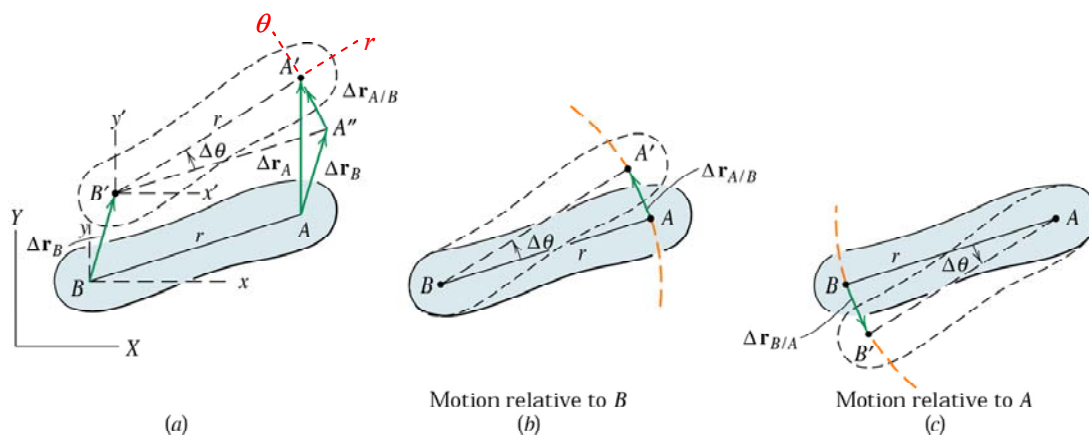
### บทที่ 5 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง (ส่วนที่ 2)

#### 5/4 ความเร็วสัมพัทธ์

ตามที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่ 5/1 แล้วว่าการเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ (General plane motion) เป็นการเคลื่อนที่ที่ผสมกันระหว่างการเลื่อนที่และการหมุน ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการใช้วิธีการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์เพื่อหาความเร็วของตำแหน่งใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็งที่เคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ พื้นฐานของการพิจารณาโดยใช้การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ จะเป็นการแยกการเคลื่อนที่ออกเป็นสองส่วน คือการเคลื่อนที่ส่วนของผู้สังเกตซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ และการเคลื่อนที่ของจุดที่ถูกสังเกตซึ่งจะเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบผู้สังเกต เนื้อหาในหัวข้อนี้เป็นพื้นฐานสำคัญในการพิจารณาหาความเร่งที่ตำแหน่งต่างๆ ในวัตถุแข็งเกร็งซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุในรูปที่ 1(a) ผู้สังเกตซึ่งอยู่บนแกนหยุดนิ่ง (X-Y) จะมองเห็นวัตถุเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ หากพิจารณาการเคลื่อนที่ของเส้น  $BA$  ซึ่งเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งบนวัตถุแข็งเกร็ง จะพบว่าการเคลื่อนที่ที่แบ่งได้เป็นสองขั้นตอน ขั้นตอนแรกจะเป็นการเคลื่อนที่จากจุด  $BA$  ไปยังจุด  $B'A''$  โดยการเคลื่อนที่ในส่วนนี้จะเป็นการเลื่อนที่ขั้นตอนที่ 2 จะเป็นการเคลื่อนที่จากจุด  $B'A''$  ไปยังจุด  $B'A'$  ซึ่งเป็นการหมุนรอบจุด  $B'$

หากผู้สังเกตอยู่ที่จุด  $B$  ในช่วงการเคลื่อนที่จากจุด  $BA$  ไปยังจุด  $B'A''$  ผู้สังเกตที่  $B$  จะไม่พบว่าจุด  $A$  เคลื่อนที่สัมพัทธ์เทียบกับจุด  $B$  หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ผู้สังเกตที่  $B$  จะเห็นจุด  $A$  หยุดนิ่งนั่นเอง แต่ในช่วงการเคลื่อนที่จากจุด  $B'A''$  ไปยังจุด  $B'A'$  ผู้สังเกตที่จุด  $B$  จะเห็นจุด  $A$  หมุนรอบจุด  $B$



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ

การพิจารณาการเคลื่อนที่ของจุด A โดยผู้สังเกตที่จุด B อาจพิจารณาได้โดยใช้ระบบพิกัดแบบ  $r-\theta$  โดยตั้งแกนพิกัดดังแสดงในรูปที่ 1(a) เนื่องจากเส้น AB เป็นเส้นตรงบนวัตถุแข็งเกร็ง ดังนั้นความยาว  $r$  ระหว่างจุด A ไปยังจุด B จะมีค่าคงที่เสมอ ความเร็วในทิศทาง  $r$  หรือ  $\dot{r}$  จึงมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นความเร็วของจุด A ที่ปรากฏกับผู้สังเกตที่จุด B จะมีความเร็วในทิศทาง  $\theta$  เพียงอย่างเดียว หรืออาจไม่มีความเร็วเลย นั่นคือผู้สังเกตที่ B จะเห็นจุด A ไม่เคลื่อนที่ ( $v_r = 0; v_\theta = 0$ ) หรือเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด B ( $v_r = 0; v_\theta \neq 0$ ) เพียงสองกรณีเท่านั้น การเคลื่อนที่ในรูป 1(a) หากผู้สังเกตอยู่ที่จุด B จะเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบตัวมันดังแสดงในรูปที่ 1(b)

ในทางกลับกันถ้าให้ผู้สังเกตอยู่ที่จุด A และสังเกตการณ์เคลื่อนที่ของจุด B ดังแสดงในรูปที่ 1(c) ผู้สังเกตจะพบว่าจุด B จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด A เช่นกัน แต่จะเห็น B หมุนรอบ A ในทิศทางตรงข้ามกับผู้สังเกตที่ B มองเห็นจุด A หมุนรอบจุด B

เมื่อพิจารณาถึงเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ จากรูปที่ 1(a) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B + \Delta \vec{r}_{A/B} \tag{1}$$

โดย  $\Delta \vec{r}_{A/B}$  หมายถึงการเคลื่อนที่ของจุด A เมื่อเทียบกับผู้สังเกตที่จุด B

จากรูปจะพบอีกว่า

$$\Delta \vec{r}_{A/B} = r \Delta \theta \tag{2}$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (1) เทียบกับเวลาจะให้ความสัมพันธ์ของความเร็วดังนี้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \tag{3}$$

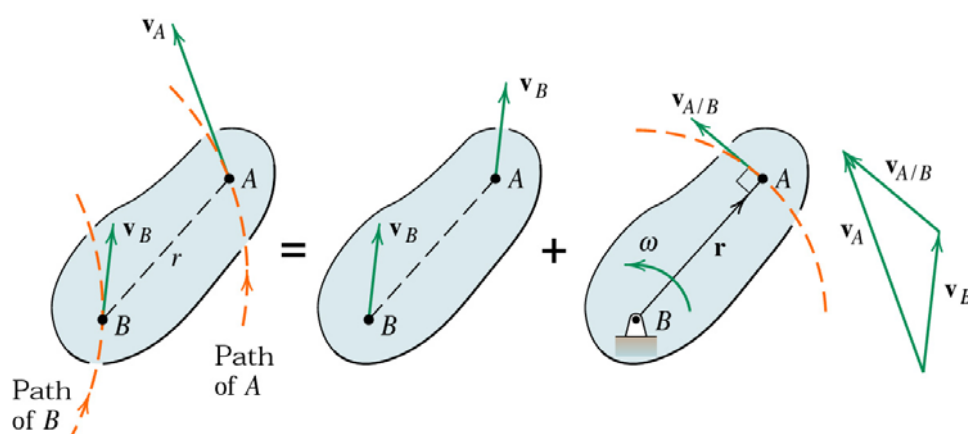
โดย  $\vec{v}_{A/B}$  คือความเร็วสัมพัทธ์ของจุด A เมื่อเทียบกับผู้สังเกตที่จุด B

จากสมการ (2) จะได้ว่า

$$\vec{v}_{A/B} = r\omega \tag{4}$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{5}$$



รูปที่ 2 การแยกการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่และการหมุน

รูปที่ 2 แสดงการแบ่งการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบออกเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่และการเคลื่อนที่แบบหมุน เนื่องจากผู้สังเกตที่ B จะมองเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด B ดังนั้นทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์  $\vec{v}_{A/B}$  จะตั้งฉากกับเส้นตรง  $\overline{BA}$  ซึ่งลากจากจุด B ไปจุด A เสมอ

**แนวทางการแก้ปัญหาโจทย์**

แนวทางการแก้ปัญหาโจทย์สามารถสรุปเป็นหลักการและขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ดังนี้

หลักการ

1. จุดที่ผู้สังเกตอยู่ และจุดที่ต้องการสังเกตอยู่บนวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกัน
2. ผู้สังเกตที่ B จะเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบผู้สังเกต
3.  $\vec{v}_{A/B} = r\omega$  และมีทิศทางตั้งฉากกับเส้นตรง  $\overline{BA}$  เสมอ

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

1. เขียนสมการ  $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$  เพื่อหาความเร็วที่จุดที่ต้องการ เนื่องจากสมการนี้เป็นสมการเวกเตอร์ ในปัญหาการเคลื่อนที่ในระนาบ (2 มิติ) สมการนี้ประกอบด้วยสมการย่อย 2 สมการ ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ในแนว x และ y ดังนั้นจะแก้สมการนี้ได้จะต้องมีตัวแปรไม่ทราบค่าไม่เกิน 2 ตัว
2. ตรวจสอบว่าตัวแปรอะไรบ้างที่ทราบค่าและตัวแปรอะไรบ้างที่ไม่ทราบค่า โดยเขียนตารางแยกเป็นขนาด (Magnitude) และทิศทาง (Direction) ของตัวแปรแต่ละตัว ดังแสดงด้านล่าง ปัญหาโดยส่วนใหญ่จะแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

Mag.	×	○	$r\omega$
Dir.	×	○	$\perp \overline{AB}$

กรณีที่ 2

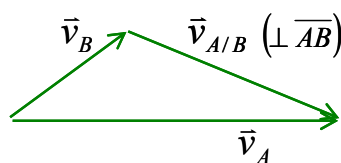
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

Mag.	×	○	×
Dir.	○	○	$\perp \overline{AB}$

กรณีที่ 1 ทราบข้อมูล  $\vec{v}_B$  และ  $\vec{v}_{A/B}$  ทั้งหมด แต่ไม่ทราบขนาดและทิศทางของ  $\vec{v}_A$

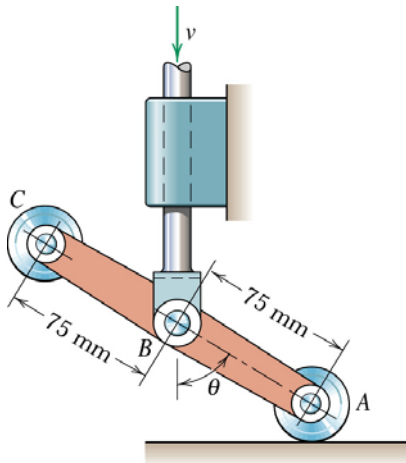
กรณีที่ 2 ไม่ทราบขนาดของ  $\vec{v}_{A/B}$  เนื่องจากไม่ทราบค่า  $\omega$  แต่ทราบทิศทางของ  $\vec{v}_A$

3. คำนวณค่าของความเร็วที่ทราบค่า และหาค่ามุม และทิศทางต่างๆ
4. เขียนแผนภาพเวกเตอร์ตามสมการ  $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$  ดังรูปตัวอย่างด้านล่าง โดยเริ่มเขียนจากเวกเตอร์ที่รู้ขนาดและทิศทางเสียก่อน เวกเตอร์ของความเร็วที่ไม่ทราบค่าจะเขียนได้ภายหลังเพื่อให้แผนภาพเวกเตอร์ปิดได้



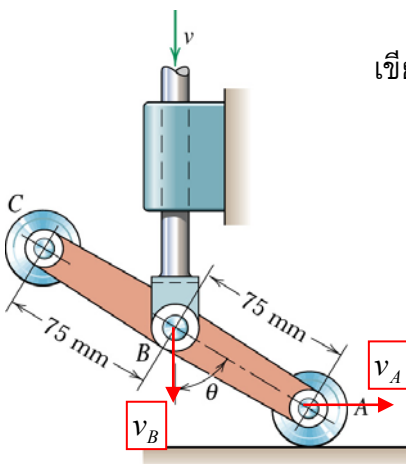
5. คำนวณหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า โดยพิจารณาแผนภาพเวกเตอร์ที่สร้างขึ้น โดยใช้กฎของ sine และ cosine ประกอบ หรืออาจทำโดยรวมส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแนวดิ่งและในแนวระดับให้เท่ากับเวกเตอร์ลัพธ์  $\vec{v}_A$  ก็ได้

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์



**5/78** The elements of a switching device are shown. If the vertical control rod has a downward velocity  $v$  of 0.9 m/s when  $\theta = 60^\circ$  and if roller  $A$  is in continuous contact with the horizontal surface, determine the magnitude of the velocity of  $C$  for this instant. [Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.5/78]

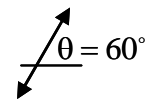
**วิธีทำ** ในข้อนี้รู้ข้อมูลความเร็วจุด  $B$  ทั้งขนาดและทิศทาง (ชี้ลง) และรู้ทิศทางความเร็วจุด  $A$  ว่าต้องอยู่ในแนวระดับ (ไปทางขวา) ส่วนจุด  $C$  ที่โจทย์ถามนั้นไม่รู้ทั้งขนาดและทิศทาง ดังนั้นจะพิจารณาส่วน  $AB$  ก่อน



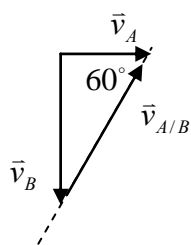
เขียนสมการความเร็วสัมพันธ์ระหว่างจุด  $A$  และ  $B$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

ขนาด	X	0.9	X
ทิศทาง	→	↓	$\perp \overline{AB}$



จากสมการจะพบว่า มีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวเท่านั้น ดังนั้นจึงหาคำตอบได้ นำเวกเตอร์ในตารางมาเขียนต่อเป็นรูปปิดได้ดังนี้



จะเห็นว่าทิศทางของ  $\vec{v}_{A/B}$  จะต้องเฉียงขึ้น  $60^\circ$  เท่านั้นจึงจะทำให้สมการ  $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$  เป็นจริงได้

จากรูป

$$v_{A/B} \sin 60^\circ = v_B = 0.9$$

$$v_{A/B} = 1.0392 \text{ m/s}$$

$$[v_{A/B} = \omega_{AB} \overline{AB}]$$

$$1.0392 = \omega_{AB} \cdot 0.075$$

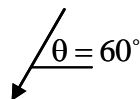
$$\omega_{AB} = 13.856 \text{ rad/s} \quad \text{CCW}$$

เนื่องจากชิ้นส่วน ABC เป็นวัตถุแข็งเกร็ง ดังนั้น  $\omega_{AB}$  จึงมีค่าเท่ากันตลอดทั้งชิ้นส่วน

พิจารณาส່วน BC เพื่อหาความเร็วที่จุด C ในขณะนั้น

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B}$$

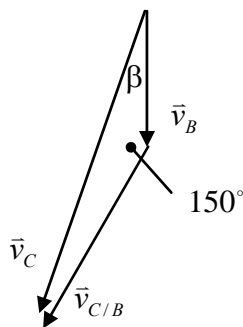
ขนาด	X	0.9	$\omega_{AB} \overline{CB}$
ทิศทาง	X	↓	$\perp \overline{AB}$



จากตาราง พบว่าในตอนนี้จะรู้ขนาดและทิศทางของ  $\vec{v}_{C/B}$  แน่แน่นอนแล้ว เนื่องจากรู้ทิศทางของ  $\omega_{AB}$

$$v_{C/B} = \omega_{AB} \overline{CB} = 13.856 \cdot 0.075 = 1.0392 \text{ m/s}$$

จากสมการจะพบว่าไม่มีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวเท่านั้น ดังนั้นจึงหาคำตอบได้นำเวกเตอร์ในตารางมาเขียนต่อเป็นรูปปิดได้ดังนี้



กฎของ cosine

$$v_C^2 = v_B^2 + v_{C/B}^2 - 2v_B v_{C/B} \cos 150^\circ$$

$$v_C^2 = 0.9^2 + 1.0392^2 - 2(0.9)(1.0392) \cos 150^\circ$$

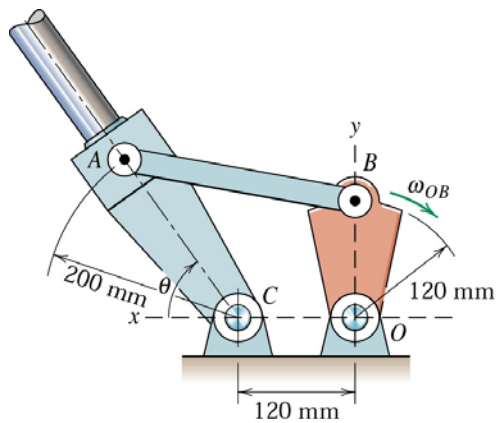
$$v_C = 1.8735 \text{ m/s}$$

Ans

หมายเหตุ ทิศทางของ  $\vec{v}_C$  หาได้ดังนี้

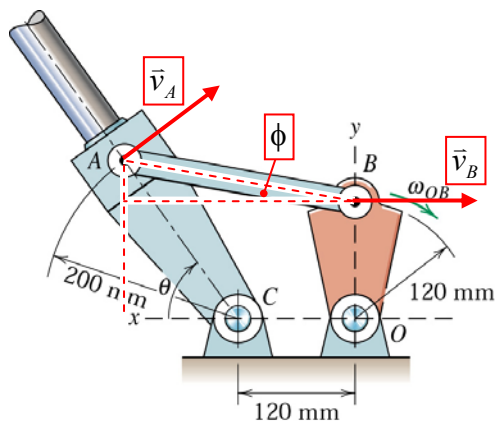
กฎของ sine 
$$\frac{v_{C/B}}{\sin \beta} = \frac{v_C}{\sin 150^\circ}$$

$$\frac{1.0392}{\sin \beta} = \frac{1.8735}{\sin 150^\circ} \longrightarrow \beta = 16.1016^\circ$$



**5/81** The elements of the mechanism for deployment of a spacecraft magnetometer boom are shown. Determine the angular velocity of the boom when the driving link  $OB$  crosses the  $y$ -axis with an angular velocity  $\omega_{OB} = 0.5 \text{ rad/s}$  if  $\tan\theta = 4/3$  at this instant. [Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.5/81]

**วิธีทำ** โจทย์กำหนด  $\omega_{OB}$  ทำให้รู้อัตราเร็วจุด B และทิศทางที่ตั้งฉากกับเส้นตรง BO โดยชี้ไปทางด้านขวา และรู้ทิศทางความเร็วจุด A เนื่องจากจุด A ต้องหมุนเป็นวงกลมรอบจุด C ทิศทางความเร็วของแต่ละจุดแสดงในรูปด้านล่าง



เขียนสมการความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างจุด A และ B

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

ขนาด	X	○	X
ทิศทาง	$\perp \overline{AC}$	$\rightarrow$	$\perp \overline{AB}$

$\theta$   $\phi$

จากสมการจะพบว่า มีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวเท่านั้น ดังนั้นจึงหาคำตอบได้

หาอัตราเร็ว และมุมต่างๆ

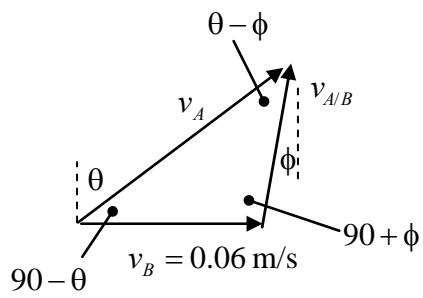
$$[v_B = \omega_{OB} \overline{OB}] \quad v_B = 0.5(0.12) = 0.06 \text{ m/s}$$

$$\tan \theta = 4/3 \quad \rightarrow \quad \theta = 53.1301^\circ$$

$$\tan \phi = \frac{0.2 \sin \theta - 0.12}{0.2 \cos \theta + 0.12} = \frac{0.2 \sin 53.1301^\circ - 0.12}{0.2 \cos 53.1301^\circ + 0.12}$$

$$\phi = 9.4623^\circ$$

นำเวกเตอร์ในตารางมาเขียนแผนภาพได้ดังนี้



กฎของ sine

$$\frac{v_A}{\sin(90 + \phi)} = \frac{v_B}{\sin(\theta - \phi)}$$

$$\frac{v_A}{\sin(90^\circ + 9.4623^\circ)} = \frac{0.06}{\sin(53.13^\circ - 9.4623^\circ)}$$

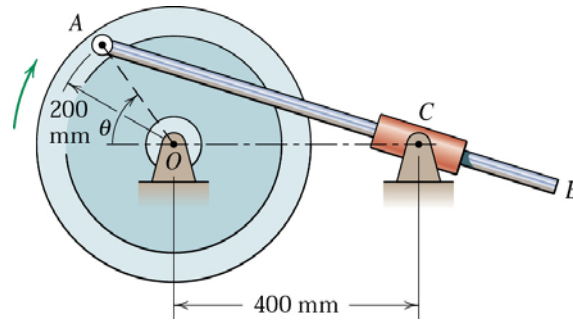
$$v_A = 0.0857 \text{ m/s}$$

พิจารณาชิ้นส่วน CA

$$[\omega_{CA} = v_A / \overline{CA}] \quad \omega_{CA} = 0.0857 / 0.2 = 0.429 \text{ rad/s} \quad \text{CW}$$

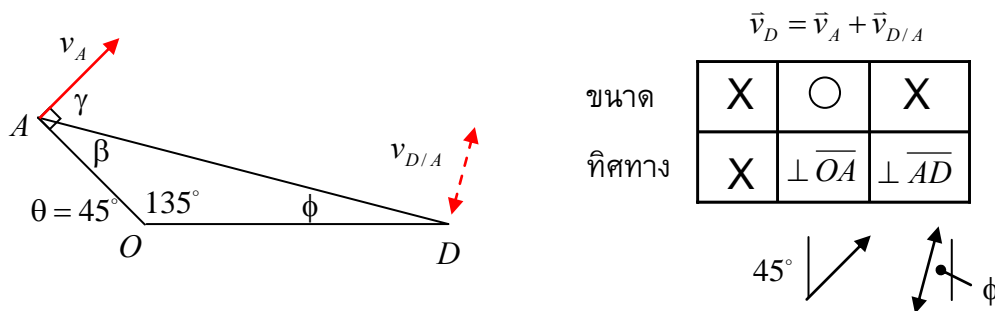
Ans

**5/77** The flywheel turns clockwise with a constant speed of 600 rev/min, and the connecting rod  $AB$  slides through the pivoted collar at  $C$ . For the position  $\theta = 45^\circ$ , determine the angular velocity  $\omega_{AB}$  of  $AB$  by using the relative-velocity relation. [Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.5/77]



**วิธีทำ** การหาค่า  $\omega_{AB}$  จำเป็นต้องทราบความเร็ว 2 จุดบนชิ้นส่วน  $AB$  จุด  $A$  เป็นจุดที่รู้ความเร็ว เนื่องจากรู้ความเร็วรอบหมุนของ flywheel และรู้ทิศทางของความเร็ว ซึ่งตั้งฉากกับเส้น  $OA$  อย่างไรก็ตามยังไม่มีจุดอื่นบนชิ้นส่วน  $AB$  ที่รู้ความเร็ว

สมมติให้จุด  $D$  เป็นจุดบนชิ้นส่วน  $AB$  ซึ่งในขณะนั้นอยู่ตำแหน่งเดียวกับจุด  $C$   
พิจารณาสมการความเร็วสัมพัทธ์



จะพบว่าไม่มีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว ดังนั้นยังไม่สามารถหาค่าอะไรได้

พิจารณาจุด  $C$  และ  $D$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{D/C}$$

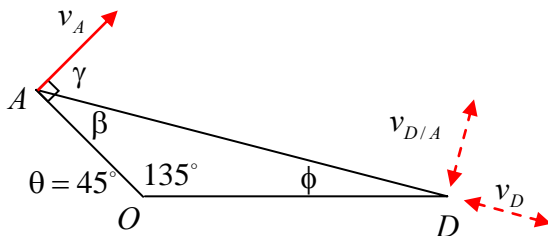
เนื่องจากจุด  $C$  เป็นจุดยึดแน่นไม่เคลื่อนที่  $\vec{v}_C = 0 \rightarrow \vec{v}_D = \vec{v}_{D/C}$

ในข้อนี้จุด  $C$  และจุด  $D$  เป็นจุดซึ่งอยู่คนละชิ้นส่วน จึงไม่สามารถคิดเหมือนกรณีที่จุด  $C$  และจุด  $D$  อยู่บนวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกันได้ (ไม่สามารถคิดว่า  $C$  มองเห็น  $D$  เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบตัวมันได้)

เนื่องจากจุด  $C$  เป็นจุดบน Slot และจุด  $D$  เป็นจุดบนชิ้นส่วน  $AB$  ซึ่งเคลื่อนที่ผ่าน Slot ดังนั้นจุด  $C$  จะเห็นจุด  $D$  เคลื่อนที่ไปตามแนว Slot เข้าหาตัวมัน หรือออกจากตัวมันเท่านั้น

$\vec{v}_D = \vec{v}_{D/C}$  จึงมีทิศทางไปตามแนว Slot

นำข้อมูลนี้ไปเพิ่มในตารางได้ดังนี้



$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{D/A}$$

ขนาด

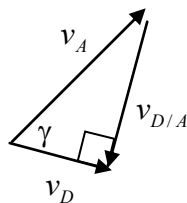
	X	○	X
ทิศทาง	// $\overline{AD}$	$\perp \overline{OA}$	$\perp \overline{AD}$

ทิศทาง



มีตัวไม่ทราบค่าในสมการ 2 ตัว จึงหาค่าได้

นำเวกเตอร์ในตารางมาเขียนแผนภาพได้ดังนี้



หาค่ามุม และอัตราเร็วที่รู้ค่า

$$AD^2 = 200^2 + 400^2 - 2(200)(400) \cos 135^\circ$$

$$AD = 559.5865 \text{ mm}$$

หามุม  $\beta$  จากกฎของ sine ได้ดังนี้

$$\frac{AD}{\sin 135^\circ} = \frac{OD}{\sin \beta} \rightarrow \frac{559.5865}{\sin 135^\circ} = \frac{400}{\sin \beta}$$

$$\beta = 30.3612^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 30.3612^\circ = 59.6388^\circ$$

หาอัตราเร็ว  $v_A$

$$v_A = \omega \cdot \overline{OA} = 600 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0.2 = 4\pi \text{ m/s}$$

จากแผนภาพเวกเตอร์

$$v_{D/A} = v_A \sin \gamma = 4\pi \sin 59.6388^\circ \rightarrow v_{D/A} = 10.843 \text{ m/s}$$

$$\omega_{D/A} = \omega_{AB} = v_{D/A} / \overline{AD}$$

$$\omega_{AB} = \frac{10.843 \times 1000}{559.5865} = 19.38 \text{ rad/s} \quad \text{CW}$$

Ans

### 5/5 Instantaneous Center of Zero Velocity

ในหัวข้อ 5/4 ได้กล่าวถึงการหาความเร็วของจุดใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็งโดยใช้วิธีการของความเร็วสัมพัทธ์ จากสมการที่ (3) และ (5) จะได้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (6)$$

จากสมการที่ (6) พบว่าหากสามารถเลือกตำแหน่งที่มีความเร็วเป็นศูนย์ ให้เป็นตำแหน่งที่ผู้สังเกตทำการสังเกตได้แล้ว สมการที่ (6) จะสามารถลดรูปลงได้เป็นสมการที่ (7)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7)$$

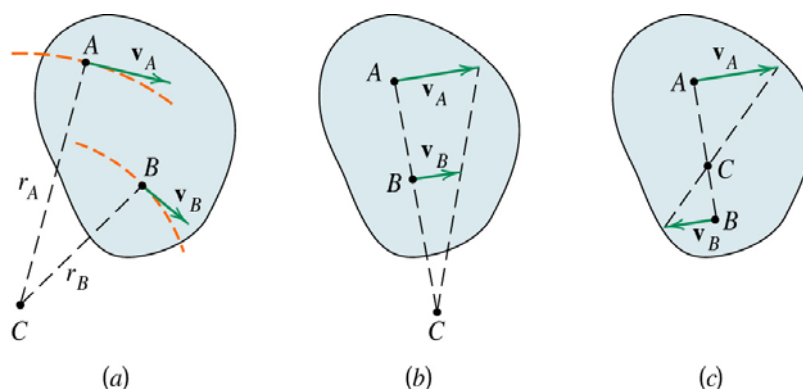
เขียนในรูปสเกลาร์ได้ดังนี้

$$v_A = \omega \cdot r_A \quad (8)$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่าความเร็วที่จุดใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็ง สามารถหาได้โดยคิดเสมือนว่าจุดเหล่านั้นกำลังหมุนรอบจุดศูนย์กลางการหมุน (จุดที่ผู้สังเกตอยู่) ซึ่งมีความเร็วเป็นศูนย์อยู่ จุดศูนย์กลางการหมุนซึ่งมีความเร็วเป็นศูนย์ในขณะนั้นเรียกว่า “จุดหมุนเฉพาะกาล หรือ Instantaneous Center of Zero Velocity: I.C.Z.V.” หากทราบตำแหน่งจุด I.C.Z.V. แล้วจะสามารถหาความเร็วจุดอื่นได้โดยง่ายโดยสมการ (8)

#### การหาตำแหน่งจุด I.C.Z.V

รูปที่ 3 แสดงการหาตำแหน่งของจุด I.C.Z.V. ในกรณีต่างๆ จากสมการที่ (7) จะพบว่าทิศทางของความเร็ว  $\vec{v}$  จะต้องตั้งฉากกับเวกเตอร์  $\vec{r}$  ที่ลากจากจุด I.C.Z.V. ไปยังจุดที่ต้องการหาความเร็วเสมอ ในกรณีที่ทิศทางความเร็วของจุด A และจุด B ไม่เหมือนกัน ดังรูปที่ 3(a) ตำแหน่งจุด I.C.Z.V. สามารถหาได้โดยลากเส้นตั้งฉากกับทิศทางความเร็วทั้ง 2 จุด จุดตัดกันของเส้นตั้งฉากจะเป็นตำแหน่งจุด I.C.Z.V.



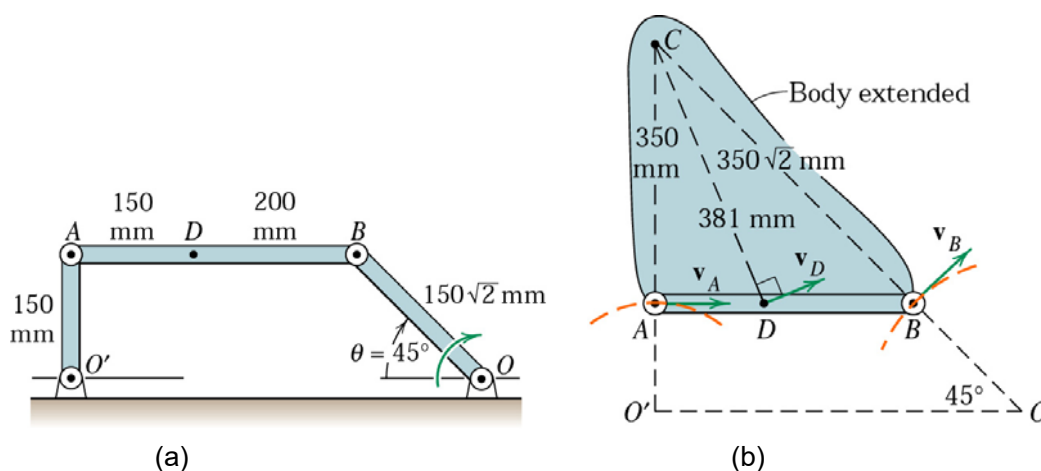
รูปที่ 3 ตำแหน่งจุด I.C.Z.V ในกรณีต่างๆ

ในกรณีที่ความเร็วของจุด A และจุด B มีทิศทางขนานกัน ดังรูปที่ 3(b) และ 3(c) ตำแหน่งจุด I.C.Z.V. สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ที่ว่าอัตราเร็วของจุด A และจุด B จะต้องเป็นสัดส่วนกันตามสมการ (8) จากรูปที่ 3(b) และ 3(c) จะพบว่าจุด I.C.Z.V. สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต จากรูปเมื่อทิศทางความเร็วไปทิศทางเดียวกัน ตำแหน่งจุด C จะอยู่ด้านนอกของเส้นตรง AB แต่ถ้าทิศทางความเร็วตรงกันข้ามกัน ตำแหน่งจุด C จะอยู่บนเส้นตรงระหว่างจุด A และ B

### ตัวอย่างการใช้วิธีการหาจุด I.C.Z.V. เพื่อหาความเร็วตำแหน่งอื่นๆ ในวัตถุแข็งเกร็ง

พิจารณาชิ้นส่วน AB ในรูปที่ 4(a) เมื่อกำหนดให้ชิ้นส่วน OB หมุนรอบจุด O ด้วยทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูป จะหาความเร็วที่จุด D ได้ดังนี้

1. การจะหาตำแหน่งจุด I.C.Z.V. ได้จำเป็นจะต้องทราบทิศทางความเร็วของจุด 2 จุด บนวัตถุแข็งเกร็งนั้นเสียก่อน
2. จากรูปพบว่าจุด B และจุด A เป็นจุดที่รู้ทิศทางของความเร็ว เนื่องจากจุดทั้งสองหมุนเป็นวงกลมรอบจุด O และจุด O' ตามลำดับ ดังนั้นทิศทางความเร็วจึงตั้งฉากกับเส้น OB และ O'A ตามลำดับ
3. หาตำแหน่งจุด I.C.Z.V. โดยลากเส้นตั้งฉากกับทิศทางความเร็วของจุด B และ A ดังแสดงในรูปที่ 4(b) เส้นทั้งสองจะไปตัดกันที่จุด C จุด C เป็นจุด I.C.Z.V. ของชิ้นส่วน AB ในขณะนั้น
4. จากรูปจะพบว่าจุด I.C.Z.V. อาจอยู่นอกชิ้นส่วนที่พิจารณาได้
5. หาความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วน AB จาก  $\omega_{AB} = \frac{v_B}{CB}$  หรือ  $\omega_{AB} = \frac{v_A}{CA}$  (ถ้ารู้  $v_A$ )
6. ใช้ความเร็วเชิงมุม  $\omega_{AB}$  ที่หาได้ ห้ออัตราเร็วของจุด D จาก  $v_D = \omega_{AB} \cdot (\overline{CD})$  ทิศทางของความเร็วที่จุด D จะตั้งฉากกับเส้นตรง CD ดังแสดงในรูปที่ 4(b)



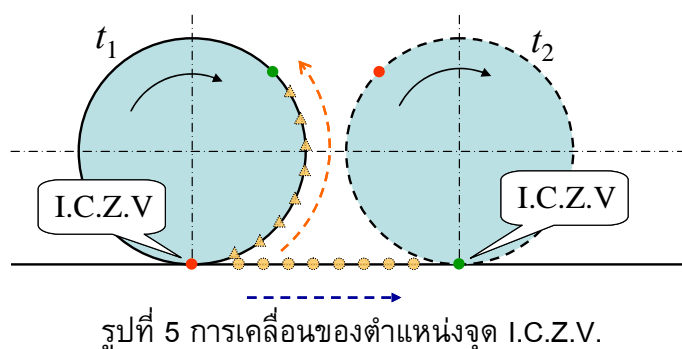
รูปที่ 4 ตัวอย่างการใช้จุด I.C.Z.V. เพื่อหาความเร็วในวัตถุแข็งเกร็ง

### การเคลื่อนของตำแหน่งจุด I.C.Z.V เมื่อวัตถุเคลื่อนที่

เนื่องจากความเร็วที่ตำแหน่งต่างๆ ของวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ ดังนั้นตำแหน่งของจุด I.C.Z.V. ก็จะเปลี่ยนไปด้วย

พิจารณารูปที่ 5 ซึ่งแสดงการกลิ้งของวัตถุทรงกระบอก จากตัวอย่างที่แสดงในหัวข้อที่แล้วจะพบว่าความเร็วที่จุดสัมผัสพื้นของทรงกระบอกมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจุดสัมผัสพื้นจึงเป็นจุด I.C.Z.V. เมื่อทรงกระบอกนี้กลิ้งไป จุดที่สัมผัสพื้น (จุด I.C.Z.V.) ก็จะเปลี่ยนไปจากจุดสีแดงไปเป็นจุดสีเขียว เมื่อพิจารณาแนวการเคลื่อนที่ของจุด I.C.Z.V. ในวัตถุ (เปรียบเสมือนผู้สังเกตอยู่บนทรงกระบอก) จะพบว่าแนวการเคลื่อนที่เป็นไปตามแนวความโค้งของทรงกระบอก (แสดงด้วยจุดสามเหลี่ยมประ) เรียกแนวการเคลื่อนที่ของจุด I.C.Z.V. ในวัตถุว่า Body centre

ในทางตรงข้ามหากพิจารณาการเคลื่อนที่ของจุด I.C.Z.V. เทียบกับแกนเฉื่อย (ผู้สังเกตอยู่นิ่ง) แล้ว จะพบว่าแนวการเคลื่อนที่ของจุด I.C.Z.V. จะเป็นไปตามแนวจุดสัมผัสพื้น (แสดงด้วยจุดวงกลมประ) เรียกแนวการเคลื่อนที่ของจุด I.C.Z.V. เมื่อเทียบกับแกนเฉื่อยว่า Space centre



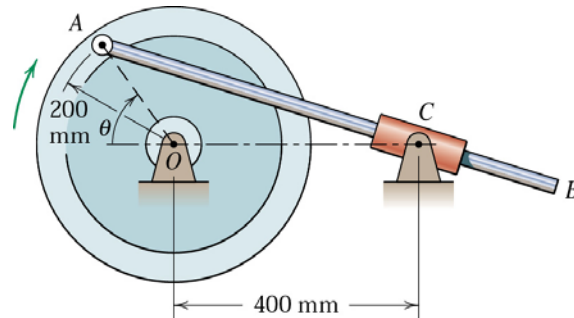
รูปที่ 5 การเคลื่อนของตำแหน่งจุด I.C.Z.V.

ข้อสังเกต ถึงแม้ว่าจุด I.C.Z.V. มีความเร็วเป็นศูนย์ในขณะนั้น แต่จุดนี้ไม่ได้มีความเร่งเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้แนวคิดทำนองเดียวกับจุด I.C.Z.V. กับปัญหาความเร่งได้

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์

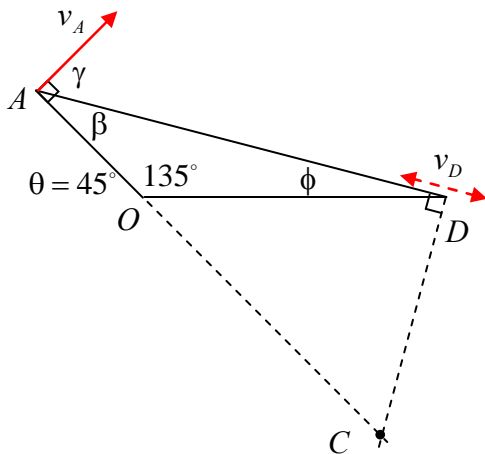
**5/109** The flywheel turns clockwise with a constant speed of 600 rev/min, and the connecting rod  $AB$  slides through the pivoted collar at  $C$ . For the position  $\theta = 45^\circ$ , determine the angular velocity  $\omega_{AB}$  of  $AB$  by using I.C.Z.V..

[Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.5/109]



**วิธีทำ** การที่จะหาจุด I.C.Z.V. ได้ จะต้องรู้ทิศทางความเร็ว 2 จุดบนวัตถุแข็งเกร็ง (ชิ้นส่วน AB) เสียก่อน จุดที่รู้ทิศทางความเร็วคือ

1. จุด A ซึ่งมีทิศทางของความเร็วตั้งฉากกับเส้นตรง OA
2. จุด D ซึ่งเป็นจุดบนชิ้นส่วน AB และอยู่ตำแหน่งเดียวกับจุด C ที่จุดนี้ เนื่องจากถูกยึดด้วยปลอก ทำให้ไม่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทางตั้งฉากกับเส้นตรง AB ได้ ที่จุดนี้จึงมีความเร็วในทิศทางขนานกับเส้นตรง AB



จากตัวอย่างก่อนหน้า (5/77) จะได้

$$AD = 559.5865 \text{ mm}$$

$$\beta = 30.3612^\circ$$

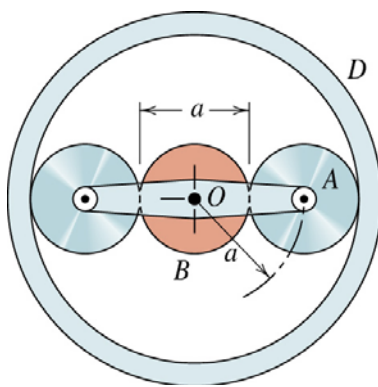
$$v_A = 4\pi \text{ m/s}$$

พิจารณาสามเหลี่ยม ACD

$$AC = \frac{AD}{\cos \beta} = \frac{559.5865}{\cos 30.3612^\circ} = 648.5281 \text{ mm}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC} = \frac{4\pi}{648.5281 \times 10^{-3}} = 19.377 \text{ rad/s CW}$$

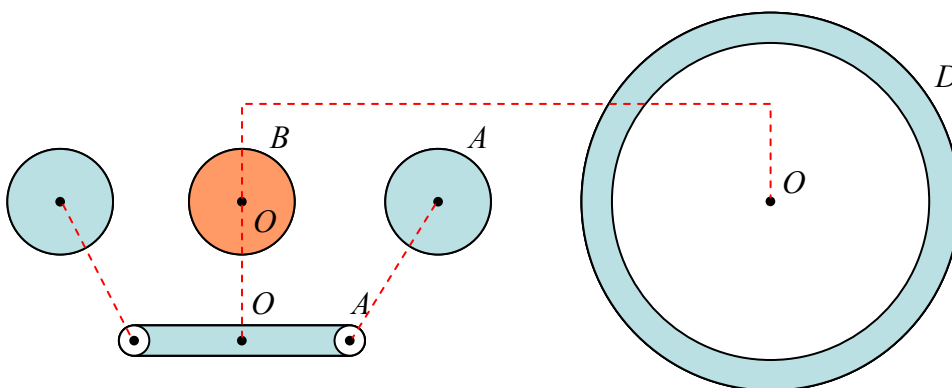
Ans



**5/117** The shaft at  $O$  drives the arm  $OA$  at a clockwise speed of 90 rev/min about the fixed bearing at  $O$ . Use the method of the instantaneous center of zero velocity to determine the rotational speed of gear  $B$  (gear teeth not shown) if (a) ring gear  $D$  is fixed and (b) ring gear  $D$  rotates counterclockwise about  $O$  with a speed of 80 rev/min. [Engineering Mechanics Dynamics 5<sup>th</sup> edition, Meriam & Kraige, prob.5/117]

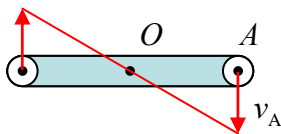
**วิธีทำ** ระบบเฟืองในข้อนี้ประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายๆ ชิ้นส่วน ต้องพิจารณาแต่ละชิ้นส่วนให้ดี เพราะวิธีการหาความเร็วที่กล่าวมาในหัวข้อนี้จะใช้ได้เฉพาะในวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกันเท่านั้น

ระบบเฟืองนี้ประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อยๆ 5 ชิ้นส่วนดังนี้



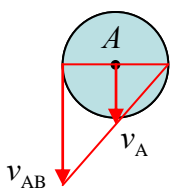
(a) ring gear  $D$  is fixed

พิจารณาชิ้นส่วน OA : จุด  $O$  เป็นจุดยึดแน่นมีความเร็วเป็นศูนย์ จึงเป็นจุด I.C.Z.V.



$$v_A = \omega_{OA}(a) = \left(90 \times \frac{2\pi}{60}\right)(a) = 3\pi a \text{ m/s}$$

พิจารณาเฟือง A



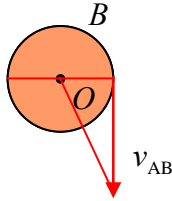
จุด  $A$  ของเฟือง ยึดกับจุด  $A$  ของชิ้นส่วน  $OA$  จึงมีความเร็วเท่ากัน

จุดที่เฟือง  $A$  สัมผัสกับ เฟืองวงแหวน  $D$  มีความเร็วเป็นศูนย์ เนื่องจากเฟืองแหวน  $D$  ถูกยึดแน่น จุดนี้เป็นจุด I.C.Z.V.

$$\omega_A = \frac{v_A}{a/2} = \frac{3\pi a}{a/2} = 6\pi \text{ rad/s}$$

$$v_{AB} = \omega_A(a) = 6\pi a \text{ m/s}$$

พิจารณาเฟือง B



จุดที่เฟือง B สัมผัสกับเฟือง A ต้องมีความเร็วเท่ากัน และเท่ากับ  $v_{AB}$

จุด O เป็นจุดยึดแน่น มีความเร็วเป็นศูนย์ จุดนี้เป็นจุด I.C.Z.V.

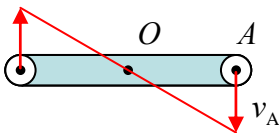
$$\omega_B = \frac{v_{AB}}{a/2} = \frac{6\pi a}{a/2} = 12\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_B = 12\pi \times \frac{60}{2\pi} = 360 \text{ rev/min}$$

Ans

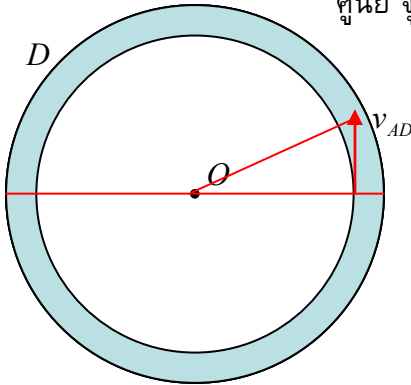
(b)  $\omega_D = 80 \text{ rev/min CCW}$

พิจารณาชิ้นส่วน OA : จุด O เป็นจุดยึดแน่นมีความเร็วเป็นศูนย์ จึงเป็นจุด I.C.Z.V.



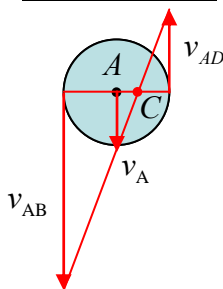
$$v_A = \omega_{OA}(a) = \left(90 \times \frac{2\pi}{60}\right)(a) = 3\pi a \text{ m/s}$$

พิจารณาเฟืองแหวน D เฟืองแหวนหมุนรอบจุดยึดแน่น O จุด O จึงมีความเร็วเป็นศูนย์ จุดนี้เป็นจุด I.C.Z.V.



$$v_{AD} = \omega_D\left(\frac{3}{2}a\right) = \left(80 \times \frac{2\pi}{60}\right)\left(\frac{3}{2}a\right) = 4\pi a \text{ m/s}$$

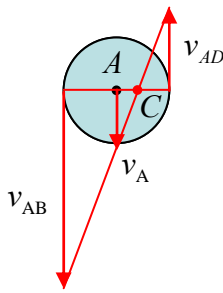
พิจารณาเฟือง A



จุด A ของเฟือง ยึดกับจุด A ของชิ้นส่วน OA จึงมีความเร็วเท่ากัน

จุดที่เฟือง A สัมผัสกับ เฟืองวงแหวน D มีความเร็วเท่ากับ  $v_{AD}$

$$\omega_A = \frac{v_{AD} + v_A}{a/2} = \frac{3\pi a + 4\pi a}{a/2} = 14\pi \text{ rad/s}$$



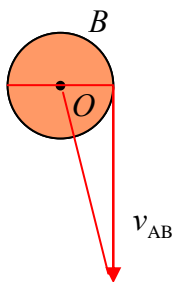
หาค่าแห่งจุด C จากสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{v_A}{v_{AD}} = \frac{3\pi a}{4\pi a} = \frac{\overline{AC}}{a/2 - \overline{AC}}$$

$$\overline{AC} = \frac{3a}{14}$$

$$v_{AB} = \omega_A \left( \frac{3a}{14} + \frac{a}{2} \right) = 14\pi \left( \frac{10a}{14} \right) = 10a\pi \text{ m/s}$$

พิจารณาเฟือง B



จุดที่เฟือง B สัมผัสกับเฟือง A ต้องมีความเร็วเท่ากัน และเท่ากับ  $v_{AB}$

จุด O เป็นจุดยึดแน่น มีความเร็วเป็นศูนย์ จุดนี้เป็นจุด I.C.Z.V.

$$\omega_B = \frac{v_{AB}}{a/2} = \frac{10\pi a}{a/2} = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_B = 20\pi \times \frac{60}{2\pi} = 600 \text{ rev/min}$$

Ans