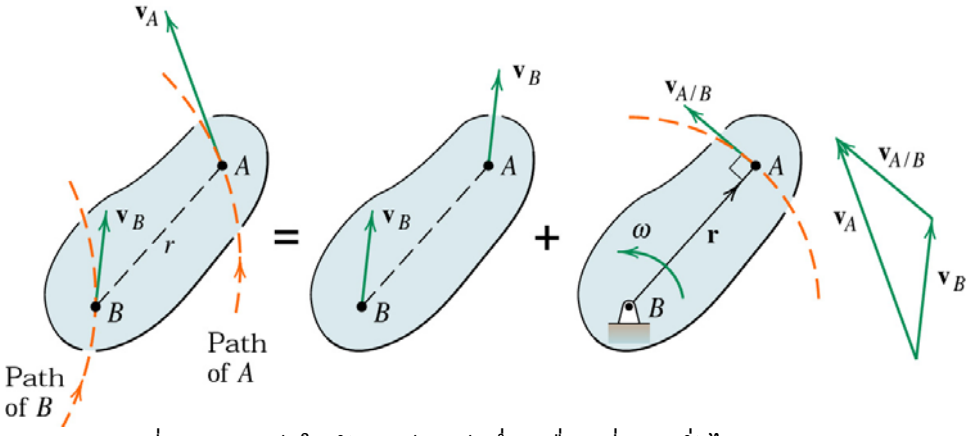
พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 5 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง (ส่วนที่ 3)

5/6 ความเร่งสัมพัทธ์

ในหัวข้อ 5/4 กล่าวถึงการหาความเร็วที่ตำแหน่งใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็งที่เคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ การพิจารณาใช้หลักการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ โดยแยกการเคลื่อนที่ออกเป็นสองส่วน คือการเคลื่อนที่ส่วนของผู้สังเกตซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ และการเคลื่อนที่ของจุดที่ถูกสังเกตซึ่งจะเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุนเป็นวงกลมรอบผู้สังเกต ดังแสดงในรูปที่ 1 จากรูปจะทำให้ทราบทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์ $\vec{v}_{A/B}$ ซึ่งจะตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{BA}$ ซึ่งลากจากจุด B ไปจุด A เสมอ



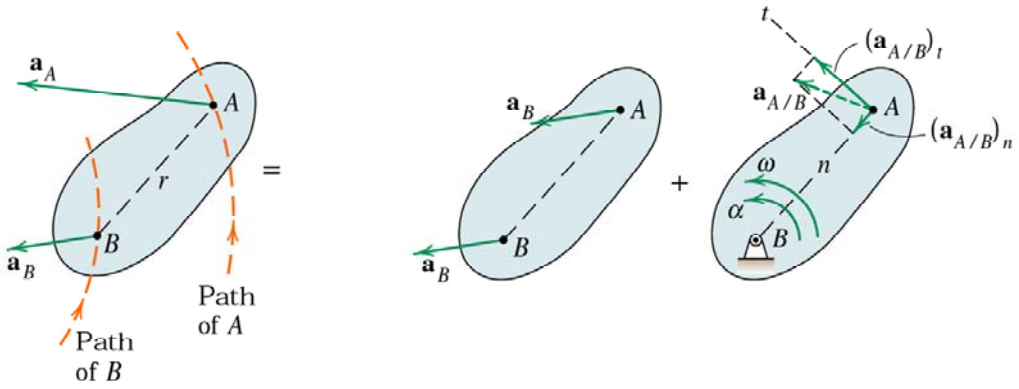
รูปที่ 1 ความเร็วในวัตถุแข็งเกร็งซึ่งเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาความเร่งของตำแหน่งใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็ง การพิจารณาใช้หลักการทำนองเดียวกับความเร็วสัมพัทธ์ที่ได้กล่าวมาข้างต้น รูปที่ 2 แสดงความเร่งบนวัตถุแข็งเกร็งที่จุด A และ B ซึ่งแทนด้วย $\vec{a}_A$ และ $\vec{a}_B$ ตามลำดับ จากรูปจะเห็นว่าสามารถแยกการเคลื่อนที่เป็น 2 ส่วนคือการเคลื่อนที่ของผู้สังเกตที่จุด B และการเคลื่อนที่ของจุดที่ถูกสังเกต A ซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด B เช่นเดียวกับการพิจารณาความเร็ว สมการแสดงความสัมพันธ์ของความเร่งที่ตำแหน่งต่างๆ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \qquad (1)$$

เนื่องจากผู้สังเกต B จะเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบผู้สังเกต ดังนั้นความเร่งสัมพัทธ์ $\vec{a}_{A/B}$ จะสามารถหาได้เช่นเดียวกับการพิจารณาการเคลื่อนที่แบบวงกลม หากใช้ระบบพิกัด n-t ในการพิจารณาดังรูป จะสามารถแยกความเร่งสัมพัทธ์ $\vec{a}_{A/B}$ ออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆ $(\vec{a}_{A/B})_n$ ในแนว n และ $(\vec{a}_{A/B})_t$ ในแนว t ดังนั้นสมการที่ (1) จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t \qquad (2)$$



รูปที่ 2 ความเร่งในวัตถุแข็งเกร็งซึ่งเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ

ขนาดของความเร่งในแต่ละทิศทางหาได้จากความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่แบบวงกลมดังนี้

$$(a_{A/B})_n = v_{A/B}^2 / r = r\omega_{A/B}^2 \quad (3)$$

$$(a_{A/B})_t = \dot{v}_{A/B} = r\alpha_{AB} \quad (4)$$

หรือเขียนในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$(\vec{a}_{A/B})_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5)$$

$$(\vec{a}_{A/B})_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad (6)$$

แนวทางการแก้ปัญหาโจทย์

แนวทางการแก้ปัญหาโจทย์ความเร่ง สามารถสรุปเป็นหลักการและขั้นตอนการแก้ปัญหาทำนองเดียวกับปัญหาความเร็วได้ดังนี้

<u>หลักการ</u>

1. จุดที่ผู้สังเกตอยู่ และจุดที่ต้องการสังเกตอยู่บน<u>วัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกัน</u>
2. ผู้สังเกตที่ B จะเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบผู้สังเกต
3. แยกความเร่งสัมพัทธ์เป็นทิศทาง n-t และหาค่าจากความเร่งของการเคลื่อนที่แบบวงกลม

<u>ขั้นตอนการแก้ปัญหา</u>

1. หาความเร็วแต่ละจุด และความเร็วรอบหมุนของชิ้นส่วนเสียก่อน โดยอาจใช้วิธีความเร็วสัมพัทธ์ หรือใช้การหาจุด I.C.Z.V. ก็ได้
2. เขียนสมการ $\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$ เพื่อหาความเร่งที่จุดที่ต้องการ เนื่องจากสมการนี้เป็นสมการเวคเตอร์ในปัญหาการเคลื่อนที่ในระนาบ (2 มิติ) สมการจึงนี้ประกอบด้วยสมการย่อย 2 สมการ ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ในแนว x และ y ดังนั้นจะแก้สมการนี้ได้จะต้องมีตัวแปรไม่ทราบค่าไม่เกิน 2 ตัว
3. ตรวจสอบว่าตัวแปรอะไรบ้างที่ทราบค่าและตัวแปรอะไรบ้างที่ไม่ทราบค่า โดยเขียนตารางแยกเป็นขนาด (Magnitude) และทิศทาง (Direction) ของตัวแปรแต่ละตัว ดังแสดงด้านล่าง ปัญหาโดยส่วนใหญ่จะแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$

Mag.	×	○	$\omega^2 r$	αr
Dir.	×	○	$\overline{AB}$	$\perp \overline{AB}$

กรณีที่ 2

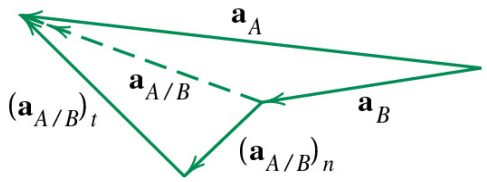
$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$

Mag.	×	○	$\omega^2 r$	×
Dir.	○	○	$\overline{AB}$	$\perp \overline{AB}$

กรณีที่ 1 ทราบข้อมูล $\vec{a}_B$, $(\vec{a}_{A/B})_n$ และ $(\vec{a}_{A/B})_t$ ทั้งหมด แต่ไม่ทราบขนาดและทิศทางของ $\vec{a}_A$

กรณีที่ 2 ไม่ทราบขนาดของ $(\vec{a}_{A/B})_t$ เนื่องจากไม่ทราบค่า α แต่ทราบทิศทางของ $\vec{a}_A$

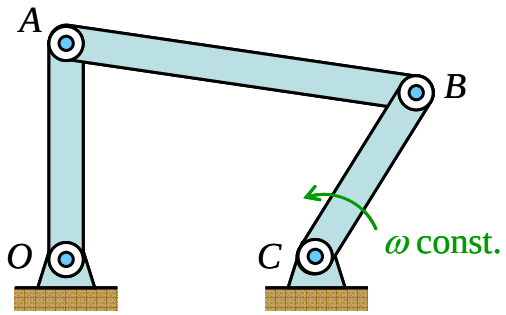
4. คำนวณค่าของความเร่งที่ทราบค่า และหาค่ามุม และทิศทางต่างๆ
5. เขียนแผนภาพเวคเตอร์ตามสมการ $\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$ โดยเริ่มเขียนจากเวคเตอร์ที่รู้ขนาดและทิศทางเสียก่อน เวคเตอร์ของความเร่งที่ไม่ทราบค่าจะเขียนได้ภายหลังเพื่อให้แผนภาพเวคเตอร์ปิดได้ ดังตัวอย่างด้านล่าง



6. คำนวณหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า โดยพิจารณาแผนภาพเวคเตอร์ที่สร้างขึ้น โดยรวมส่วนประกอบของเวคเตอร์ในแนวดิ่งและในแนวระดับให้เท่ากับเวคเตอร์ลัพธ์ $\vec{a}_A$

ตัวอย่างการแก้ปัญหาความเร่ง

พิจารณาข้อต่อด้านล่าง กำหนดความยาวข้อต่อ และความเร็วรอบหมุนของชิ้นส่วน CB คงที่ ให้หาความเร่งของจุด A และความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน AO ที่ตำแหน่งข้อต่อดังแสดงในรูป

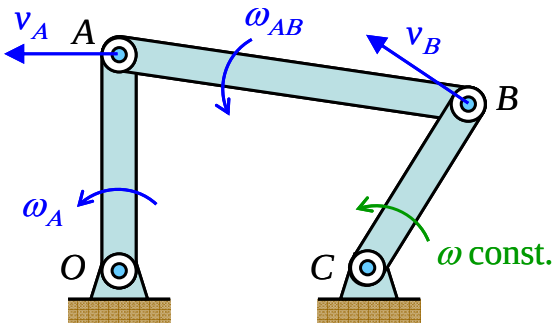


1. หาความเร็วของชิ้นส่วนต่างๆ โดยเขียนสมการความเร็วสัมพัทธ์ได้ดังแสดงด้านล่าง

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

Mag.	×	○	×
Dir.	○	○	$\perp \overline{AB}$

กรณีนี่จะรู้ความเร็วจุด B ทั้งขนาดและทิศทาง และรู้ทิศทางความเร็ว $\vec{v}_A$ เนื่องจากจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด O ดังนั้นความเร็วที่จุด A จึงต้องตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{OA}$ จากสมการจะทราบว่ามีตัวไม่รู้ค่าเพียง 2 ตัว จึงหาค่าตัวไม่ทราบค่าได้ เขียนทิศทางความเร็วในข้อต่อแต่ละชิ้นได้ดังนี้



2. เขียนสมการความเร่ง $\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$

จากสมการนี้จะพบว่า

$\vec{a}_B$ จะรู้ทั้งขนาดและทิศทาง โดยมีทิศทางพุ่งเข้าหาจุด C ตามแนวเส้นตรง $\overline{BC}$ และมีขนาด $a_B = v_B^2 / \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \omega_{CB}^2$ เนื่องจาก B เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด C ด้วยความเร็วคงที่ ดังนั้นความเร่งจะมีเฉพาะความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางเท่านั้น โดยความเร่งในทิศทางสัมผัสมีค่าเป็นศูนย์

$(\vec{a}_{A/B})_n$ จะรู้ขนาดและทิศทาง โดยมีทิศทางพุ่งเข้าหาจุด B ตามแนวเส้นตรง $\overline{AB}$ (คิดเสมือนว่าจุด A หมุนเป็นวงกลมรอบผู้สังเกต B)

$(\vec{a}_{A/B})_t$ จะรู้แต่ทิศทาง (ตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{AB}$) ไม่รู้ขนาดเนื่องจากยังไม่ทราบค่าความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน AB (α_{AB})

$\vec{a}_A$ ไม่รู้ทั้งขนาดและทิศทาง

จะพบว่าพิจารณาสมการที่ยกมาข้างต้นจะมีตัวแปรถึง 3 ตัว คือ ขนาดของ $(\vec{a}_{A/B})_t$ และขนาดและทิศทางของ $\vec{a}_A$ ทำให้ยังไม่สามารถหาค่าได้

กรณีนี้จะต้องแยกคิด $\vec{a}_A$ เป็นทิศทาง n-t เช่นกันดังนี้ โดยเขียนสมการได้ดังนี้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

$$(\vec{a}_A)_n + (\vec{a}_A)_t = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

จากสมการนี้เมื่อพิจารณา $\vec{a}_A$ จะพบว่า

$(\vec{a}_A)_n$ จะรู้ทั้งขนาดและทิศทาง โดยมีทิศทางพุ่งเข้าหาจุด O ตามแนวเส้นตรง $\overline{OA}$ และมีขนาด $(a_A)_n = v_A^2 / \overline{OA} = \overline{OA} \cdot \omega_{OA}^2$

$(\vec{a}_A)_t$ จะรู้แต่ทิศทาง (ตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{OA}$) ไม่รู้ขนาดเนื่องจากยังไม่ทราบค่าความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน OA (α_{OA})

จะเห็นว่าเมื่อแยกคิด $\vec{a}_A$ เป็นทิศทาง n-t จะทำให้ตัวไม่ทราบค่าที่เกี่ยวข้องกับ $\vec{a}_A$ เหลือเพียงขนาดของ $(\vec{a}_A)_t$ เท่านั้น และจากสมการความเร่งสัมพัทธ์ จะเหลือตัวไม่ทราบค่าเพียงแค่ 2 ตัว จึงสามารถหาค่าได้

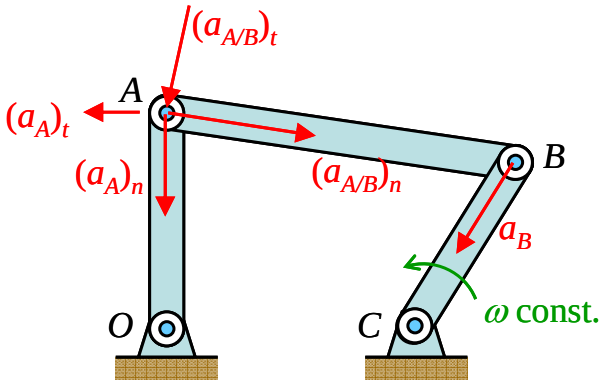
ค่าต่างๆ สามารถสรุปได้ดังนี้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

$$(\vec{a}_A)_n + (\vec{a}_A)_t = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

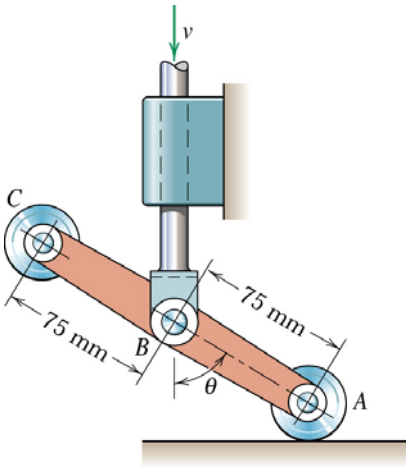
Mag.	$\omega_A^2 r_A$	×	○	$\omega_{AB}^2 \overline{AB}$	×
Dir.	○	○	○	$\overline{AB}$	$\perp \overline{AB}$

และสามารถเขียนทิศทางความเร่งในข้อต่อแต่ละชิ้นได้ดังนี้



3. เมื่อทราบค่าต่างๆ ในตารางแล้ว นำมาเขียนเวคเตอร์ความเร่ง จะหาค่าที่ต้องการได้

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์

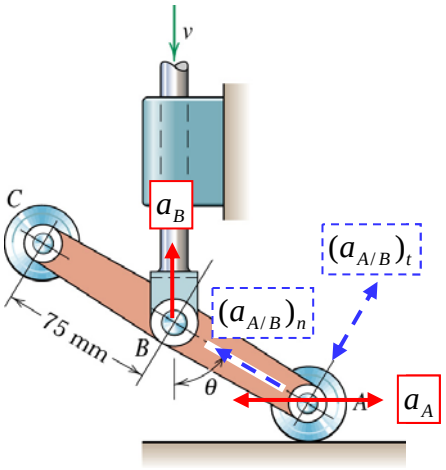


5/147 If the velocity v of the control rod is 0.9 m/s and is decreasing at the rate of 6 m/s^2 when $\theta = 60^o$, determine the magnitude of the acceleration of C. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/147]

วิธีทำ จากตัวอย่างในหัวข้อความเร็วสัมพัทธ์ จะได้ข้อมูลความเร็วดังนี้

$$\omega_{AB} = \omega_{BC} = 13.856 \text{ rad/s} \quad \text{CCW}$$

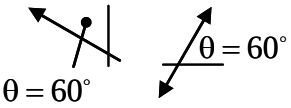
เนื่องจากไม่รู้ความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน ABC และไม่รู้ขนาด และทิศทางความเร่งที่จุด C จึงไม่สามารถหาความเร่งที่จุด C โดยตรงจากข้อมูลความเร่งที่จุด B ได้ ในข้อนี้จึงจำเป็นต้องหาความเร่งที่จุด A ซึ่งรู้ทิศทางความเร่งแน่นอนก่อน (ทิศทางขนานกับแนวระดับ)



เขียนสมการความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างจุด A และ B

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

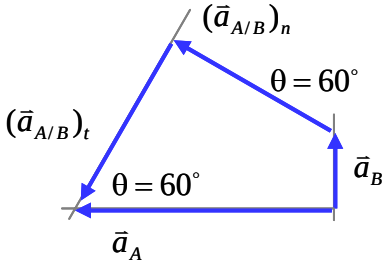
ขนาด	X	6	$\omega_{AB}^2 \cdot \overline{AB}$	X
ทิศทาง	↔	↑	$// \overline{AB}$	$\perp \overline{AB}$



จากตารางพบว่ามีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัว ดังนั้นจึงสามารถหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้ หาค่าขนาดความเร่งที่ทราบค่าก่อน

$$(a_{A/B})_n = (13.856^2)(0.075) = 14.3992 \text{ m/s}^2$$

เขียนแผนภาพเวคเตอร์ได้ดังนี้



จากแผนภาพเวคเตอร์ สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของเวคเตอร์ต่างๆ ได้ดังนี้

พิจารณาในแนวดิ่ง

$$a_B + (a_{A/B})_n \cos 60^\circ - (a_{A/B})_t \sin 60^\circ = 0$$

$$6 + (14.3992)\cos 60^\circ - (a_{A/B})_t \sin 60^\circ = 0$$

$$(a_{A/B})_t = 15.2416 \text{ m/s}^2$$

พิจารณาในแนวระดับ

$$a_A = (a_{A/B})_n \sin 60^\circ + (a_{A/B})_t \cos 60^\circ$$

$$a_A = (14.3992)\sin 60^\circ + (15.2416)\cos 60^\circ$$

$$a_A = 20.0909 \text{ m/s}^2$$

จาก $(a_{A/B})_t = \alpha_{AB}\,\overline{AB}$

$$\alpha_{AB} = 15.2416/0.075 = 203.2213 \text{ rad/s}^2 \quad \text{CW}$$

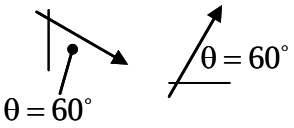
$$\alpha_{BC} = \alpha_{AB} = 203.2213 \text{ rad/s}^2 \quad \text{CW}$$

เนื่องจากเป็นวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกัน

เขียนสมการความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างจุด B และ C

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + (\vec{a}_{C/B})_n + (\vec{a}_{C/B})_t$$

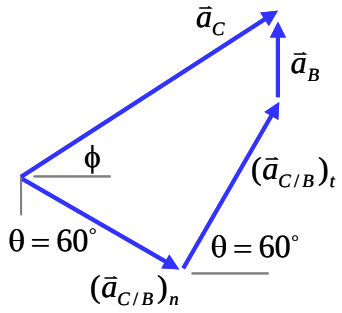
ขนาด	X	6	$\omega_{AB}^2 \cdot \overline{BC}$	$\alpha_{AB} \cdot \overline{BC}$
ทิศทาง	X	↑	$// \overline{BC}$	$\perp \overline{BC}$



$$(a_{C/B})_n = (13.856^2)(0.075) = 14.3992 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{C/B})_t = (203.2213)(0.075) = 15.2416 \text{ m/s}^2$$

เขียนแผนภาพความเร็วได้ดังนี้



จากแผนภาพเวคเตอร์ สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของเวคเตอร์ต่างๆ ได้ดังนี้

พิจารณาในแนวดิ่ง

$$-(a_{A/B})_n \cos 60^\circ + (a_{A/B})_t \sin 60^\circ + a_B = a_C \sin\phi$$

$$-14.3992 \cdot \cos 60^\circ + 15.2416 \cdot \sin 60^\circ + 6 = a_C \sin\phi$$

$$a_C \sin\phi = 12 \qquad (1)$$

พิจารณาในแนวระดับ

$$(a_{C/B})_n \sin 60^\circ + (a_{C/B})_t \cos 60^\circ = a_C \cos\phi$$

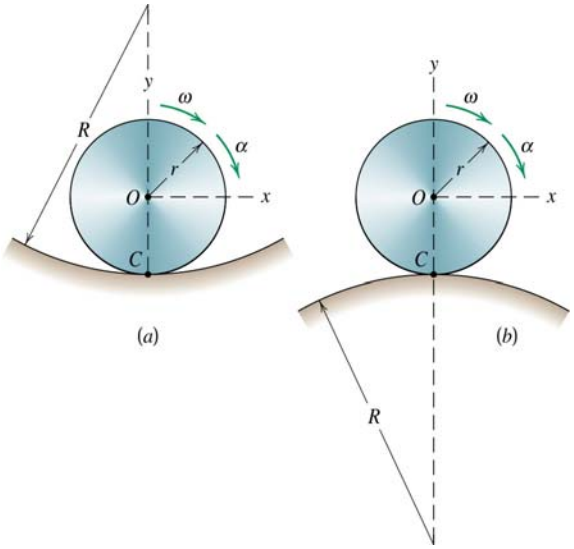
$$14.3992 \cdot \sin 60^\circ + 15.2416 \cdot \cos 60^\circ = a_C \cos\phi$$

$$a_C \cos\phi = 20.0909 \qquad (2)$$

จาก (1) และ (2)

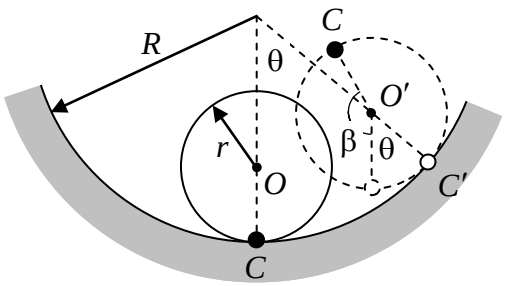
$$a_C = \sqrt{(a_C \sin\phi)^2 + (a_C \cos\phi)^2} = \sqrt{12^2 + 20.0909^2} = 23.4 \text{ m/s}^2$$ Ans

5/140 If the wheel in each case rolls on the circular surface without slipping, determine the acceleration of point *C* on the wheel momentarily in contact with the circular surface. The wheel has an angular velocity ω and an angular acceleration α. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/140]



วิธีทำ โจทย์กำหนดความเร็วและความเร่งเชิงมุมของการหมุนมา นำข้อมูลนี้มาหาความเร็วและความเร่งที่จุดศูนย์กลางได้ดังนี้

พิจารณาการเคลื่อนที่ของล้อกรณี (a)



เริ่มแรกล้อมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด O และสัมผัสพื้นที่จุด C เมื่อล้อหมุนไปเป็นมุม β กับแนวดิ่ง ล้อจะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ O' และสัมผัสพื้นที่จุด C' ระยะทางตามโค้งที่ล้อกลิ้งไป CC' หาได้ดังนี้

$$CC' = R\theta = r(\beta + \theta)$$

$$(R-r)\theta = r\beta$$

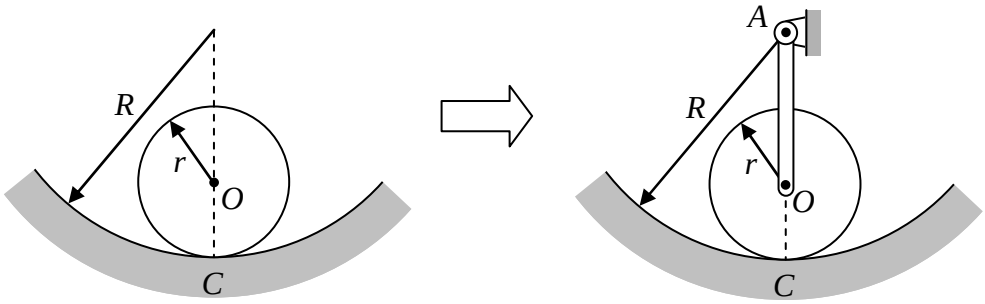
$$(R-r)\dot{\theta} = v_O = r\dot{\beta} = r\omega \qquad (1)$$

$$(R-r)\ddot{\theta} = (a_O)_x = r\ddot{\beta} = r\alpha \qquad (2)$$

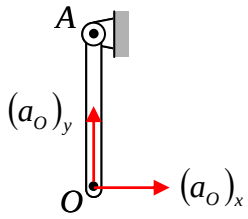
จากสมการ (1) และ (2) เมื่อทราบความเร็ว และความเร่งเชิงมุมของการหมุน จะหาข้อมูลความเร็วและความเร่งในแนว x ที่จุดศูนย์กลางได้ (เนื่องจากจุดศูนย์กลางล้อเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางวงกลมใหญ่ ดังนั้นความเร่งที่หาได้จากสมการ (2) จะไม่ใช่ความเร่งทั้งหมดของจุด O)

ในทำนองเดียวกัน กรณี (b) ก็สามารถทำได้และได้ผลเช่นเดียวกัน

กรณี (a) เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาจะทำการเพิ่มข้อต่อ OA เข้าไปดังรูป การเพิ่มข้อต่อนี้ไม่ทำให้การเคลื่อนที่ของล้อเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม



เนื่องจากจุด O หมุนเป็นวงกลมรอบจุด A พิจารณาชิ้นส่วน OA จะหาความเร่งที่จุด O ได้ดังนี้



$$(\vec{a}_O)_x = \alpha r$$

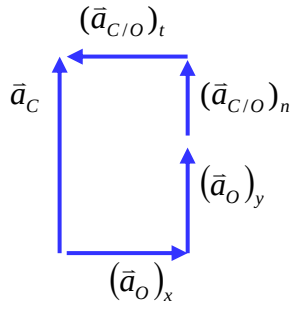
$$(\vec{a}_O)_y = \frac{v_O^2}{R-r} = \frac{(\omega r)^2}{R-r}$$

เขียนสมการความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างจุด O และ C

$$\vec{a}_C = (\vec{a}_O)_x + (\vec{a}_O)_y + (\vec{a}_{C/O})_n + (\vec{a}_{C/O})_t$$

ขนาด	X	αr	$\frac{(\omega r)^2}{R-r}$	$\omega^2 r$	αr
ทิศทาง	X	→	↑	↑	←

จากตารางสามารถเขียนแผนภาพเวคเตอร์ได้ดังนี้

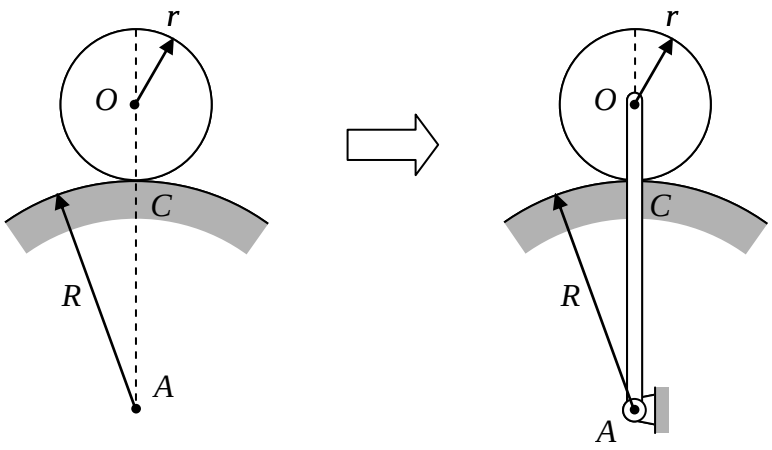


จากแผนภาพเวคเตอร์จะได้

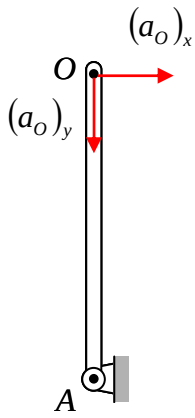
$$a_C = (a_O)_y + (a_{C/O})_n$$

$$a_C = \frac{(\omega r)^2}{R-r} + \omega^2 r = \omega^2 r\left(\frac{R}{R-r}\right)$$ Ans

กรณี (b) สามารถทำได้ทำนองเดียวกับกรณี (a) ดังนี้



เนื่องจากจุด O หมุนเป็นวงกลมรอบจุด A พิจารณาชิ้นส่วน OA จะหาความเร่งที่จุด O ได้ดังนี้



$$(\vec{a}_O)_x = \alpha r$$

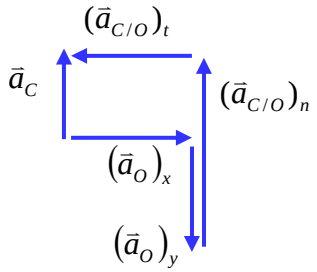
$$(\vec{a}_O)_y = \frac{v_O^2}{R+r} = \frac{(\omega r)^2}{R+r}$$

เขียนสมการความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างจุด O และ C

$$\vec{a}_C = (\vec{a}_O)_x + (\vec{a}_O)_y + (\vec{a}_{C/O})_n + (\vec{a}_{C/O})_t$$

ขนาด	X	αr	$\frac{(\omega r)^2}{R+r}$	$\omega^2 r$	αr
ทิศทาง	X	→	↓	↑	←

จากตารางสามารถเขียนแผนภาพเวคเตอร์ได้ดังนี้



จากแผนภาพเวคเตอร์จะได้

$$a_C = (a_{C/O})_n - (a_O)_y$$

$$a_C = \omega^2 r - \frac{(\omega r)^2}{R+r} = \omega^2 r\left(\frac{R}{R+r}\right)$$ Ans

หมายเหตุ ขนาดของ $(\vec{a}_{C/O})_n$ มากกว่า $(\vec{a}_O)_y$ เสมอ ดังนั้น $\vec{a}_C$ จะมีทิศทางชี้ขึ้นเสมอ