พลศาสตร์ (Dynamics)

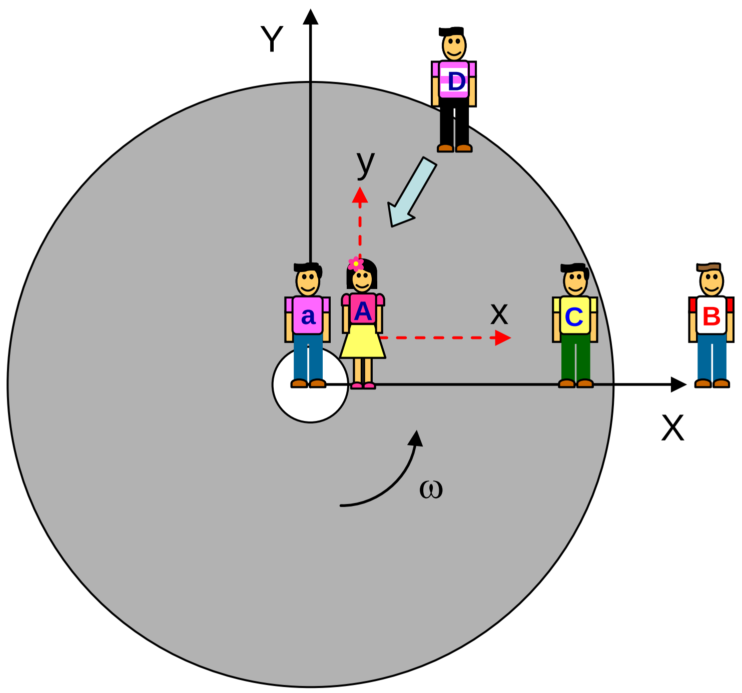
บทที่ 5 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง (ส่วนที่ 4)

5/7 Motion Relative to Rotating Axes

การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ที่เรียนมาในหัวข้อก่อนๆ เป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งซึ่งสังเกตโดยผู้สังเกตซึ่งใช้ระบบพิกัดฉากที่ไม่มีการหมุน อย่างไรก็ตามหลายๆ ครั้ง กลไกที่ต้องการวิเคราะห์การเคลื่อนที่อาจจะไม่ได้เชื่อมต่อกันด้วยวัตถุแข็งเกร็ง แต่เกิดการเคลื่อนที่แบบเลื่อนไถลกัน การเคลื่อนที่แบบนี้ไม่สามารถใช้วิธีการในหัวข้อที่แล้วในการหาความเร่งได้ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยผู้สังเกตซึ่งใช้แกนพิกัดหมุน ซึ่งสามารถใช้แก้ปัญหาเหล่านี้ได้ รวมถึงสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาในหัวข้อก่อนๆ ได้ด้วย

เพื่อให้เข้าใจถึงความแตกต่างของปัญหาที่สามารถพิจารณาโดยใช้แกนพิกัดซึ่งไม่หมุน ดังที่เรียนในหัวข้อก่อน และปัญหาซึ่งต้องพิจารณาด้วยแกนพิกัดหมุน พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 การเคลื่อนที่บนจานหมุน



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่บนจานหมุน

รูปที่ 1 แสดงการเคลื่อนที่บนจานหมุน (วงกลมสีเทา) ซึ่งมีรูตรงกลาง ดังนั้นในรูป a และ B จะยืนอยู่นิ่งนอกจานหมุน ส่วน A, C และ D ยืนอยู่บนจานหมุนและหมุนไปพร้อมกับจานหมุน พิกัด X-Y เป็นพิกัดที่อยู่นิ่งเทียบกับโลก ส่วนพิกัด x-y จะเป็นพิกัดซึ่งหมุนไปพร้อม

กับจานหมุน สมมุติให้จานมีขนาดใหญ่ ดังนั้น a กับ A จะถือว่ายืนอยู่ตำแหน่งเดียวกันที่จุดกำเนิดของแกนพิกัด X-Y และ x-y

กำหนดให้ a เป็นผู้สังเกตอยู่บนแกนหยุดนิ่งส่วน A เป็นผู้สังเกตซึ่งอยู่บนแกนหมุน ความเร็วที่ผู้สังเกตสังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุเรียกว่า $\bar{v}_{rel}$ (ในกรณีที่ผู้สังเกตเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ เราได้ทราบจากหัวข้อที่เรียนก่อนแล้วว่า $\bar{v}_{rel} = \bar{v}_{B/A}$)

1. ผู้สังเกต a และ A สังเกตการเคลื่อนที่ของ B

กรณีที่ผู้สังเกต a สังเกตการเคลื่อนที่ของ B นั้น จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_B = \bar{v}_a + \bar{v}_{B/a}$ เนื่องจาก a และ B อยู่นิ่ง a จึงเห็น B อยู่นิ่งด้วย ดังนั้นความเร็วทุกตัวในสมการความเร็วสัมพัทธ์จะเป็นศูนย์หมดทำให้สมการเป็นจริง ค่า $\bar{v}_{B/a}$ ในกรณีนี้จะเท่ากับความเร็วที่ผู้สังเกต a สังเกตการเคลื่อนที่ของ B ($\bar{v}_{B/a} = \bar{v}_{rel} = 0$)

ในกรณีผู้สังเกต A สังเกตการเคลื่อนที่ของ B นั้น จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A}$ เนื่องจากจุด A อยู่ที่จุดกำเนิดของแกนหมุน พิกัดจุด A จึงไม่มีการเปลี่ยนแปลง $\bar{v}_A = 0$ และจากรูป B ยืนอยู่นิ่ง $\bar{v}_B = 0$ ดังนั้นจะได้ $\bar{v}_{B/A} = 0$ อย่างไรก็ตามเนื่องจาก A เคลื่อนที่ไปพร้อมกับจานหมุน ดังนั้น A จะมองเห็น B เคลื่อนที่ ดังนั้น $\bar{v}_{rel}$ จึงมีค่าในกรณีนี้ $\bar{v}_{B/A} \neq \bar{v}_{rel}$

2. ผู้สังเกต a และ A สังเกตการเคลื่อนที่ของ C

กรณีที่ผู้สังเกต a สังเกตการเคลื่อนที่ของ C นั้น จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_C = \bar{v}_a + \bar{v}_{C/a}$ เนื่องจาก a อยู่นิ่ง ส่วน C จะหมุนไปพร้อมกับจาน a จึงเห็น C หมุนไปพร้อมกับจาน โดยเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบ a ในที่นี้ $\bar{v}_a = 0$ ส่วน $\bar{v}_C = \bar{v}_{C/a} = \bar{v}_{rel}$

อย่างไรก็ตาม ในกรณีผู้สังเกต A สังเกตการเคลื่อนที่ของ C นั้น จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{C/A}$ เนื่องจาก $\bar{v}_A = 0$ ดังนั้น $\bar{v}_C = \bar{v}_{C/A}$ เท่ากับความเร็วการหมุนเป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลาง แต่ในกรณีนี้ A หมุนไปพร้อมกับจานและพร้อมๆ กับ C ดังนั้น A จะมองเห็นว่า C หยุดนิ่ง $\bar{v}_{rel} = 0$ กรณีนี้ $\bar{v}_{C/A} \neq \bar{v}_{rel}$

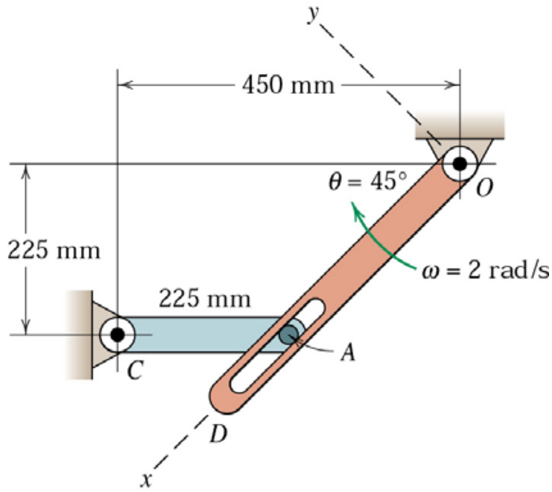
3. ผู้สังเกต a และ A สังเกตการเคลื่อนที่ของ D

สมการความเร็วสัมพัทธ์ในกรณีนี้ คือ $\bar{v}_D = \bar{v}_a + \bar{v}_{D/a}$ โดย $\bar{v}_a = 0$ เนื่องจาก D จะหมุนไปพร้อมกับจาน พร้อมๆ กับเดินเข้ามาหา a ที่จุดศูนย์กลาง ดังนั้น a จึงเห็น D หมุนไปพร้อมกับจานและเดินเข้าหาพร้อมๆ กัน

อย่างไรก็ตาม ในกรณีผู้สังเกต A สังเกตการเคลื่อนที่ของ D นั้น เนื่องจาก A หมุนไปพร้อมกับจานและพร้อมๆ กับ D ดังนั้น A จะมองเห็นว่า D เดินตรงเข้ามาหา A เพียงอย่างเดียว จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{D/A} = \bar{v}_{D/A}$ จะพบว่า $\bar{v}_{D/A} \neq \bar{v}_{rel}$

จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า ผู้สังเกตที่หยุดนิ่ง a (รวมถึงผู้สังเกตที่เคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ด้วย) จะสังเกตการเคลื่อนที่ได้ถูกต้อง ($\bar{v}_{xx/a} = \bar{v}_{rel}$) แต่ผู้สังเกตที่กำลังเคลื่อนที่แบบหมุนจะไม่สามารถสังเกตการเคลื่อนที่ได้ถูกต้อง ($\bar{v}_{xx/A} \neq \bar{v}_{rel}$) เนื่องจากผู้สังเกตที่เคลื่อนที่แบบหมุนไม่สามารถสังเกตการหมุนของตัวเองและวัตถุที่สังเกตได้ (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 1.2)

ตัวอย่างที่ 2 กลไกแบบเลื่อนไถล



รูปที่ 2 กลไกแบบเลื่อนไถล

จากรูปที่ 2 กำหนดความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วน OD เท่ากับ 2 rad/s คงที่ ต้องการหาความเร็วและความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน CA ปัญหานี้สามารถเขียนสมการความเร็วสัมพัทธ์ของความเร็วและความเร่ง ดังวิธีการที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้าได้ดังนี้

กำหนดให้จุด P เป็นจุดบนชิ้นส่วน OD ซึ่งอยู่ทับกับจุด A บนชิ้นส่วน CA ในขณะนั้น

<u>ความเร็วสัมพัทธ์</u>

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{A/P}$$

	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_P$	$\vec{v}_{A/P}$
Amp.	X	$\omega(\overline{OP})$	X
Dir.	$\perp AC$	$\perp OD$	$// OD$

จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ พบว่ามีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัวจึงสามารถหาค่า $\vec{v}_A$ และ $\vec{v}_{A/P}$ ได้

<u>ความเร่งสัมพัทธ์</u>

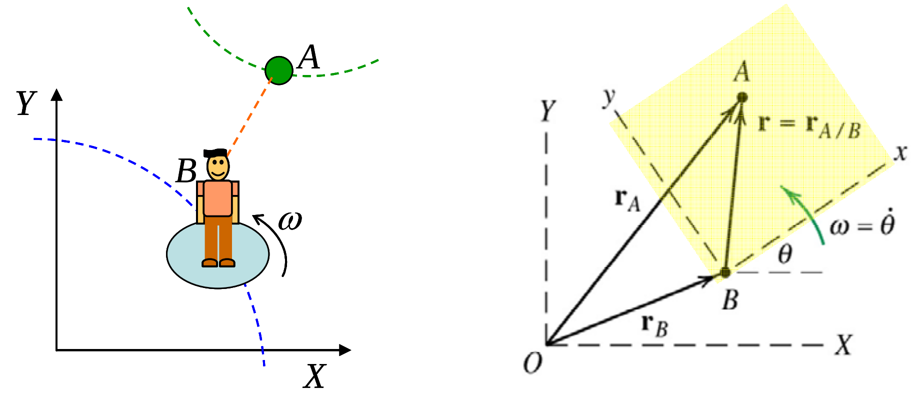
$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{A/P}$$

$$(\vec{a}_A)_n + (\vec{a}_A)_t = (\vec{a}_P)_n + (\vec{a}_P)_t + (\vec{a}_{A/P})$$

	$(\vec{a}_A)_n$	$(\vec{a}_A)_t$	$(\vec{a}_P)_n$	$(\vec{a}_P)_t$	$(\vec{a}_{A/P})$
Amp.	$\omega_{AC}^2(\overline{AC})$	X	$\omega^2(\overline{OP})$	0	X
Dir.	$\longleftarrow$	$\updownarrow$	$// OD$	$\perp OD$	X

จากสมการจะพบว่าไม่ทราบค่า $\vec{a}_{A/P}$ เนื่องจากชิ้นส่วน OD กับ AC ไม่ใช่เป็นวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกัน แต่เป็นชิ้นส่วนคนละชิ้นที่เลื่อนไถลกัน ดังนั้นจะไม่สามารถคิดแบบเดียวกับปัญหาความเร่งสัมพัทธ์ในหัวข้อก่อนหน้าได้ ในกรณีนี้จำเป็นต้องใช้วิธีการความเร็วสัมพัทธ์ในกรณีแกนหมุนแก้ปัญหา

การสร้างสมการความเร็วสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตอยู่บนแกนหมุน



(ก) (ข)

รูปที่ 3 การสังเกตการเคลื่อนที่ โดยผู้สังเกตที่เคลื่อนที่และหมุนไปด้วย

รูปที่ 3(ก) แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ A ซึ่งสังเกตโดยผู้สังเกต B ซึ่งเคลื่อนที่ตามแนวเส้นประสีน้ำเงิน และหมุนไปพร้อมๆ กันด้วย รูปที่ 3(ก) สามารถเขียนในรูปเวคเตอร์การเคลื่อนที่ได้ดังแสดงในรูป 3(ข) เนื่องจากผู้สังเกตหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω ดังนั้นการสังเกตโดยผู้สังเกตจะใช้ระบบพิกัด x-y ซึ่งแกนพิกัดจะหมุนไปด้วยความเร็วเชิงมุม ω เช่นกัน ส่วนแกนพิกัด X-Y แสดงแกนพิกัดอ้างอิง ซึ่งอยู่นิ่ง

จากรูปที่ 3(ข) สามารถเขียนสมการแสดงตำแหน่งการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

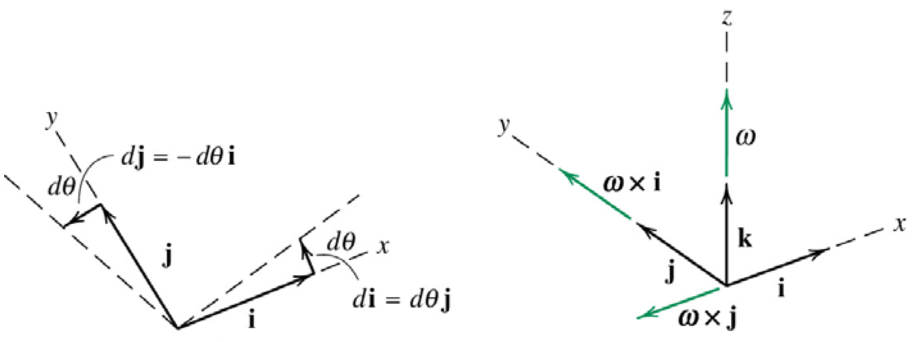
$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r} = \vec{r}_B + (x\hat{i} + y\hat{j}) \qquad (1)$$

โดย x, y เป็นพิกัดซึ่งวัดได้จากระบบพิกัดหมุน x-y ส่วน $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ แสดงเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x และ y ตามลำดับ

ความเร็วของ A สามารถหาได้โดยหาอนุพันธ์สมการ (1) เทียบกับเวลาดังนี้

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \frac{d(x\hat{i} + y\hat{j})}{dt} \qquad (2)$$

ในกรณีที่ผู้สังเกตเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่เพียงอย่างเดียว $\dfrac{d(x\hat{i} + y\hat{j})}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ ซึ่งจะเหมือนกับสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ที่ได้เรียนมาแล้ว อย่างไรก็ตามเนื่องจากในกรณีนี้แกนพิกัด x-y หมุน ดังนั้นทิศทางของเวคเตอร์ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ จะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา การหาอนุพันธ์จึงต้องหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยด้วย



(ก) (ข)

รูปที่ 4 การหาค่าอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$ และ $\hat{j}$

รูปที่ 4 แสดงการหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ จากรูปจะได้ว่า

$$d\hat{i} = d\theta\hat{j} \qquad \text{และ} \qquad d\hat{j} = -d\theta\hat{i}$$

ดังนั้น
$$\dot{\hat{i}} = \omega\hat{j} \qquad \text{และ} \qquad \dot{\hat{j}} = -\omega\hat{i} \tag{3}$$

หรือเขียนในรูปผลการครอสเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\dot{\hat{i}} = \vec{\omega}\times\hat{i} \qquad \text{และ} \qquad \dot{\hat{j}} = \omega\times\hat{j} \tag{4}$$

แทนความสัมพันธ์ในสมการ (4) ลงในสมการ (2) จะสามารถหาความเร็วได้ดังนี้

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \frac{d(x\hat{i} + y\hat{j})}{dt}$$

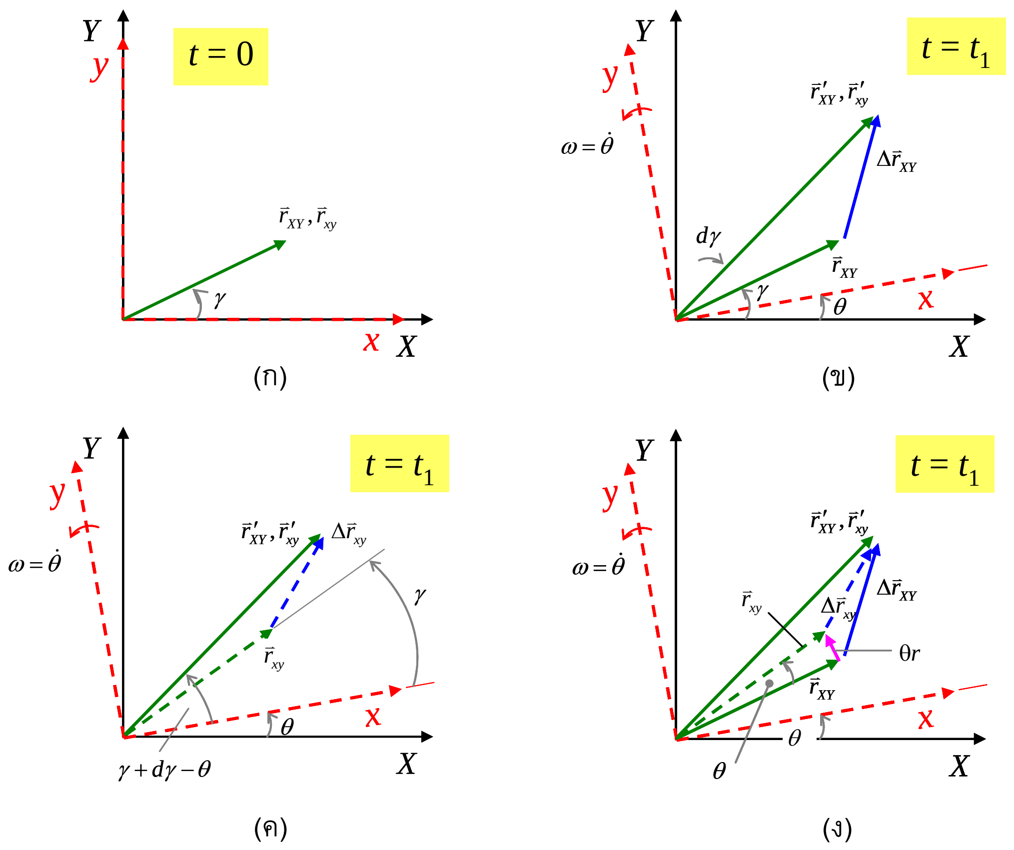
$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}}) + (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) \tag{5}$$

เทอม $x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} = \vec{\omega}\times x\hat{i} + \vec{\omega}\times y\hat{j} = \vec{\omega}\times(x\hat{i} + y\hat{j}) = \vec{\omega}\times\vec{r}$

เทอม $\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ แสดงความเร็วเมื่อเทียบกับแกน x-y หรือก็คือความเร็วที่ผู้สังเกต สังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุได้นั่นเอง เรียกเทอมนี้ว่าความเร็วสัมพัทธ์ที่ผู้สังเกตสังเกตได้ $\vec{v}_{rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ ดังนั้นสมการ (5) จะเขียนได้ดังนี้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}_{rel} \tag{7}$$

จะพบว่า สมการนี้จะคล้ายคลึงกับสมการความเร็วสัมพัทธ์ในหัวข้อก่อนๆ เพียงแต่จะมีเทอม $\vec{\omega}\times\vec{r}$ เพิ่มเข้ามา เนื่องจากผู้สังเกตที่หมุนจะไม่สามารถสังเกตการหมุนได้

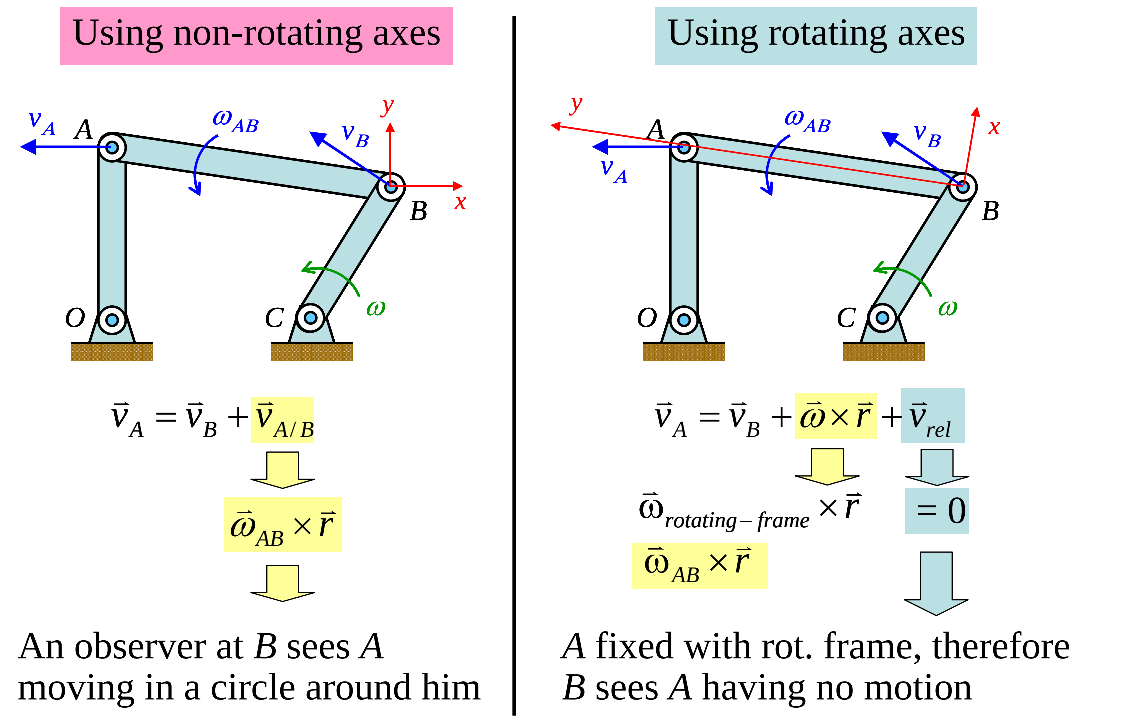


รูปที่ 5 ความแตกต่างระหว่างการสังเกตโดยอ้างอิงแกนหยุดนิ่ง และแกนหมุน

รูปที่ 5 แสดงความแตกต่างของการสังเกตโดยใช้แกนหยุดนิ่ง และแกนหมุน รูปที่ 5(ก) แสดงจุดเวลา t=0 ที่จุดนี้แกนหยุดนิ่ง X-Y อยู่ซ้อนกับแกนหมุน x-y โดยตำแหน่งของวัตถุที่สังเกตแสดงโดยเวคเตอร์ $\vec{r}_{XY}$ และ $\vec{r}_{xy}$ เมื่อสังเกตจากแกนหยุดนิ่งและสังเกตจากแกนหมุนตามลำดับ เมื่อเวลาผ่านไปเป็น $t=t_1$ ดังแสดงในรูป 5(ข) แกนหมุนจะหมุนไปเป็นมุม θ ส่วนวัตถุเคลื่อนที่ไปที่ตำแหน่ง $\vec{r}'_{XY}$ และ $\vec{r}'_{xy}$ เมื่อเทียบกับแกนหยุดนิ่งและแกนหมุน เวคเตอร์แสดงการเคลื่อนที่เมื่อสังเกตจากผู้สังเกตที่หยุดนิ่ง คือ $\Delta\vec{r}_{XY}$

รูปที่ 5(ค) แสดงการสังเกตการเคลื่อนที่โดยผู้สังเกตบนแกนหมุน ผู้สังเกตจะพบว่าตำแหน่งเดิมของวัตถุอยู่ที่ $\vec{r}_{xy}$ และเมื่อเวลา $t=t_1$ วัตถุจะเคลื่อนที่ไปที่ $\vec{r}'_{xy}$ เวคเตอร์แสดงการเคลื่อนที่เมื่อสังเกตจากผู้สังเกตบนแกนหมุน คือ $\Delta\vec{r}_{xy}$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าแตกต่างจากเวคเตอร์ $\Delta\vec{r}_{XY}$ ที่แสดงในรูปที่ 5(ข)

รูปที่ 5(ง) แสดงความแตกต่างของเวคเตอร์ $\Delta\vec{r}_{XY}$ กับเวคเตอร์ $\Delta\vec{r}_{xy}$ โดย $\Delta\vec{r}_{XY} = \Delta\vec{r}_{xy} + \theta r$ จากรูปนี้แสดงให้เห็นว่าผู้สังเกตที่อยู่บนแกนหมุนจะไม่สามารถสังเกตการหมุนของแกนได้ ผลการสังเกตจากผู้สังเกตบนแกนหมุนจึงต้องบวกเวคเตอร์ θr เข้าไปด้วยจึงจะได้ค่าที่ถูกต้อง (สำหรับความเร็ว คือการบวกเทอม $\vec{\omega}\times\vec{r}$ เพิ่มเข้าไปนั้นเอง)



รูปที่ 6 การเปรียบเทียบปัญหากลไกข้อต่อโดยใช้แกนไม่หมุนและแกนหมุน

รูปที่ 6 แสดงการเปรียบเทียบการแก้ปัญหากลไกข้อต่อ เนื่องจากกลไกข้อต่อต่อกันด้วยชิ้นส่วนแข็งเกร็ง AB ดังนั้นปัญหานี้จึงสามารถแก้ได้ทั้งโดยการวิเคราะห์แบบความเร็วสัมพัทธ์ (ที่เรียนในหัวข้อก่อนหน้า) ทางด้านซ้ายมือ กับการใช้แกนหมุนทางด้านขวามือ ในกรณีใช้ความเร็วสัมพัทธ์ และแกนพิกัดของผู้สังเกต B ไม่หมุน B จะมองเห็น A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด B ดังนั้น $\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}$ อย่างไรก็ตามถ้าใช้การพิจารณาแบบแกนหมุน โดยตั้งแกนหมุนดังรูปทางด้านขวามือ จะพบว่าจุด A และจุด B จะเป็นจุดที่ไม่เคลื่อนที่เทียบกับแกน x-y ที่ตั้งขึ้น ดังนั้นผู้สังเกตที่ B จะมองเห็น A อยู่นิ่ง (พิกัดเดิมบนแกน x-y ตลอดเวลา) $\vec{v}_{rel} = 0$ อย่างไรก็ตามสมการจากการพิจารณาโดยใช้แกนหมุนจะเหมือนกับการพิจารณาแบบความเร็วสัมพัทธ์ที่เรียนมาแล้ว เนื่องจากมีพจน์ $\vec{\omega}_{rotating-frame} \times \vec{r} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}$ เพิ่มเข้ามา

การสร้างสมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตบนแกนหมุน

สมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตบนแกนหมุนสามารถสร้างได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการความเร็วสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตบนแกนหมุน (สมการ (7)) เทียบกับเวลา ดังนี้

จาก $$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

ดังนั้น $$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{v}}_{rel} \qquad (8)$$

พิจารณาเทอม $\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j}) = (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}}) + (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j})$$

$$= \vec{\omega}\times\vec{r} + v_{rel}$$

เพราะฉะนั้น $$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r} + v_{rel}) = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} \qquad (9)$$

พิจารณาเทอม $\dot{\vec{v}}_{rel}$

$$\dot{\vec{v}}_{rel} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) = (\dot{x}\dot{\hat{i}} + \dot{y}\dot{\hat{j}}) + (\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j})$$

$$= \vec{\omega}\times(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) + (\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j})$$

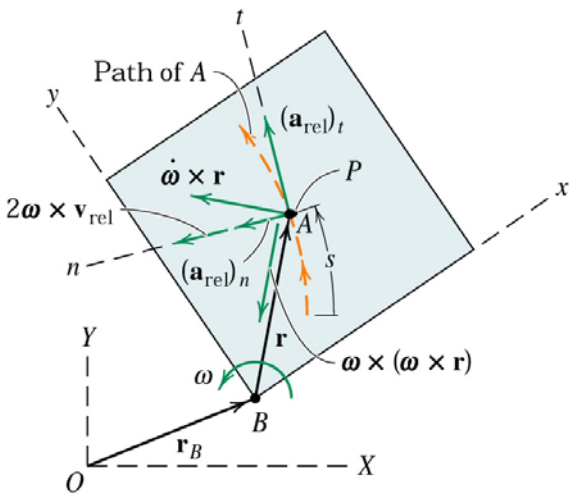
$$= \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \qquad (10)$$

โดย $\vec{a}_{rel}$ หมายถึงความเร่งที่สังเกตได้จากแกนหมุน

แทนสมการ (9) และ (10) ลงในสมการ (8) จะได้สมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตบนแกนหมุนดังนี้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \qquad (11)$$

เพื่อให้ง่ายต่อการจดจำสมการ (11) ให้พิจารณารูปที่ 7 ซึ่งแสดงทิศทางของความเร่งต่างๆ ผู้สังเกตอยู่ที่จุด B โดยแกนพิกัดที่ใช้ x-y หมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω ผู้สังเกตสังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุ A ซึ่งเคลื่อนที่ตามแนวเส้นการเคลื่อนที่สีส้ม จุด P เป็นจุดคงที่บนพิกัด x-y ซึ่งในขณะนั้นอยู่ตำแหน่งเดียวกับจุด A



รูปที่ 7 ความเร่งต่างๆ ในระบบแกนพิกัดหมุน

ผู้สังเกต B เคลื่อนที่ด้วยความเร่ง $\bar{a}_B$ เมื่อผู้สังเกตสังเกตจุด P ซึ่งอยู่ทับกับจุด A จะพบว่าจุด P เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบผู้สังเกต (เมื่อสังเกตโดยใช้แกนพิกัดที่ไม่หมุน) ความเร่งของจุด P เท่ากับ $\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}$ (ความเร่งในแนวเส้นรอบวง) และ $\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$ (ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง)

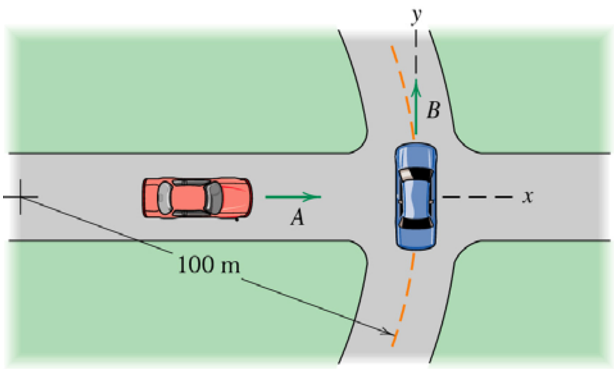
อย่างไรก็ตาม ตำแหน่งที่ต้องการสังเกตคือจุด A ความเร่งที่จุด A เมื่อเทียบจากจุด P จะเท่ากับ $2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}+\bar{a}_{rel}$ โดย $\bar{a}_{rel}$ เป็นความเร่งที่มองเห็นโดยผู้สังเกตที่อยู่บนแกนหมุน ส่วน $2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}$ เป็นความเร่งที่แตกต่างเมื่อสังเกตบนแกนไม่หมุนและแกนหมุน ความเร่ง $2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}$ มีชื่อเรียกว่า ความเร่ง Coriolis ทิศทางของความเร่ง Coriolis นี้หาได้จากกฎมือขวาตามหลักการครอสเวคเตอร์

ขั้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์

1. พิจารณาว่าเป็นปัญหาที่จำเป็นจะต้องใช้แกนพิกัดหมุนแก้ปัญหาหรือไม่ ตัวอย่างปัญหาที่ใช้แกนพิกัดหมุนแก้ ได้แก่ (1) ปัญหาความเร็วความเร่งในกลไก ซึ่งไม่ได้เชื่อมต่อเป็นวัตถุแข็งเกร็งอันเดียวกัน แต่เชื่อมต่อกันด้วยกลไกแบบเลื่อนไถล หรือ (2) ปัญหาการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของอนุภาค ซึ่งผู้สังเกตกำลังเคลื่อนที่แบบหมุน หรืออยู่ในทางโค้ง
2. เขียนสมการความเร็ว $\bar{v}_A=\bar{v}_B+\bar{\omega}\times\bar{r}+\bar{v}_{rel}$ และพิจารณาค่าขนาด และทิศทางของแต่ละเวคเตอร์ ตามวิธีการเดียวกับการพิจารณาเรื่องความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์ ที่ได้เรียนมาก่อนหน้าแล้วเพื่อหาค่าความเร็วที่ต้องการ
3. เขียนสมการความเร่ง $\bar{a}_A=\bar{a}_B+\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})+2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}+\bar{a}_{rel}$ และใช้วิธีการเดียวกับการพิจารณาความเร็ว เพื่อหาค่าความเร่งที่ต้องการ

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์

5/156 Car B is rounding the curve with a constant speed of 54 km/h, and car A is approaching car B in the intersection with a constant speed of 72 km/h. Determine the velocity which car A appears to have to an observer riding in and turning with car B. The x-y axes are attached to car B. Is this apparent velocity the negative of the velocity which B appears to have to a nonrotating observer in car A? The distance separating the two cars at the instant depicted is 40 m. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/156]



วิธีทำ ปัญหาข้อนี้เป็นปัญหาการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยผู้สังเกตกำลังเคลื่อนที่ในทิศทางโค้ง ดังนั้นในข้อนี้จึงต้องใช้ระบบแกนพิกัดหมุนในการพิจารณา โดยแกนหมุนจะหมุนรอบจุดศูนย์กลางความโค้งของถนน

ความเร็ววัตถุที่ต้องการสังเกต $\vec{v}_A = 72(\frac{1000}{3600})\hat{i} = 20\hat{i}$ m/s $\longrightarrow$

ความเร็วผู้สังเกต $\vec{v}_B = 54(\frac{1000}{3600})\hat{j} = 15\hat{j}$ m/s $\uparrow$

ความเร็วเชิงมุมของแกนหมุน $\omega = \frac{v_B}{\rho} = \frac{15}{100} = 0.15$ rad/s หรือ $\vec{\omega} = 0.15\hat{k}$ rad/s

$\vec{r} = -40\hat{i}$ $\longleftarrow$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = 0.15\hat{k}\times(-40\hat{i}) = (0.15)(40)(-\hat{j}) = -6\hat{j}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

ขนาด	20	15	6	X
ทิศทาง	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	X

จากตาราง เนื่องจากมีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว จึงสามารถหาค่า $\vec{v}_{rel}$ ได้

แทนค่าความเร็วแต่ละตัวลงในสมการความเร็วสัมพัทธ์สำหรับแกนหมุน จะได้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

$$20\hat{i} = 15\hat{j} - 6\hat{j} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}_{rel} = 20\hat{i} - 9\hat{j} \text{ m/s}$$

<u>Ans</u>

เปรียบเทียบกับกรณีที่ผู้สังเกต A มองรถยนต์ B
ในกรณีนี้ผู้สังเกต A เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง จึงสามารถใช้วิธีการความเร็วสัมพัทธ์ตามที่เรียนมาในบทที่ 2 ได้

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

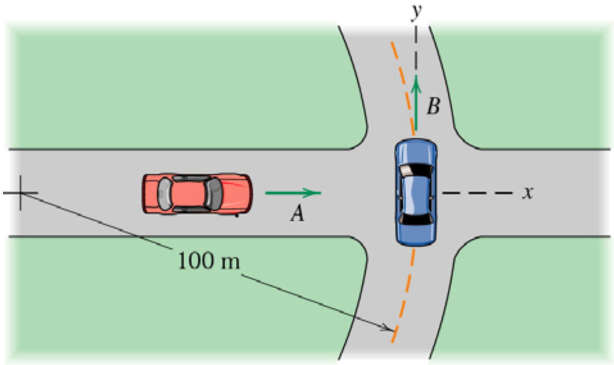
$$15\hat{j} = 20\hat{i} + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{B/A} = -20\hat{i} + 15\hat{j}$$

<u>Ans</u>

<u>ข้อสังเกต</u> $\vec{v}_{B/A} \neq -\vec{v}_{rel}$ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ผู้สังเกต A มองเห็น B ไม่เหมือนกับที่ผู้สังเกตที่ B มองเห็น A โดยส่วนต่างของความเร็วทั้งสองเท่ากับ $\vec{\omega} \times \vec{r} = 6\hat{j}$

5/157 For the cars of Prob.5/156 traveling with constant speed, determine the acceleration which car A appears to have to an observer riding in and turning with car B. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/157]



วิธีทำ จากข้อ 5/156 จะได้ข้อมูลดังนี้

$\vec{v}_A = 20\hat{i}$ m/s $\quad \vec{v}_B = 15\hat{j}$ m/s $\quad \vec{\omega} = 0.15\hat{k}$ rad/s

$\vec{r} = -40\hat{i} \quad \vec{\omega}\times\vec{r} = -6\hat{j} \quad \vec{v}_{rel} = 20\hat{i} - 9\hat{j}$ m/s

สมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับแกนพิกัดหมุน

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

พิจารณาทีละพจน์ได้ดังนี้

$\vec{a}_A = 0$ เนื่องจากรถวิ่งทางตรงด้วยความเร็วคงที่

$$\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t = \frac{v_B^2}{\rho}(-\hat{i}) + 0 = -\frac{15^2}{100}\hat{i} = -2.25\hat{i} \text{ m/s}^2$$

$(\vec{a}_B)_t = 0$ เนื่องจากรถ B วิ่งด้วยอัตราเร็วคงที่

$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = 0$ เนื่องจากแกนหมุนติดกับรถ B ซึ่งวิ่งทางโค้งด้วยความเร็วคงที่ $\dot{\vec{\omega}} = 0$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 0.15\hat{k}\times(0.15\hat{k}\times -40\hat{i}) = 0.9\hat{i} \text{ m/s}^2$$

พจน์ $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ สามารถหาได้ง่ายโดยพิจารณาขนาดจาก $\omega^2 r$ ส่วนทิศทางจะมีทิศทางจากวัตถุที่ถูกสังเกตพุ่งเข้าหาผู้สังเกตเสมอ

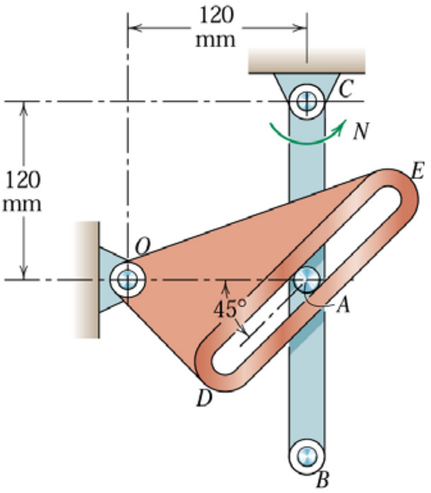
$$2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = 2(0.15\hat{k}\times(20\hat{i} - 9\hat{j})) = 6\hat{j} + 2.7\hat{i}$$

จากสมการความเร่งสัมพัทธ์พบว่ามีเพียงพจน์ $\vec{a}_{rel}$ ซึ่งไม่รู้ค่าเท่านั้น ดังนั้นแทนค่าพจน์ต่าง ๆ ที่หามาแล้วลงในสมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับแกนหมุนจะหาค่า $\vec{a}_{rel}$ ได้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

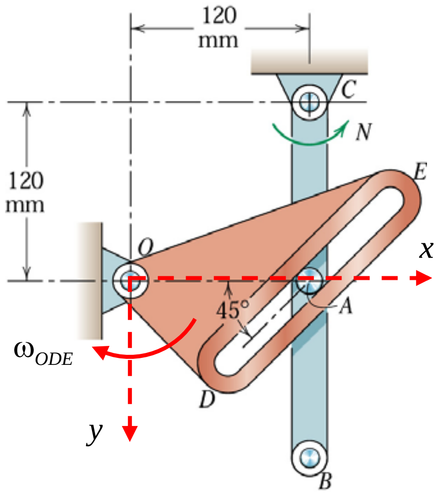
$$0 = -2.25\hat{i} + 0 + 0.9\hat{i} + (6\hat{j} + 2.7\hat{i}) + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_{rel} = -1.35\hat{i} - 6\hat{j} \text{ m/s}^2$$ <u>Ans</u>



5/168 For the instant represented, link *CB* is rotating counterclockwise at a constant rate *N* = 4 rad/s, and its pin *A* causes a clockwise rotation of the slotted member *ODE*. Determine the angular velocity ω and angular acceleration α of *ODE* for this instant. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/168]

วิธีทำ ปัญหาข้อนี้เป็นปัญหาการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนกลไก 2 ชิ้น ที่ไม่ได้เชื่อมกันด้วยจุดยึดแน่น หรือวัตถุแข็งเกร็ง แต่เป็นการเชื่อมกันด้วยชิ้นส่วนที่ไถลกัน ดังนั้นในข้อนี้จึงจำเป็นต้องพิจารณาโดยใช้แกนพิกัดแบบหมุน



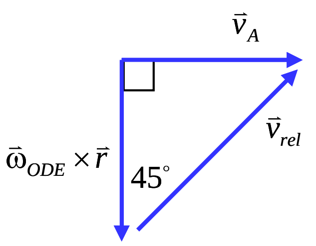
ตั้งแกนพิกัดหมุน x-y ดังแสดงในรูป จะได้ว่าผู้สังเกตอยู่ที่จุด O และสังเกตการเคลื่อนที่ของจุด A
เวคเตอร์ $\vec{r}$ จะชี้จากผู้สังเกตไปยังจุดที่สังเกต จึงมีทิศชี้ไปทางขวา $\longrightarrow$

พิจารณาสมการความเร็วสัมพัทธ์สำหรับแกนหมุน

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

ขนาด	$\omega_{CB}\overline{CA}$	0	X	X
ทิศทาง	$\longrightarrow$	–	$\downarrow$	// *DE*

จากตารางจะพบว่ามีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัวจึงสามารถหาค่าได้
นำเวคเตอร์มาเขียนแผนภาพเวคเตอร์ และจากแผนภาพจะคำนวณค่าต่างๆ ได้ดังนี้



$$v_A = \omega_{CB} \cdot \overline{CA} = 4(0.12) = 0.48 \text{ m/s}$$

$$|\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r}| = \omega_{ODE} \cdot r = \omega_{ODE} \cdot 0.12 = v_A = 0.48$$

$$\omega_{ODE} = 4 \text{ rad/s}$$ Ans

$$v_{rel} = v_A\sqrt{2} = 0.48\sqrt{2} \text{ m/s}$$

พิจารณาสมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับแกนหมุน

$$\vec{a}_A = \overbrace{\cancel{\vec{a}_O}}^{=0} + \dot{\vec{\omega}}_{ODE} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{ODE} \times (\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$(\vec{a}_A)_n + (\vec{a}_A)_t = \dot{\vec{\omega}}_{ODE} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{ODE} \times (\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

ขนาด	$\omega_{CB}^2 \overline{CA}$	0	X	$\omega_{ODE}^2 \cdot r$	$2\omega_{ODE} v_{rel}$	X
ทิศทาง	↑	–	↕	←	45° ↘	$/\!/ DE$ ↙↗ 45°

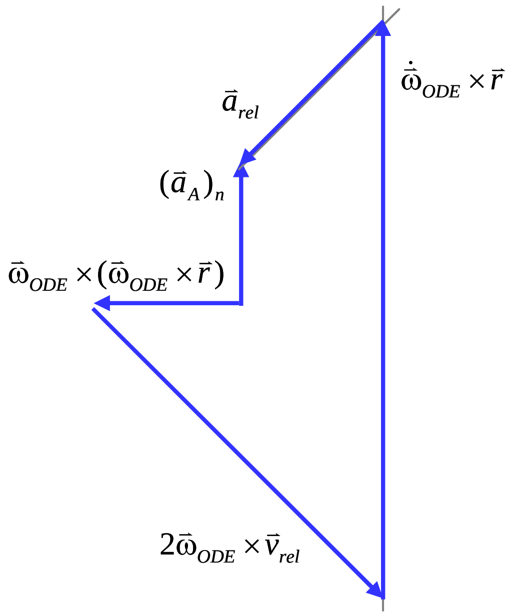
จากตารางจะพบว่ามีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัวจึงสามารถหาค่าได้
คำนวณค่าต่างๆ ที่ทราบได้ดังนี้

$$(a_A)_n = \omega_{CB}^2 \overline{CA} = 4^2(0.12) = 1.92 \text{ m/s}^2$$

$$\left|\vec{\omega}_{ODE} \times (\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r})\right| = \omega_{ODE}^2 \cdot r = 4^2(0.12) = 1.92 \text{ m/s}^2$$

$$\left|2\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{v}_{rel}\right| = 2\omega_{ODE} v_{rel} = 2(4)0.48\sqrt{2} = 3.84\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

นำค่าที่ทราบมาเขียนแผนภาพเวคเตอร์ได้ดังนี้



คิดผลรวมเวคเตอร์ในแนวระดับ

$$-\omega_{ODE}^2 \cdot r + 2\omega_{ODE} \cdot v_{rel} \cdot \cos 45^\circ - a_{rel} \cos 45^\circ = 0$$

$$-1.92 + 3.84\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - a_{rel} \cos 45^\circ = 0$$

$$a_{rel} = 1.92\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

คิดผลรวมเวคเตอร์ในแนวดิ่ง

$$(a_A)_n = -2\omega_{ODE} v_{rel} \cos 45^\circ + \dot{\omega}_{ODE} r - a_{rel} \cos 45^\circ$$

$$1.92 = -3.84\sqrt{2} \cos 45^\circ + \dot{\omega}_{ODE} r - 1.92\sqrt{2} \cos 45^\circ$$

$$\dot{\omega}_{ODE} r = 7.68 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{ODE} = \dot{\omega}_{ODE} = \frac{7.68}{0.12} = 64 \text{ rad/s}^2 \quad \text{CCW}$$

Ans