

สถิตยศาสตร์ (Statics)

บทที่ 2 ระบบของแรง (ตอนที่ 1)

2/1 บทนำ

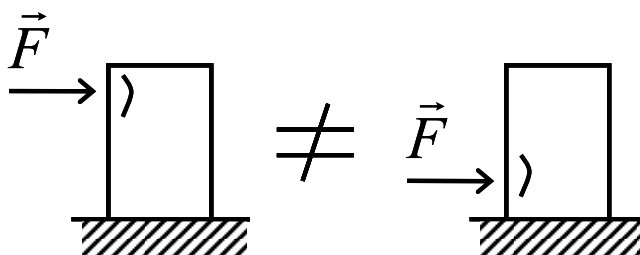
ในบทนี้จะกล่าวถึงระบบของแรงในงานวิศวกรรม เนื้อหาในบทนี้จะเป็นพื้นฐานสำคัญในการศึกษาวิชากลศาสตร์ขั้นสูงต่อไป เช่น การวิเคราะห์ความเค้น การออกแบบโครงสร้าง และเครื่องจักรกล การไหลของของไหล เป็นต้น

2/2 แรง

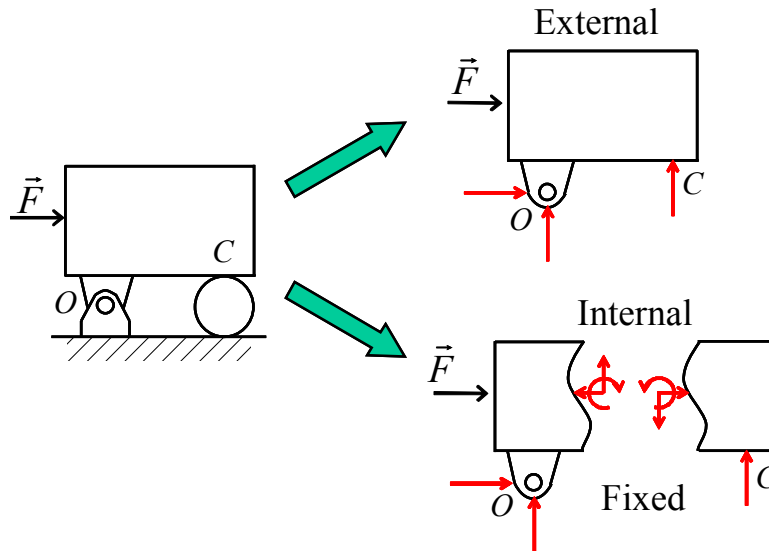
แรงเป็นปริมาณเวกเตอร์ เนื่องจากผลของแรงจะขึ้นอยู่กับปัจจัยทั้งขนาด ทิศทาง ของแรงกระทำ เมื่อพิจารณา **รูปที่ 1** จะพบว่าเมื่อออกแรงกระทำกับวัตถุที่เสียรูปได้ เช่น ดินน้ำมัน ตำแหน่งที่แรงกระทำ มีความสำคัญต่อการเสียรูปของวัตถุเช่นกัน ดังนั้นแรงจึงถูกพิจารณาว่าเป็น Fixed vector

แรงภายนอกและแรงภายใน

แรงสามารถแบ่งออกได้เป็นแรงภายนอกและแรงภายใน พิจารณาแรงกระทำกับวัตถุใน **รูปที่ 2** เมื่อพิจารณาที่ตัววัตถุ จะพบว่าแรงภายนอกที่กระทำกับมันประกอบด้วยแรงดัน P แรงที่หมุดยึด O และแรงที่ตัวรองรับ C ส่วนแรงที่อยู่ภายในระบบที่เราพิจารณานั้นจะเรียกว่าแรงภายใน ในที่นี้แรงภายในคือแรงที่อยู่ในเนื้อวัตถุและส่งผลให้วัตถุมีการเสียรูป การเสียรูปของวัตถุนั้นขึ้นกับ ขนาด ทิศทาง และตำแหน่งของแรง รูปร่างวัตถุ รวมถึงวัสดุที่ใช้ทำวัตถุนั้นด้วย การเสียรูปนี้จะได้เรียนในวิชากลศาสตร์วัสดุต่อไป



รูปที่ 1 ผลของตำแหน่งแรงกระทำ



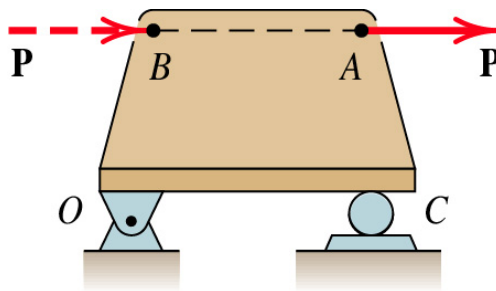
รูปที่ 2 แรงภายนอกและแรงภายใน

หลักการส่งผ่าน

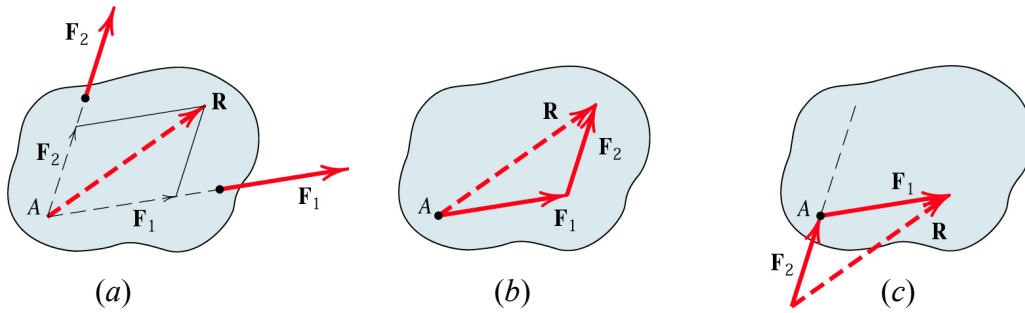
ถึงแม้ว่าตำแหน่งของแรงจะมีผลต่อการเสียรูปของวัตถุ แต่ถ้าวัตถุที่พิจารณามีลักษณะใกล้เคียงกับวัตถุแข็งเกร็ง ผลของตำแหน่งของแรง (ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน) ต่อการเสียรูปของวัตถุสามารถละเลยได้ ในกรณีนี้ไม่ว่าจะออกแรงที่ตำแหน่งใดในแนวเส้นตรงเดียวกัน ผลของแรงนั้นจะมีค่าเหมือนกัน นั่นคือแรงสามารถพิจารณาเป็น Sliding vector ได้

พิจารณา**รูปที่ 3** จากรูปพบว่า ไม่ว่าแรงจะให้ที่ตำแหน่ง A หรือตำแหน่ง B ผลของแรงจะมีค่าเหมือนกัน นั่นคือแรงที่เกิดที่หมุดยึด O และแรงที่ตัวรองรับ C ที่เกิดเนื่องจากแรง P จะมีค่าเท่ากัน หลักการที่กล่าวมานี้เรียกว่า “หลักการส่งผ่าน (Principle of Transmissibility)”

ในวิชานี้จะพิจารณาแค่แรงที่กระทำต่อวัตถุแข็งเกร็ง ดังนั้นหลักการส่งผ่านสามารถใช้ได้ และแรงสามารถพิจารณาเป็น Sliding vector ได้



รูปที่ 3 หลักการส่งผ่าน



รูปที่ 4 แรงที่แนวแรงบรรจบกัน และการรวมแรง

แรงที่แนวแรงบรรจบกัน (Concurrent forces)

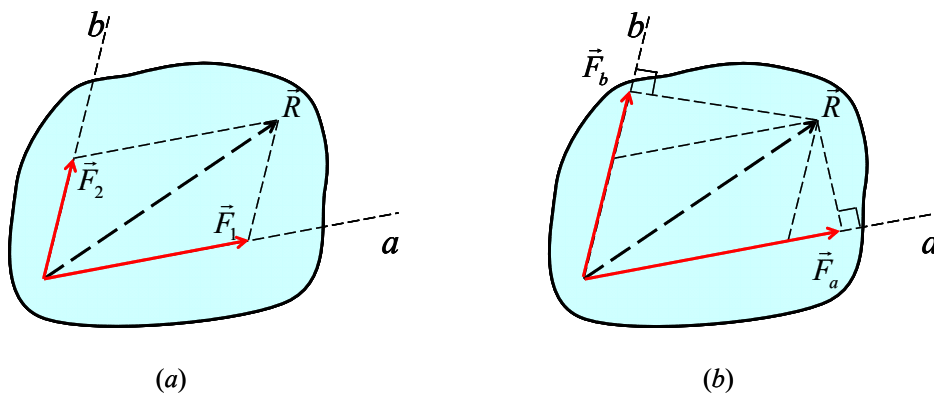
แรงที่แนวแรงบรรจบกัน หมายถึง แรงที่เส้นของแนวแรงตัดกันที่จุดใดจุดหนึ่ง แรง F_1 และ F_2 ในรูปที่ 4(a) เป็นแรงที่แนวแรงบรรจบกัน เนื่องจากแนวแรงของแรงทั้งสองตัดกันที่จุด A แรงทั้งสองสามารถรวมกันเป็นแรงลัพธ์ R โดยใช้กฎการรวมแบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน และแรงลัพธ์ R ที่ได้ก็จะผ่านจุด A ที่แนวแรงบรรจบกันเช่นกัน

ข้อระวังในการรวมแรงคือ แรงลัพธ์ที่ได้ต้องผ่านจุดที่แนวแรงบรรจบกัน ดังนั้นผลการรวมแรงในรูปที่ 4(b) จะให้ผลที่ถูกต้อง อย่างไรก็ตามสำหรับการรวมแรงตามรูปที่ 4(c) ถึงแม้ว่าแรงจะถูกรวมอย่างถูกต้องตามหลักการบวกเวกเตอร์ ทำให้ได้ขนาดและทิศทางของแรงที่ถูกต้อง แต่ตำแหน่งที่แรงลัพธ์กระทำจะผิดไป

ส่วนประกอบย่อยของแรง

นอกจากการรวมแรงสองแรงเป็นแรงลัพธ์แรงเดียวแล้ว ในหลายๆครั้งจำเป็นที่จะต้องแตกแรงออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆ ตามแนวต่างๆ โดยผลรวมของแรงย่อยๆ ที่แตกออกมาต้องมีค่าเท่ากับแรงเดิมเสมอ

รูปที่ 5(a) แสดงถึงการแยกแรงลัพธ์ R ออกเป็นแรง F_1 และ F_2 ตามแนวแกน a และ b วิธีหาแรง F_1 และ F_2 ทำโดยเขียนรูปการรวมเวกเตอร์แบบสี่เหลี่ยมด้านขนาน และใช้สมการตรีโกณมิติ (กฎของ sine และกฎของ cosine) คำนวณขนาดของส่วนประกอบย่อยๆ ตามวิธีที่แสดงในบทที่ 1



รูปที่ 5 การแตกแรงเป็นส่วนประกอบย่อย และโปรเจกชันของแรง

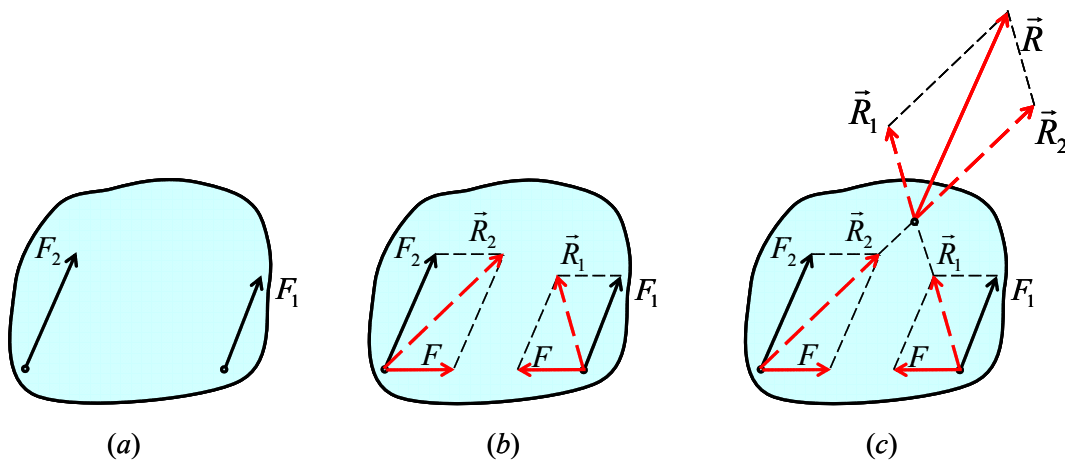
โปรเจกชันของแรง

โปรเจกชันของเวกเตอร์บนแกนใดๆ หมายถึงภาพฉายตั้งฉากบนแกนนั้นๆ รูปที่ 5(b) แสดงถึงภาพฉายของแรงลัพธ์ \vec{R} บนแกน a และ b เนื่องจากแกน a และ b ไม่ตั้งฉากกัน ดังนั้นผลรวมของแรง \vec{F}_a กับ \vec{F}_b ซึ่งเป็นโปรเจกชันของ \vec{R} จึงไม่เท่ากับแรงลัพธ์ \vec{R}

การรวมแรงในกรณีแรงสองแรงขนานกัน

การรวมแรงที่มีแนวแรงบรรจบกัน จะสามารถรู้ตำแหน่งของแรงลัพธ์ว่าจะต้องผ่านตำแหน่งที่แนวของแรงตัดกัน อย่างไรก็ตามถ้าแรงที่จะรวมเป็นแรงสองแรงซึ่งขนานกัน ทำให้ไม่มีจุดตัดจะไม่สามารถหาตำแหน่งของแรงลัพธ์ได้ วิธีการรวมแรงในกรณีนี้สามารถทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. แรงที่จะรวมคือแรง \vec{F}_1 และ \vec{F}_2 ซึ่งมีทิศทางขนานกัน (รูปที่ 6(a))
2. เพิ่มแรง \vec{F} และ $-\vec{F}$ ซึ่งมีขนาดเท่ากันและอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน แต่ทิศทางตรงกันข้ามเข้าไปในระบบ โดยแนวแรง \vec{F} และ $-\vec{F}$ กระทำผ่านจุดบนเส้นตรงซึ่งลากเชื่อมจุดที่แรง \vec{F}_1 และ \vec{F}_2 กระทำ (รูปที่ 6(b)) เนื่องจากแรงลัพธ์ของแรง \vec{F} และ $-\vec{F}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นการเพิ่มแรงคู่นี้เข้าไปจึงไม่มีผลกระทบต่อแรงรวมของทั้งระบบ
3. ทำการรวมแรง \vec{F}_1 กับแรง \vec{F} และแรง \vec{F}_2 กับแรง $-\vec{F}$ จะได้แรงรวมเป็น \vec{R}_1 และ \vec{R}_2 ตามลำดับ (รูปที่ 6(b))
4. รวมแรง \vec{R}_1 และแรง \vec{R}_2 เข้าด้วยกัน ตามวิธีรวมแรงที่แนวแรงบรรจบกัน จะได้แรงลัพธ์ \vec{R} ซึ่งมีทิศทางขนานกับแรงเริ่มต้น \vec{F}_1 และ \vec{F}_2 และกระทำผ่านจุดตัดของแรง \vec{R}_1 และ \vec{R}_2 ตามต้องการ (รูปที่ 6(c))



รูปที่ 6 การรวมแรงสองแรงที่ขนานกัน

SECTION A. ระบบแรงในสองมิติ

2/3 ระบบพิกัดฉาก

วิธีทั่วไปในการหาคำตอบของแรงในปัญหาสองมิติ คือ การแยกส่วนประกอบของแรง ออกเป็นสองส่วนตามระบบพิกัดฉาก ตามรูปที่ 7 แรง \vec{F} จะแยกได้เป็นแรง \vec{F}_x และ \vec{F}_y และเขียนสมการได้ดังนี้

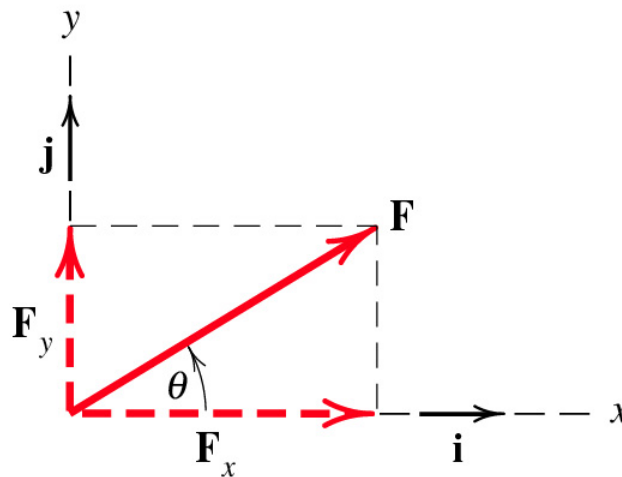
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \tag{1}$$

เขียนในรูปผลคูณสเกลาร์ของแต่ละส่วนประกอบกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแสดงทิศทางได้ดังนี้

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \tag{2}$$

ค่า F_x และ F_y สามารถเป็นบวก หรือลบก็ได้ ขึ้นกับทิศทางของแรง \vec{F} และสามารถหาได้ ตามสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \theta & F_y &= F \sin \theta \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} & \theta &= \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \end{aligned} \tag{3}$$



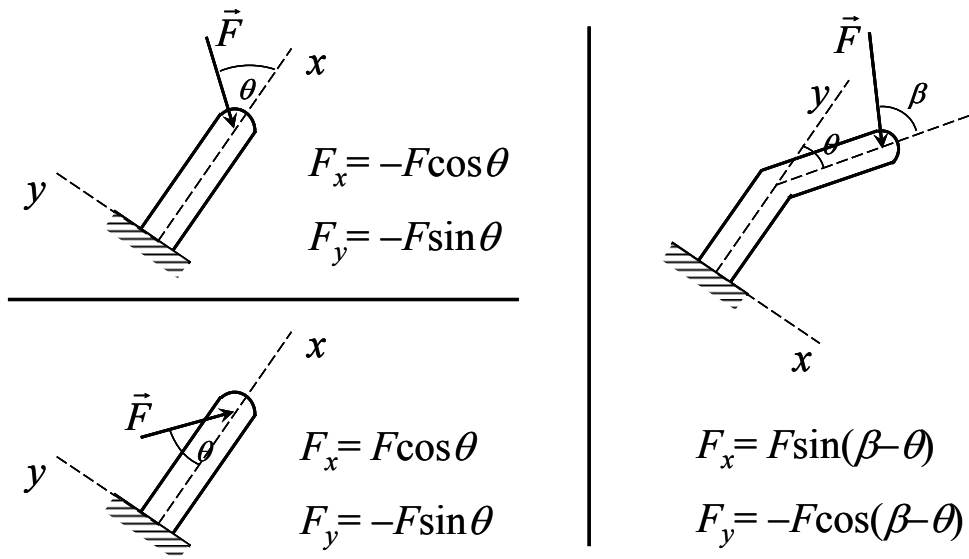
รูปที่ 7 การแตกแรงในระบบพิกัดฉาก

การคิดเครื่องหมายบวกลบของ F

การคิดเครื่องหมายบวกลบ สามารถทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. เขียนเวกเตอร์ของแรง
2. ตั้งแกนพิกัดฉาก
3. ทำการแตกแรงเป็นส่วนประกอบย่อยตามแนวแกนพิกัด
4. ถ้าทิศของแรงที่แตกได้ มีทิศเดียวกับทิศบวกของแกนพิกัด เครื่องหมายเป็นบวก
5. ถ้าทิศของแรงที่แตกได้ มีทิศตรงข้ามกับทิศบวกของแกนพิกัด เครื่องหมายเป็นลบ

พิจารณาตัวอย่างการคิดเครื่องหมายบวกลบจากตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 8



รูปที่ 8 ตัวอย่างการแตกแรงในระบบพิกัดฉาก

การบวกผลรวมเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

การบวกผลรวมเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากทำได้โดย แตกเวกเตอร์แต่ละตัวให้มีทิศทางตามแกนพิกัดฉากเสียก่อน แล้วจึงบวกผลรวมย่อยที่มีทิศทางเดียวกันเข้าด้วยกัน การบวกผลรวมเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากแสดงในรูปที่ 9 และสมการที่ (4)

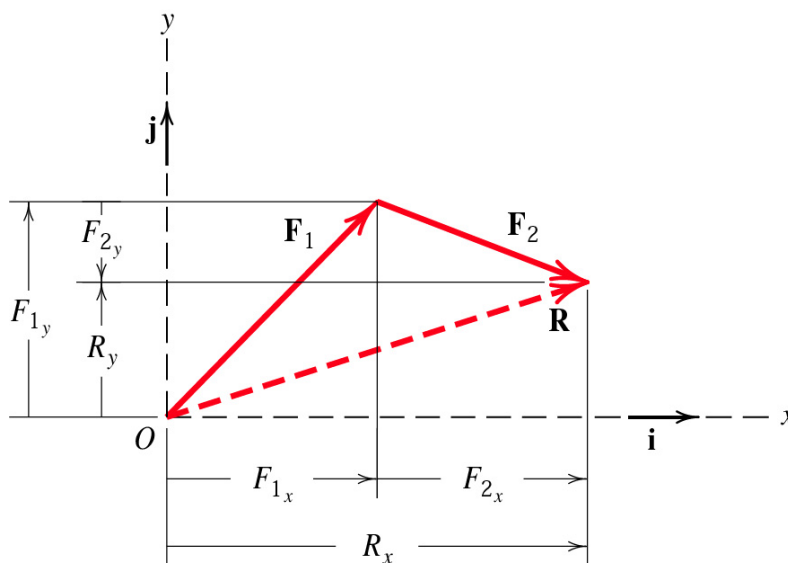
จัดรูปได้ดังนี้
เพราะฉะนั้นจะได้

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j}) + (F_{2x}\hat{i} + F_{2y}\hat{j})$$

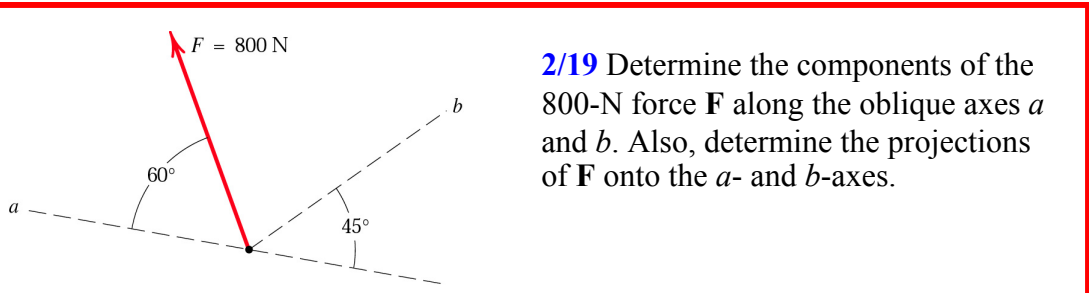
$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} = (F_{1x} + F_{2x})\hat{i} + (F_{1y} + F_{2y})\hat{j}$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = \sum F_x$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = \sum F_y \tag{4}$$

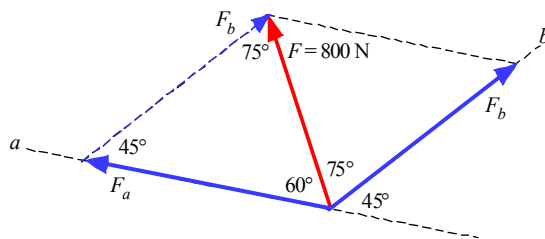


รูปที่ 9 การบวกผลรวมเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก



2/19 Determine the components of the 800-N force **F** along the oblique axes *a* and *b*. Also, determine the projections of **F** onto the *a*- and *b*-axes.

วิธีทำ 1 หาส่วนประกอบของเวกเตอร์แรงตามแนวแกน *a* และ *b*

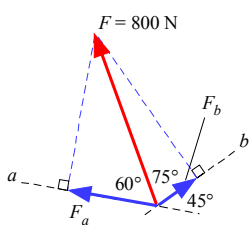


จากรูป พิจารณาการต่อเวกเตอร์แบบหัวต่อหาง ซึ่งจะต่อเวกเตอร์เป็นรูปสามเหลี่ยมจากรูปสามเหลี่ยมนี้จะสามารถหาขนาดของ F_a และ F_b ได้จากกฎของ sine ดังนี้

กฎของ sine
$$\frac{800}{\sin 45^\circ} = \frac{F_a}{\sin 75^\circ} = \frac{F_b}{\sin 60^\circ}$$

∴ จะได้
$$\left. \begin{aligned} F_a &= 1092.82 \text{ N} \\ F_b &= 979.80 \text{ N} \end{aligned} \right\} \text{Ans}$$

2 หาโปรเจกชันตามแนวแกน *a* และ *b*

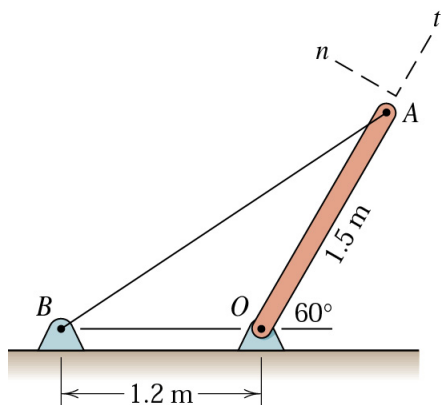


โปรเจกชันบนแกน *a*

$$F_a = 800 \cos 60^\circ = 400 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

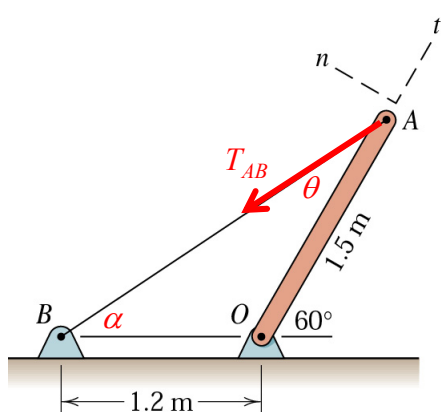
โปรเจกชันบนแกน *b*

$$F_b = 800 \cos 75^\circ = 207.06 \text{ N} \quad \text{Ans}$$



2/23 The cable AB prevents bar OA from rotating clockwise about the pivot O . If the cable tension is 750 N , determine the n - and t - components of this force acting on point A of the bar.

วิธีทำ



เนื่องจากต้องการหาส่วนประกอบของแรงดึง T_{AB} ในแนวแกน $n-t$ จึงต้องแตกแรง T_{AB} เข้าแกน $n-t$
 การจะแตกแรงได้จำเป็นต้องรู้มุม θ เสียก่อน

หาขนาดของมุม α ได้ดังนี้

$$\tan \alpha = \frac{1.5 \sin 60^\circ}{1.2 + 1.5 \cos 60^\circ} = 0.6662$$

$$\alpha = 33.6705^\circ$$

จากมุม α สามารถหามุม θ ได้ดังนี้

$$\theta = 180^\circ - 120^\circ - 33.6705^\circ = 26.3295^\circ$$

แรง T_t ตามแนวแกน $t = T_{AB} \cos \theta = 750 \cos 26.3295^\circ$

$$= 672\text{ N}$$

เนื่องจากทิศทางของแรง T_t ตรงข้ามกับแกนบวกของแกน t

ดังนั้น แรง $T_t = -672\text{ N}$

Ans

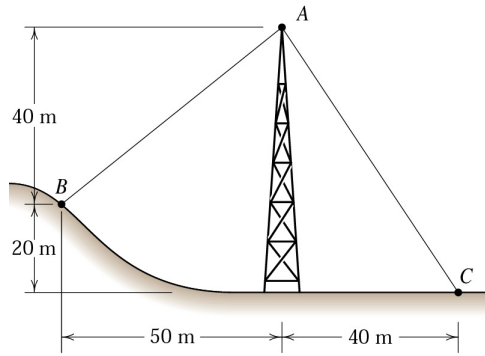
แรง T_n ตามแนวแกน $n = T_{AB} \sin \theta = 750 \sin 26.3295^\circ$

$$= 332.65\text{ N}$$

เนื่องจากทิศทางของแรง T_n ตรงกับแกนบวกของแกน n

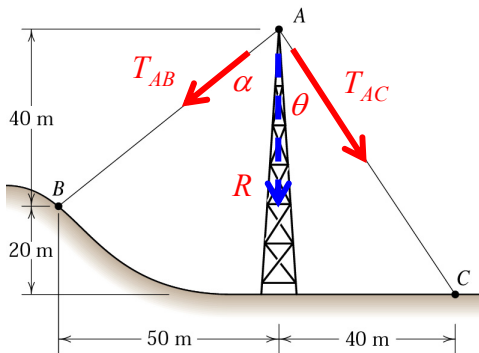
ดังนั้น แรง $T_n = 332.65\text{ N}$

Ans



2/25 The guy cables AB and AC are attached to the top of the transmission tower. The tension in cable AC is 8 kN. Determine the required tension T in cable AB such that the net effect of the two cable tension is a downward force at point A . Determine the magnitude R of this downward force.

วิธีทำ



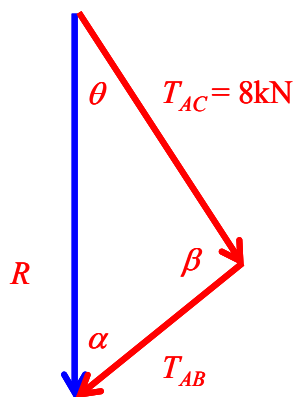
จากรูป พิจารณาแรงกระทำที่จุด A จะพบว่า มีแรงเนื่องจากแรงดึงของเคเบิล 2 แรง ได้แก่ แรง T_{AC} และ T_{AB} ทั้งสองแรงนี้จะรวมกันได้เป็นแรงกด R ซึ่งมีทิศทางพุ่งลงตามแนวตั้ง

หาขนาดของมุม θ , α และ β ได้ดังนี้

$$\theta = \arctan\left(\frac{40}{60}\right) = 33.69^\circ$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{50}{40}\right) = 51.34^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 33.69^\circ - 51.34^\circ = 94.97^\circ$$



นำแรงทั้ง 3 แรงมาเขียนเวกเตอร์ผลบวกของแรงแบบหัวต่อหางได้ดังรูป

จากกฎของ sine

$$\frac{T_{AC}}{\sin \alpha} = \frac{T_{AB}}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \beta}$$

$$\frac{8}{\sin 51.34^\circ} = \frac{T_{AB}}{\sin 33.69^\circ} = \frac{R}{\sin 94.97^\circ}$$

$$\left. \begin{aligned} T_{AB} &= 5.68 \text{ kN} \\ R &= 10.21 \text{ kN} \end{aligned} \right\}$$

Ans

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์