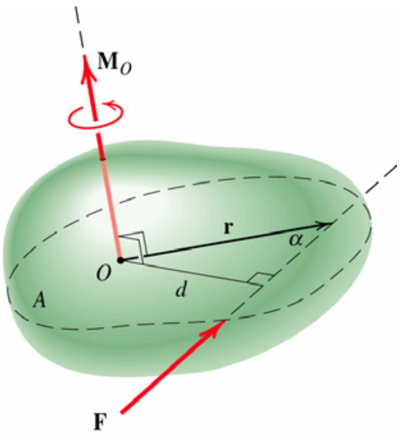
สถิตยศาสตร์ (Statics)

บทที่ 2 ระบบของแรง (ตอนที่ 4)

2/8 โมเมนต์และคับเปิล

ในปัญหาสองมิติ การหาโมเมนต์มักจะทำโดยวิธีสเกลาร์โดยการหาผลคูณระหว่างแรงและระยะตั้งฉากระหว่างแรงกับจุดหมุน อย่างไรก็ตามในกรณีของปัญหาสามมิติ การหาระยะตั้งฉากทำได้ยุ่งยากกว่าในสองมิติมาก วิธีเวคเตอร์จึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่ง ซึ่งมักถูกใช้ในการคำนวณหาโมเมนต์

โมเมนต์ในสามมิติ



รูปที่ 1 โมเมนต์ในสามมิติ

รูปที่ 1 แสดงถึงแรง $\vec{F}$ กระทำต่อวัตถุ ทำให้เกิดโมเมนต์ $\vec{M}_O$ รอบจุด O โมเมนต์หาได้โดยวิธีการเวคเตอร์ดังแสดงในสมการ (1)

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (1)$$

โดย $\vec{r}$ คือเวคเตอร์ชี้จากจุดหมุน O ไปยังจุดใดๆ บนแนวแรง $\vec{F}$

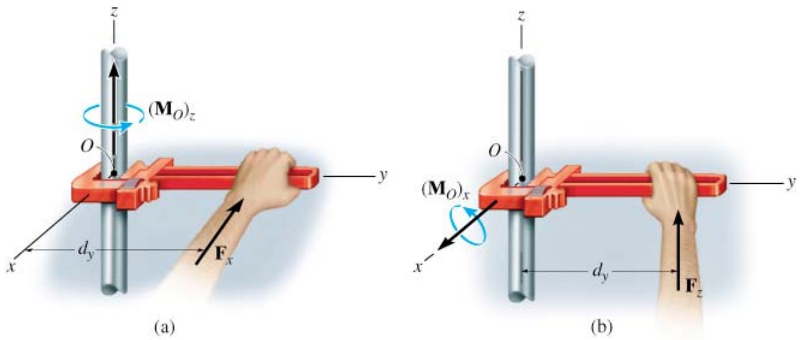
$\vec{M}_O$ คือโมเมนต์รอบจุด O

ทิศทางของโมเมนต์ $\vec{M}_O$ มีทิศทางตามกฎมือขวา (นิ้วมือทั้ง 4 ชี้ตามทิศเวคเตอร์ $\vec{r}$ แล้วกวาดมือตามทิศทางของแรง $\vec{F}$ ทิศการชี้ของนิ้วหัวแม่มือคือทิศทางของโมเมนต์)

ในปัญหาสองมิติ นิสิตอาจจะคุ้นเคยกับการหาโมเมนต์รอบแกนใดๆ ซึ่งแกนการหมุนจะมีทิศทางขนานกับแกน z ส่วนในสามมิติจะมีคำว่าโมเมนต์รอบจุดเพิ่มเข้ามา คำว่าโมเมนต์รอบจุดนี้จริงๆ แล้วก็คือโมเมนต์รอบแกนใดแกนหนึ่ง โดยที่แกนนั้นผ่านจุดนั่นเอง

ตัวอย่างโมเมนต์ในสามมิติ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

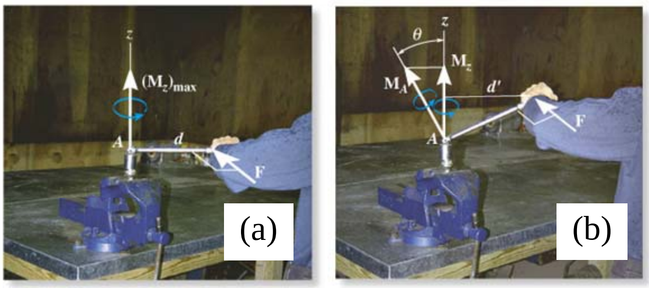


รูปที่ 2 ตัวอย่างโมเมนต์ในสามมิติ

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นโมเมนต์ซึ่งเกิดจากการออกแรง $\vec{F}$ หมุนท่อ ในรูปที่ 2(a) แรงกระทำในทิศทาง $-x$ ทำให้เกิดโมเมนต์ทิศทางชี้ขึ้นตามแกน z ในกรณีนี้โมเมนต์รอบจุด O คือโมเมนต์รอบแกน z นั่นเอง ส่วนในรูปที่ 2(b) เมื่อออกแรงกระทำในทิศทาง $+z$ จะทำให้เกิดโมเมนต์ในทิศทางหมุนรอบแกน x ในกรณีนี้โมเมนต์รอบจุด O คือโมเมนต์รอบแกน x นั่นเอง

อย่างไรก็ตามถ้าออกแรงในทิศทางซึ่งไม่ขนานกับแกนพิกัด x-y-z จะทำให้เกิดโมเมนต์รอบแกนใดๆ ซึ่งไม่ใช่แกน x-y-z เช่นกัน ในกรณีนี้โมเมนต์รอบจุด O จะไม่เท่ากับโมเมนต์รอบแกน x, y หรือ z แต่จะเท่ากับผลรวมของโมเมนต์รอบแกน x, y และ z

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>



รูปที่ 3 ตัวอย่างโมเมนต์ในสามมิติ

ตัวอย่างนี้แสดงถึงการใช้ประแจขันสลักเกลียว รูปที่ 3(a) แสดงการขันที่ออกแรงในแนวระดับ ที่ระดับเดียวกับจุดหมุน A ทำให้เกิดโมเมนต์ทิศทางตามแกน z ในกรณีนี้โมเมนต์รอบจุด A จะมีค่าเท่ากับโมเมนต์รอบแกน z สำหรับรูปที่ 3(b) แรงที่ออกจะอยู่ที่ระดับสูงกว่าจุด A ทำให้เกิดโมเมนต์ M_A ซึ่งก็คือโมเมนต์รอบจุด A นั่นเอง จะเห็นว่ากรณีนี้โมเมนต์รอบจุด A มีค่าไม่เท่ากับโมเมนต์รอบแกน z โมเมนต์รอบแกน z เป็นเพียงแค่ส่วนประกอบหนึ่งของโมเมนต์รอบจุด A เท่านั้น

การหาโมเมนต์โดยการครอสเวคเตอร์

จากสมการ (1) จะสามารถหาโมเมนต์ได้ดังนี้

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{M}_o = (r_y F_z - r_z F_y)\hat{i} + (r_z F_x - r_x F_z)\hat{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\hat{k} \tag{3}$$

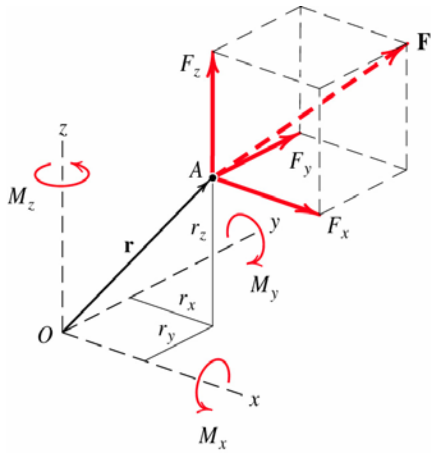
$$\vec{M}_o = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k}$$

โดย

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y$$

$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$

$$M_z = r_x F_y - r_y F_x \tag{4}$$

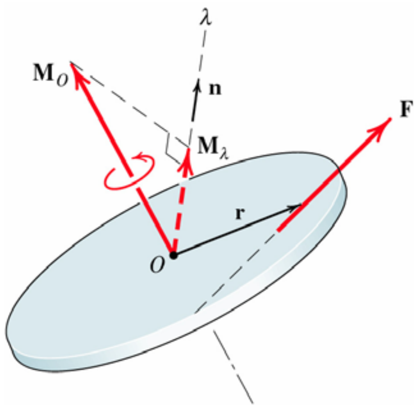


รูปที่ 4 การหาโมเมนต์ในสามมิติ

การหาโมเมนต์รอบแกนต่างๆ ตามสมการ (4) สามารถหาได้จากวิธีการสเกลาร์เช่นกัน โดยคูณส่วนประกอบของแรงในแต่ละแกน เข้ากับระยะตั้งฉากระหว่างแนวแรงกับแกนหมุน (ดูรูปที่ 4) โดยต้องระวังว่าแรงในแนวเดียวกับแกน จะไม่ทำให้เกิดโมเมนต์รอบแกนนั้น นั่นคือแรงในแนว x จะไม่ทำให้เกิดโมเมนต์รอบแกน x และแรงที่ผ่านแนวแกน จะไม่ทำให้เกิดโมเมนต์รอบแกนนั้น เช่น โมเมนต์รอบแกน x, M_x เกิดจากแรงซึ่งชี้ไปทิศทาง y และทิศทาง z โมเมนต์รอบแกน x ซึ่งเกิดจากแรง F_y คือ $-r_z F_y$ เนื่องจากโมเมนต์ของแรงนี้มีทิศชี้ไปทางลบจึงมีค่าติดลบ ส่วนโมเมนต์รอบแกน x ซึ่งเกิดจากแรง F_z คือ $r_y F_z$ เนื่องจากทิศของโมเมนต์ชี้ไปทางบวกจึงมีค่าบวก และจะได้โมเมนต์รอบแกน x ทั้งหมดคือ $M_x = r_y F_z - r_z F_y$ เช่นกัน สำหรับโมเมนต์รอบแกนอื่นๆ ก็พิจารณาได้เช่นเดียวกัน

โมเมนต์รอบแกนใด ๆ

จากรูปที่ 3(b) จะพบว่าโมเมนต์รอบแกน z เป็นส่วนประกอบหนึ่งของโมเมนต์รอบจุด A การหาโมเมนต์รอบแกน z จึงทำได้โดยหาโมเมนต์รอบจุดก่อน แล้วจึงแตกให้โมเมนต์เข้าไปอยู่ตามแกน z การหาโมเมนต์รอบแกนใดๆ ก็สามารถทำได้โดยใช้หลักการเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้



รูปที่ 5 การหาโมเมนต์รอบแกนใด ๆ

พิจารณารูปที่ 5 ต้องการหาโมเมนต์รอบแกน λ, M_λ

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> หาโมเมนต์รอบ<u>จุดใด ๆ บนแกน λ</u> ในที่นี้จะทำรอบจุด O

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> หาขนาดส่วนประกอบของโมเมนต์ $\vec{M}_O$ บนแกน λ โดยการดอทเวคเตอร์ของโมเมนต์ เข้ากับเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง λ, $\hat{n}$ โดยผลลัพธ์จากการดอทจะเป็น*ปริมาณสเกลาร์*

$$\left|\vec{M}_\lambda\right| = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \qquad (5)$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> โมเมนต์รอบแกน λ คือผลคูณของขนาดของโมเมนต์ที่หาได้จากสมการ (5) กับเวคเตอร์แสดงทิศทางของโมเมนต์ ซึ่งก็คือเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง λ นั่นเอง

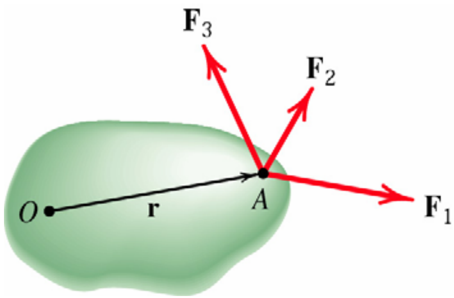
$$\vec{M}_\lambda = [(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}]\hat{n} \qquad (6)$$

ทฤษฎีบทของ Varignon สำหรับสามมิติ (Varignon's Theorem in Three Dimensions)

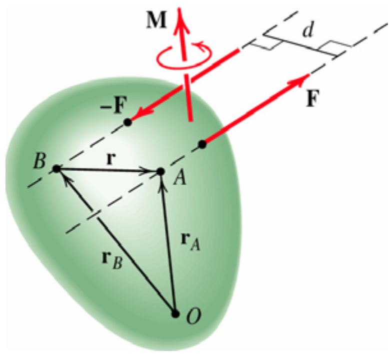
ทฤษฎีบทของ Varignon กล่าวไว้ว่า “ผลรวมของโมเมนต์ย่อยๆ ซึ่งเกิดจากแรงหลายๆ แรงรอบจุดหมุนที่กำหนด มีค่าเท่ากับโมเมนต์ซึ่งเกิดจากผลรวมของแรงย่อยๆ รอบจุดหมุนนั้น” (ดูรูปที่ 6 ประกอบ) ทฤษฎีบทของ Varignon สามารถนำมาเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังแสดงในสมการ (7)

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \ldots = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots)$$

$$\vec{M}_O = \sum(\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \vec{r} \times \vec{R} \qquad (7)$$



รูปที่ 6 การหาโมเมนต์ของแรงย่อยๆ ด้วยทฤษฎีบทของ Varignon



รูปที่ 7 คับเปิลในสามมิติ

คับเปิลในสามมิติ

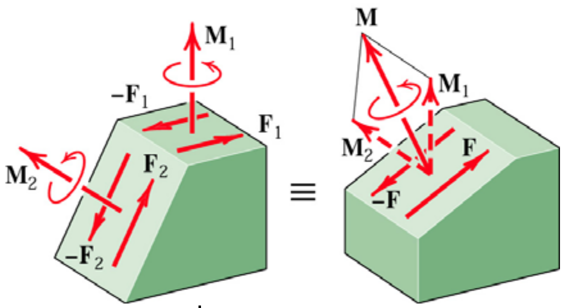
คับเปิลหมายถึง โมเมนต์ซึ่งเกิดจากแรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกัน

รูปที่ 7 แสดงการหาคับเปิลในสามมิติ สมมุติให้จุด O เป็นจุดหมุน

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} \qquad (8)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (9)$$

จากสมการ (9) จะพบว่าคับเปิลไม่ขึ้นกับจุดหมุน O เลย ขึ้นอยู่เพียงแรง $\vec{F}$ และเวคเตอร์ที่ชี้ระหว่างแนวแรงทั้งคู่ $\vec{r}$ โดยเวคเตอร์ $\vec{r}$ จะชี้จากจุดไหนบนแนวแรง $-\vec{F}$ ไปยังจุดไหนบนแนวแรง $\vec{F}$ ก็ได้ และเนื่องจากคับเปิลมีค่าเท่ากันไม่ว่าจุดหมุนจะอยู่ที่ใด คับเปิลจึงถือว่าเป็น Free Vector ซึ่งจะต่างกับโมเมนต์ ซึ่งขนาดจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งจุดหมุน โมเมนต์จึงถือว่าเป็น Sliding Vector สำหรับทิศทางของคับเปิลก็สามารถหาได้โดยกฎของมือขวาเช่นเดียวกัน



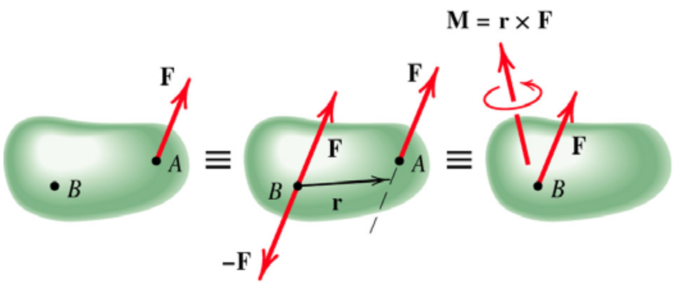
รูปที่ 8 การรวมคับเปิล

รูปที่ 8 แสดงถึงการรวมคับเปิลย่อยจากแรง $\vec{F}_1$ และ $\vec{F}_2$ เข้าด้วยกัน เนื่องจากคับเปิลเป็น Free vector การรวมจึงสามารถรวมคับเปิลย่อยๆ เข้าโดยตรงแบบเวคเตอร์ หรืออาจจะรวมแรง $\vec{F}_1$ และ $\vec{F}_2$ เข้าเป็นแรง $\vec{F}$ ก่อน จึงหาคับเปิลจากแรง $\vec{F}$ ก็ได้

ระบบของแรงและคับเปิลในสามมิติ

ในหัวข้อ 2/5 ได้กล่าวถึงการย้ายแรงไปที่ตำแหน่งอื่น และเขียนแทนแรงเดิมด้วยแรงและคับเปิล ในกรณี 2 มิติ มาแล้ว ในหัวข้อนี้ก็เช่นเดียวกัน เพียงแต่แรงและคับเปิลจะอยู่ใน 3 มิติเท่านั้น ขั้นตอนการย้ายแรงแสดงดังรูปที่ 9

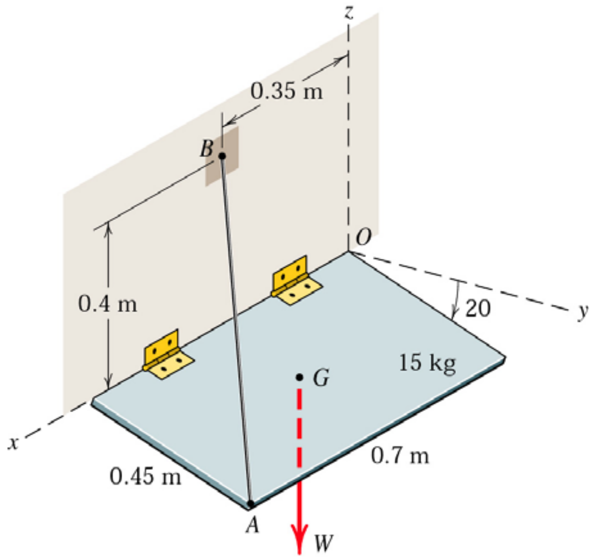
1. แรง $\vec{F}$ กระทำที่จุด A
2. เพิ่มแรง $\vec{F}$ และ $-\vec{F}$ ที่จุด B เนื่องจากแรงลัพธ์ที่เพิ่มเข้าไปในระบบมีค่าเป็นศูนย์ การเพิ่มแรงเข้าไปจึงไม่ส่งผลกระทบใดๆ ต่อระบบ
3. จากรูปกลาง จะพบว่าแรง $\vec{F}$ เดิม และแรง $-\vec{F}$ ที่เพิ่มเข้าไปสามารถจับคู่กันเป็นคับเปิลได้
4. เขียนแทนแรง $\vec{F}$ และ $-\vec{F}$ ด้วยคับเปิล $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ โดยทิศทางของคับเปิลจะตั้งฉากกับแรง $\vec{F}$ ดังแสดงในรูปขวามือ



รูปที่ 9 ระบบของแรงและคับเปิลในสามมิติ

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์

2/129 Tension in cable *AB* is 143.4 N. Determine the moment about the *x*-axis of this tension force acting on point *A* . Compare your result to the moment of the weight *W* of the 15-kg uniform plate about the *x*-axis. What is the moment of the tension force acting at *A* about line *OB*



วิธีทำ เนื่องจากต้องการหาโมเมนต์เนื่องจากแรงดึงในเคเบิล *AB* ดังนั้น จึงต้องเขียนแรงดึง T_{AB} ให้อยู่ในรูปเวคเตอร์เสียก่อน

พิกัดจุด *A* : (0.7, 0.45cos20º, -0.45sin20º) หรือคือ (0.7, 0.4229, -0.1539)

พิกัดจุด *B* : (0.35, 0, 0.4)

เวคเตอร์ *AB* : $\overrightarrow{AB} = -0.35\hat{i} - 0.4229\hat{j} + 0.5539\hat{k}$

เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง *AB* :

$$\hat{n}_{AB} = \frac{-0.35\hat{i} - 0.4229\hat{j} + 0.5539\hat{k}}{\sqrt{0.35^2 + 0.4429^2 + 0.5539^2}} = -0.4488\hat{i} - 0.5423\hat{j} + 0.7103\hat{k}$$

เวคเตอร์ของแรง $\vec{T}_{AB}$

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB}\hat{n}_{AB} = 143.4(-0.4488\hat{i} - 0.5423\hat{j} + 0.7103\hat{k})$$

$$\vec{T}_{AB} = -64.3579\hat{i} - 77.7658\hat{j} + 101.857\hat{k}$$

ต้องการหาโมเมนต์รอบแกน *x* ขั้นแรกต้องหาโมเมนต์ที่จุดใดๆ บนแกน *x* ก่อน ในที่นี้จะเลือกจุดหาโมเมนต์รอบจุด *O*

จาก $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{T}_{AB}$

ต้องหาเวคเตอร์ ***r*** ซึ่งเป็นเวคเตอร์ชี้จากจุดหมุน O ไปยังจุดใดๆ บนแนวแรง T_{AB} ก่อน ในที่นี้จะเลือกให้ ***r*** ชี้ไปที่จุด B (นิสิตสามารถเลือกให้ ***r*** เป็นเวคเตอร์ที่ชี้จาก O ไปยังจุด A ก็ได้)

$\vec{r} = \vec{r}_{OB} = 0.35\hat{i} + 0.4\hat{k}$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OB} \times \vec{T}_{AB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.35 & 0 & 0.4 \\ -64.3579 & -77.7658 & 101.857 \end{vmatrix}$$

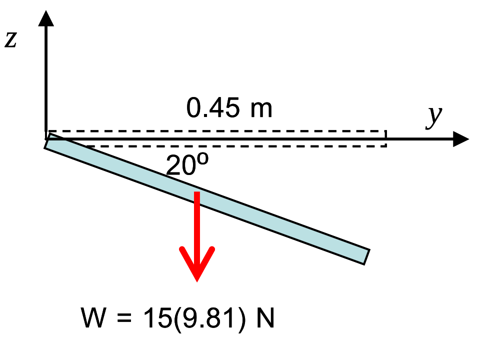
$\vec{M}_O = 31.1063\hat{i} - 61.3931\hat{j} - 27.2180\hat{k}$

ต้องการหาโมเมนต์รอบแกน x ทำได้โดยนำโมเมนต์รอบจุดที่ได้ ดอทกับเวคเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน x หรือ เวคเตอร์ i

$\vec{M}_x = \vec{M}_O \cdot \hat{i} = (31.1063\hat{i} - 61.3931\hat{j} - 27.2180\hat{k}) \cdot \hat{i}$

$\vec{M}_x = 31.1 \text{ Nm}$ <u>*Ans*</u>

หาโมเมนต์จากน้ำหนักประตูรอบแกน x



$\vec{M}_x = (15)(9.81)(\frac{0.45}{2}\cos 20^\circ)$

$\vec{M}_x = 31.1 \text{ Nm}$ <u>*Ans*</u>

หาโมเมนต์ของแรงตึง T_{AB} รอบแกน OB

เนื่องจากแรงตึง T_{AB} ผ่านแกน OB
ดังนั้นจึงไม่เกิดโมเมนต์ขึ้น นั่นคือ M_{OB} = 0 Nm <u>*Ans*</u>

<u>ลองทำดู</u> คำนวณ M_{OB} จาก $|\vec{M}_{OB}| = \vec{M}_O \cdot \hat{n}_{OB}$