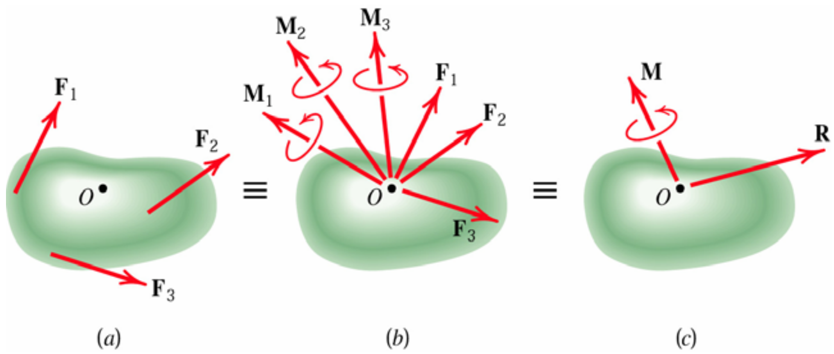
สถิตยศาสตร์ (Statics)

บทที่ 2 ระบบของแรง (ตอนที่ 5)

2/9 Resultants

ในหัวข้อ 2/6 ได้กล่าวถึง Resultants ในสองมิติมาแล้วครั้งหนึ่ง ในหัวข้อนี้จะได้ขยายความเรื่อง Resultants หรือการรวมแรงและคับเปิลให้เป็นรูปอย่างง่าย ในปัญหาสามมิติ



รูปที่ 1 การหา Resultants ในสามมิติ

รูปที่ 1 แสดงถึงการหา Resultants ในสามมิติ แรง $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ และ $\vec{F}_3$ กระทำกับวัตถุตามแสดงในรูปที่ 1(a) ขั้นตอนในการแทนแรงทั้งสามนี้ ด้วยแรงและคับเปิล ซึ่งกระทำที่จุด O มีดังนี้

1. ทำการย้ายแรง $\vec{F}_1$ มาที่จุด O จะเกิดคับเปิล $\vec{M}_1$ ขึ้น โดยคับเปิลนี้มีขนาดเท่ากับ $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$
2. ทำเช่นเดียวกัน กับแรง $\vec{F}_2$ และ $\vec{F}_3$ จะได้ว่าแรงทุกแรง กระทำผ่านที่จุด O ทั้งหมด ดังแสดงดังรูปที่ 1(b)
3. รวมแรงทั้งสามแรง เป็นแรง $\vec{R}$ เพียงแรงเดียว และรวมคับเปิลทั้งสามคับเปิล เป็นคับเปิล $\vec{M}$ เพียงคับเปิลเดียว ดังแสดงในรูปที่ 1(c) โดย

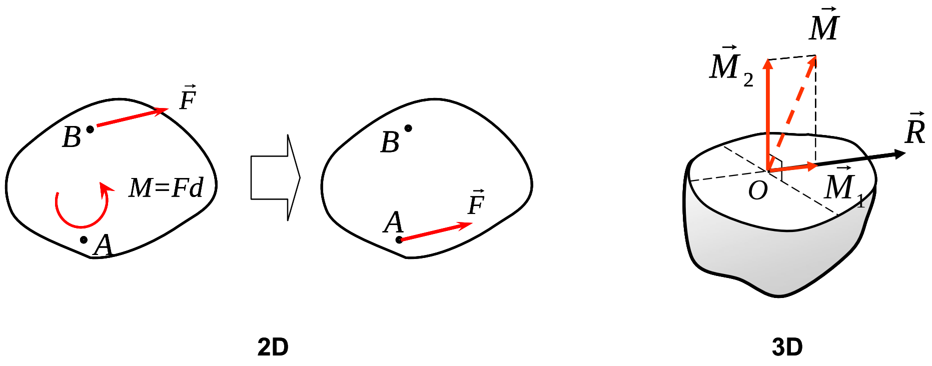
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \sum \vec{F}$$
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \qquad (1)$$

การรวมแรงและโมเมนต์ ในระบบพิกัดฉากสามารถรวมได้ดังนี้

$$R_x = \sum F_x\,, \qquad R_y = \sum F_y\,, \qquad R_z = \sum F_z\,,$$
$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}\,,$$
$$\vec{M}_x = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_x\,, \qquad \vec{M}_y = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_y\,, \qquad \vec{M}_z = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_z\,,$$
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

เนื่องจากการย้ายแรงมาที่จุด O ทำให้เกิดคับเปิล ซึ่งมีค่าเสมือนโมเมนต์โดยที่ใช้จุด O เป็นจุดหมุน ดังนั้นการเลือกจุด O ที่แตกต่างกันก็จะทำให้คำนวณค่าคับเปิลรวมได้ต่างกันด้วย อย่างไรก็ตาม ไม่ว่าจะเลือกจุดใด ก็จะได้ค่าแรงรวมที่เหมือนเดิม

ความแตกต่างระหว่าง Resultants ในสองมิติกับสามมิติ



รูปที่ 2 Resultants ในสองมิติและสามมิติ

เมื่อเปรียบเทียบการหา Resultants ในกรณี 2 มิติ กับ 3 มิติแล้ว ถึงแม้ว่าทั้งสองกรณีจะมีวิธีการที่เหมือนกัน แต่ด้วยลักษณะของทิศทางแรงกระทำ จะทำให้การลดรูปแรงต่างๆ เป็นรูปอย่างง่ายได้แตกต่างกัน

สำหรับกรณี 2 มิติ เมื่อลดรูปแรงต่างๆ ให้เป็นแรงแรงเดียวและคับเปิลได้แล้ว เนื่องจากทิศทางของคับเปิลกับแรงตั้งฉากกัน ดังนั้นจะสามารถลดรูปอย่างง่ายให้เหลือเพียงแรงแรงเดียวได้ ดังแสดงในรูปที่ 2 กรณี 2 มิติ (เนื่องจาก $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ดังนั้นทิศทางของโมเมนต์ หรือคับเปิล กับทิศทางของแรงจะตั้งฉากกันเสมอ)

อย่างไรก็ตามในกรณี 3 มิติ เนื่องจากทิศทางของคับเปิลลัพธ์ ไม่ได้ตั้งฉากกับทิศทางของแรงลัพธ์ (ดูรูปที่ 2 กรณี 3 มิติ) ดังนั้นจึงไม่สามารถจึงยุบแรงและคับเปิลให้เป็นแรงลัพธ์เพียงแรงเดียวได้

กรณีต่าง ๆ ของแรงใน 3 มิติ

1. <u>แรงที่แนวแรงตัดกันที่จุดจุดเดียว (Concurrent forces)</u>

ในกรณีนี้ Resultant จะเป็นแรงลัพธ์เพียงอย่างเดียว โดยแรงลัพท์ จะต้องผ่านจุดที่แนวแรงย่อยๆ ตัดกันด้วย

2. <u>แรงขนานกัน แต่อยู่คนละระนาบกัน (Parallel forces)</u>

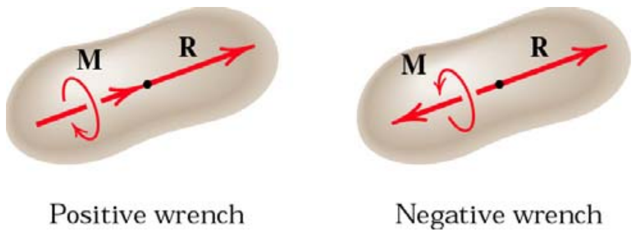
ในกรณีนี้ Resultant จะเป็นแรงลัพธ์เพียงอย่างเดียวเช่นกัน แต่ถ้าแรงลัพธ์รวมมีค่าเป็นศูนย์ Resultant จะเป็นคับเปิล ในทิศทางตั้งฉากกับแนวแรงนั้น

3. <u>กรณีแรงอยู่ในระนาบเดียวกัน (Coplanar forces)</u>

กรณีนี้คือปัญหา 2 มิติ ตามที่ได้กล่าวมาแล้ว

Wrench resultant

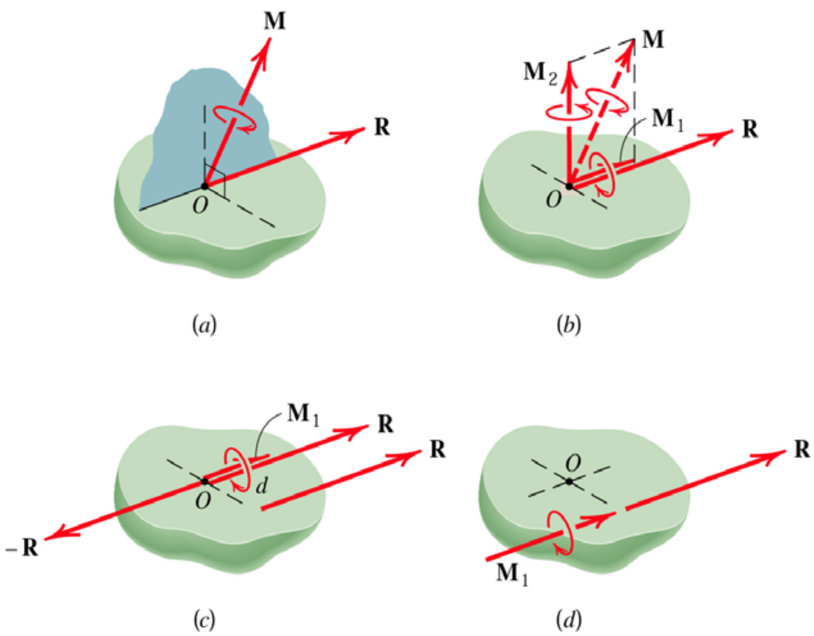
ในกรณีของปัญหา 2 มิติ ระบบของแรงสามารถลดรูปได้เหลือเพียงแรงแรงเดียว หรือคับเปิลเดียว อย่างไรก็ตามในปัญหา 3 มิติ ไม่สามารถลดรูปให้เหลือแรงแรงเดียว หรือคับเปิลเดียวในทุกๆ กรณีได้ อย่างไรก็ตามระบบแรงใน 3 มิติ จะสามารถลดรูปให้อยู่ในรูปของ Wrench resultant ดังแสดงในรูปที่ 3 ได้



รูปที่ 3 Wrench resultant

Wrench resultant คือระบบที่ประกอบด้วยแรง 1 แรง และคับเปิลที่มีทิศทางเดียวกัน หรือทิศตรงกันข้ามกับแรงนั้น โดยถ้าแรงและคับเปิลมีทิศเดียวกัน จะเรียกว่า Positive wrench แต่ถ้ามีทิศทางตรงกันข้ามจะเรียกว่า Negative wrench

วิธีการเปลี่ยนรูปแรงและคับเปิลที่ได้ในรูปที่ 1(c) ให้เป็น Wrench resultants ทำได้ตามขั้นตอนแสดงในรูปที่ 4 ดังนี้

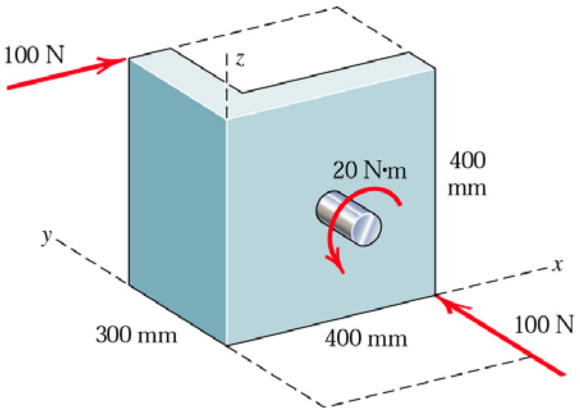


รูปที่ 4 การเปลี่ยนระบบแรงและคับเปิล เป็น Wrench resultant

1. แตกคับเปิลให้อยู่ในทิศทางเดียวกับแรง และทิศตั้งฉากกับแรง ดังแสดงในรูปที่ 4(b)
2. สำหรับโมเมนต์ $\bar{M}_2$ ที่มีทิศทางตั้งฉากกับแรง จะสามารถเขียนแทนได้ด้วย แรงคู่ควบ $\bar{R}$ และ $-\bar{R}$ ซึ่งห่างกันเป็นระยะ d โดย $M_2 = Rd$ ดังแสดงในรูปที่ 4(c)
3. แรง $\bar{R}$ และ $-\bar{R}$ ซึ่งอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ในรูปที่ 4(c) จะหักล้างกันหมดไป เหลือเพียงแรง $\bar{R}$ และคับเปิล $\bar{M}_1$ ซึ่งมีทิศทางเดียวกับทิศของแรง เนื่องจากคับเปิลเป็น Free vector ดังนั้นจึงสามารถย้ายคับเปิลมาต่อกับแรงได้ ดังแสดงในรูปที่ 4(d)

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์

2/149 The resultant of the two forces and couple may be represented by a wrench. Determine the vector expression for the moment **M** of the wrench and find the coordinates of the point *P* in the *x*-*z* plane through which the resultant force of the wrench passes.



วิธีทำ จากรูปโจทย์ แรงลัพธ์ $\vec{R} = 100\hat{i} + 100\hat{j}$

$$|\vec{R}| = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$$

หาทิศทางที่แรงลัพธ์กระทำกับแกน *x*-*y*-*z*

จาก $\vec{R}\cdot\hat{i} = R(1)\cos\theta_x$ ดังนั้น $\cos\theta_x = \dfrac{\vec{R}\cdot\hat{i}}{R} = \dfrac{R_x}{R}$

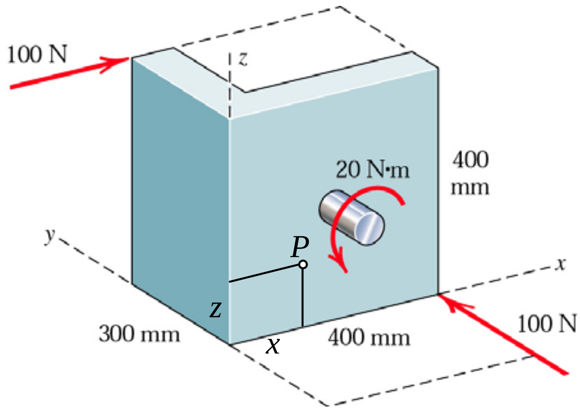
$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{0}{100\sqrt{2}} = 0$$

สมมุติให้ Wrench resultant ผ่านจุด *P* บนระนาบ *x*-*z* ดังนั้น เมื่อย้ายแรงทั้งหมดไปที่จุด *P* แล้ว จะเกิดคับเปิลขึ้น ซึ่งมีขนาดเท่ากับผลรวมของโมเมนต์ของแรงย่อยๆ รอบจุด *P* และคับเปิลที่เกิดขึ้นนี้จะมีทิศทางเดียวกับแรงลัพธ์ *R*



$$\vec{M}_P = 100(z)\hat{i} + 100(0.4 - x)\hat{k} - 100(0.3)\hat{k} + 100(0.4 - z)\hat{j} - 20\hat{j}$$

$$\vec{M}_P = 100z\hat{i} + (20 - 100z)\hat{j} + (10 - 100x)\hat{k} \qquad (1)$$

เนื่องจาก สมมุติให้ Wrench resultant ผ่านจุด P ดังนั้นคับเปิลที่เกิดขึ้นนี้จะมีทิศทางเดียวกับแรงลัพธ์ R

ทำนองเดียวกับแรง $\vec{M}\cdot\hat{i} = M(1)\cos\theta_x$ ดังนั้น $\cos\theta_x = \frac{\vec{M}\cdot\hat{i}}{M} = \frac{M_x}{M}$

$$\cos\theta_x = \frac{M_x}{M} = \frac{100z}{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

ทำนองเดียวกัน $$\cos\theta_y = \frac{M_y}{M} = \frac{20 - 100z}{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (3)$$

$$\cos\theta_z = \frac{M_y}{M} = \frac{10 - 100x}{M} = 0 \qquad (4)$$

แก้ระบบสมการ (2), (3) และ (4) จะได้ $x = 0.1$ $z = 0.1$ $M = 10\sqrt{2}$

พิกัดจุด $P : x = z = 0.1$ m <u>*Ans*</u>

แทนค่า x และ z ลงในสมการ (1) จะได้

$$\vec{M}_P = 10\hat{i} + 10\hat{j} \quad \text{Nm}$$ <u>*Ans*</u>