

สถิตยศาสตร์ (Statics)

บทที่ 3 สภาพสมดุล (ตอนที่ 1)

3/1 บทนำ

สภาพสมดุล เป็นสภาพที่วัตถุหยุดนิ่ง หรือเคลื่อนที่ในทิศทางตรง (ไม่มีการเปลี่ยนทิศทางการเคลื่อนที่) ด้วยความเร็วคงที่ ตามกฎข้อที่สองของนิวตันพบว่า วัตถุจะอยู่ในสภาพสมดุลได้เมื่อ Resultant ของทุกๆ แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับวัตถุมีค่าเป็น 0 หรือเขียนได้ดังสมการที่ (1) ดังนี้

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \quad \text{และ} \quad \vec{M} = \sum \vec{M} = 0 \quad (1)$$

เนื่องจากวัตถุในธรรมชาติมีลักษณะเป็นสามมิติ ดังนั้นการพิจารณาปัญหาสภาพสมดุล จึงควรคิดเป็นปัญหาสามมิติ อย่างไรก็ตาม ถ้าแรงทุกๆ แรง กระทำในระนาบเดียวกันทั้งหมด จะพิจารณาปัญหาเป็นปัญหาสมดุลในสองมิติได้ สำหรับในส่วนแรกของบทนี้จะกล่าวถึง ปัญหาสภาพสมดุลในสองมิติ และจึงกล่าวถึงปัญหาสภาพสมดุลในสามมิติ ในส่วนหลังของบทต่อไป

Section A สภาพสมดุลในสองมิติ

3/2 การเขียน Free-body diagram

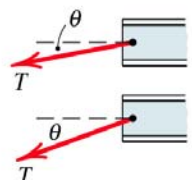
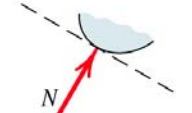
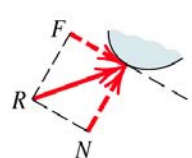
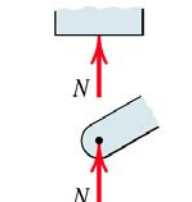
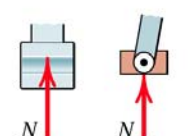
จากสมการที่ (1) พบว่าการแก้ปัญหาสมดุล จำเป็นที่จะต้องทราบแรง และโมเมนต์ทั้งหมดที่กระทำกับวัตถุก่อน เนื่องจากวัตถุที่เราพิจารณานั้นอาจมีแรงภายนอก หรือแรงเนื่องจากน้ำหนักกระทำ แรงพวกนี้เห็นได้ชัดเจน และมักจะไม่มีปัญหาในการพิจารณา อย่างไรก็ตาม โดยปกติวัตถุที่พิจารณามักจะมีการเชื่อมต่อกับวัตถุชิ้นอื่นๆ ซึ่งจะต้องมีแรงกระทำระหว่างกันอยู่ด้วย การพิจารณาปัญหาสมดุล จึงต้องแยกแยะให้ชัดเจนก่อนว่า จะพิจารณาวัตถุใด และวัตถุที่พิจารณานั้นมีแรงใดกระทำอยู่บ้าง แรงที่กระทำหมายถึง แรงภายนอกแรงเนื่องจากน้ำหนัก และแรงเนื่องจากการเชื่อมต่อของวัตถุที่กำลังพิจารณากับวัตถุอื่น

การแยกวัตถุที่พิจารณาให้เห็นได้อย่างชัดเจนและเขียนแรงที่กระทำกับวัตถุนั้น เรียกว่า การเขียน **Free-body diagram**

ก่อนที่จะศึกษาถึงวิธีการเขียน Free-body diagram จะกล่าวถึงการพิจารณาแรงเนื่องจากการเชื่อมต่อ หรือสัมผัสกันของวัตถุก่อน

แรงเนื่องจากการเชื่อมต่อ

รูปที่ 1 แสดงถึงแรงกระทำเนื่องจากการเชื่อมต่อของวัตถุที่พิจารณากับวัตถุอื่น โดยทางด้านซ้ายมือ จะแสดงถึงรูปการเชื่อมต่อ ส่วนทางด้านขวามือ จะแสดงถึงแรงที่กระทำกับวัตถุที่พิจารณา

MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS	
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to Be Isolated
1. Flexible cable, belt, chain, or rope Weight of cable negligible Weight of cable not negligible	 <p>Force exerted by a flexible cable is always a tension away from the body in the direction of the cable.</p>
2. Smooth surfaces	 <p>Contact force is compressive and is normal to the surface.</p>
3. Rough surfaces	 <p>Rough surfaces are capable of supporting a tangential component F (frictional force) as well as a normal component N of the resultant contact force R.</p>
4. Roller support	 <p>Roller, rocker, or ball support transmits a compressive force normal to the supporting surface.</p>
5. Freely sliding guide	 <p>Collar or slider free to move along smooth guides; can support force normal to guide only.</p>

รูปที่ 1 แรงที่กระทำเนื่องจากการเชื่อมต่อในสองมิติ

ตัวอย่างที่ 1 แรงดึงที่เคเบิลกระทำกับคาน เคเบิล หรือเชือกเป็นชิ้นส่วนที่สามารถรับได้ เฉพาะแรงดึงเท่านั้น ไม่สามารถรับแรงกดได้ เนื่องจากถ้ารับแรงกดเชือก หรือเคเบิลจะหย่อน ทำให้ไม่สามารถใช้งานได้ เมื่อพิจารณาที่คาน เนื่องจากคานได้รับแรงดึงจากเคเบิล แรงที่กระทำกับคานจึงมีทิศพุ่งออกจากคาน และมีทิศทางเดียวกับทิศทางการขึงเคเบิล ดังแสดงในรูปที่ 1 (ในทางตรงกันข้าม ถ้าเลือกพิจารณาที่เคเบิล จะพบว่าแรงจะต้องพุ่งออกจากเคเบิลเช่นกัน

เนื่องจากต้องเป็นแรงดึง) ถ้าพิจารณาน้ำหนักของเคเบิล จะพบว่าเคเบิลจะต้องหย่อนเล็กน้อย เนื่องจากน้ำหนักตัวมันเอง การเขียนแรงในกรณีนี้ยังคงเหมือนเดิม เพียงแต่ทิศทางแรงกระทำจะต่างไปจากเดิมเล็กน้อย

ตัวอย่างที่ 2 การสัมผัสของผิวเกลี้ยงซึ่งไม่มีแรงเสียดทาน โดยพิจารณาวัตถุสีฟ้า (ด้านขวามือ) เป็นวัตถุที่สนใจ ขั้นแรกให้พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุเสียก่อน จะพบว่าวัตถุสีฟ้าจะสามารถเคลื่อนได้อย่างอิสระในทิศทางตามผิวของวัตถุอีกชิ้น การที่วัตถุเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระหมายถึงจะต้องไม่มีแรงกระทำอะไรมาต้านทานการเคลื่อนที่ในทิศทางผิวสัมผัส ในทางตรงกันข้าม วัตถุไม่สามารถเคลื่อนที่เข้าไปในเนื้อของวัตถุอีกชิ้นได้ แสดงว่าจะต้องมีแรงต้านทานของวัตถุอีกชิ้นมาดันเอาไว้ในทิศทางตั้งฉากกับผิวสัมผัส ดังแสดงในรูปทางด้านขวามือ นอกจากนี้ยังสังเกตได้ว่า วัตถุสีฟ้าสามารถเคลื่อนที่ออกจากวัตถุอีกชิ้นได้ ดังนั้นแรง N จึงไม่สามารถเป็นแรงดึงได้ เป็นได้แต่แรงกดเท่านั้น

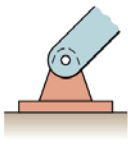
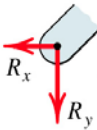
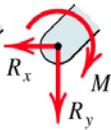
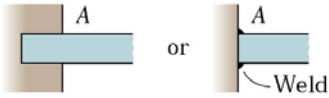
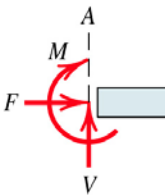
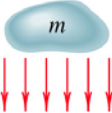
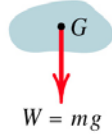
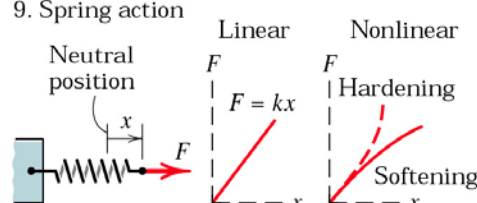

ในตัวอย่างนี้เราพิจารณาการเคลื่อนที่ และแรงในสองทิศทางที่ตั้งฉากกันเท่านั้น เพราะแรงใดๆ ก็ตามจะสามารถแตกออกได้เป็นแรงสองแรงในทิศทางตั้งฉากกัน การพิจารณาแรงย่อยในสองทิศทางที่ตั้งฉากกัน จึงครอบคลุมถึงแรงกระทำในทิศทางใดๆ

ตัวอย่างที่ 3 การสัมผัสของผิวหยาบซึ่งมีแรงเสียดทาน ตัวอย่างนี้พิจารณาได้คล้ายๆ กับตัวอย่างที่ 2 ต่างกันที่เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ตามผิวสัมผัส จะพบว่ามีความต้านทานจากแรงเสียดทานเพิ่มเข้ามา ดังนั้นแรงที่กระทำกับวัตถุสีฟ้า (ด้านขวา) ในกรณีนี้จึงมีทั้งแรงในแนวตั้งฉากกับเส้นสัมผัส N และแรงในแนวเส้นสัมผัส F โดยแรงทั้งสองจะสามารถรวมกันได้เป็น แรงลัพธ์ R

ทิศทางของแรงเสียดทานในแนวเส้นสัมผัส F จะขึ้นกับทิศทางการเคลื่อนที่ หรือแนวโน้มที่จะเคลื่อนที่ โดยแรง F จะมีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ หรือทิศทางที่ต้านไม่ให้เกิดการเคลื่อนที่เสมอ

ตัวอย่างที่ 4 ชิ้นส่วนรองรับแบบลูกกลิ้ง (Roller support) ตัวอย่างนี้พิจารณาได้เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 2 เช่นกัน โดยลูกกลิ้งไม่สามารถเคลื่อนที่เข้าไปในพื้นที่ได้ ดังนั้นจึงต้องมีแรง N กดเข้าที่ชิ้นส่วนที่ต่อกับล้อ (สีฟ้า) เนื่องจากสามารถยกลูกกลิ้งให้สูงจากพื้นได้ ดังนั้นแรง N จึงเป็นแรงกดได้อย่างเดียว เป็นแรงดึงไม่ได้ เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ตามแนวราบเนื่องจากล้อ หรือลูกกลิ้งสามารถเคลื่อนที่ได้อิสระตามแนวราบ (ไม่คิดแรงเสียดทาน) ดังนั้นจึงไม่มีแรงใดๆ กระทำในแนวราบ

ตัวอย่างที่ 5 การเลื่อนตัวเลื่อนไปตามรางซึ่งไม่มีแรงเสียดทาน เนื่องจากตัวเลื่อนสามารถเคลื่อนได้อย่างอิสระบนราง ดังนั้นจึงไม่มีแรงกระทำใดๆ ในทิศทางของราง แต่เนื่องจากตัวเลื่อนไม่สามารถเคลื่อนที่ขึ้นลงออกจากรางได้ ดังนั้นจึงต้องมีแรงกระทำในทิศทางตั้งฉากกับราง ดังแสดงในรูปด้านขวามือ

MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS (cont.)	
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to Be Isolated
6. Pin connection 	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> Pin free to turn  </div> <div style="text-align: center;"> Pin not free to turn  </div> </div> <p>A freely hinged pin connection is capable of supporting a force in any direction in the plane normal to the axis; usually shown as two components R_x and R_y. A pin not free to turn may also support a couple M.</p>
7. Built-in or fixed support 	 <p>A built-in or fixed support is capable of supporting an axial force F, a transverse force V (shear force), and a couple M (bending moment) to prevent rotation.</p>
8. Gravitational attraction 	 <p>The resultant of gravitational attraction on all elements of a body of mass m is the weight $W = mg$ and acts toward the center of the earth through the center mass G.</p>
9. Spring action 	 <p>Spring force is tensile if spring is stretched and compressive if compressed. For a linearly elastic spring the stiffness k is the force required to deform the spring a unit distance.</p>

รูปที่ 2 แรงที่กระทำเนื่องจากการเชื่อมต่อในสองมิติ (ต่อ)

ตัวอย่างที่ 6 การเชื่อมต่อโดยข้อต่อแบบหมุด (Pin connection) เมื่อพิจารณาถึงการเคลื่อนที่ที่เป็นไปได้ของการเชื่อมต่อแบบนี้ พบว่าชิ้นส่วนสีฟ้าสามารถหมุนไปมาได้อิสระ แต่ไม่สามารถดึง หรือกด ให้แยกจากจุดหมุนได้ การที่ดึงหรือกดให้แยกออกจากจุดหมุนไม่ได้นั้น แสดงว่า ต้องมีแรงต้านทานการที่หมุดทั้งในแนวตั้ง และในแนวระดับ โดยทิศทางของแรงจะเป็นแรงดึงหรือกดก็ได้ ขึ้นอยู่กับแรงที่กระทำกับชิ้นส่วนสีฟ้า

ในกรณีที่คิดว่าข้อต่อฝืด หมายถึงมีโมเมนต์เสียดทาน ต้านทานการเคลื่อนที่ด้วย ดังแสดงในรูปที่ 2

ตัวอย่างที่ 7 การเชื่อมต่อแบบยึดแน่น การเชื่อมต่อแบบนี้หมายถึง การเชื่อมต่อซึ่งทำให้ไม่สามารถที่จะขยับชิ้นส่วนสีฟ้าขึ้น หรือลง หรือหมุนชิ้นส่วนสีฟ้าได้เลย การที่ไม่สามารถขยับไปทิศทางใดๆ ได้ หมายความว่าต้องมีแรงต้านทานการเคลื่อนที่ทั้งแนวตั้ง แนวระดับ และโมเมนต์ซึ่งต้านทานการหมุนรวมอยู่ด้วย

ตัวอย่างที่ 8 แรงเนื่องจากน้ำหนัก น้ำหนักของวัตถุใดๆ เป็นแรงกระจายตลอดทั้งเนื้อของวัตถุนั้น อย่างไรก็ตามเพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้น สามารถแทนแรงกระจายตลอดเนื้อวัตถุเป็นแรงลัพธ์ W ซึ่งมีค่าเท่ากับผลคูณของมวล m กับความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g ได้ โดยตำแหน่งของแรงลัพธ์ W จะกระทำผ่านจุดศูนย์กลางถ่วงของวัตถุนั้นๆ

ตัวอย่างที่ 9 แรงจากสปริง แรงดึงหรือแรงกดจากสปริง สามารถแทนได้ด้วยแรงดึงหรือแรงกด ดังแสดงในรูปที่ 2

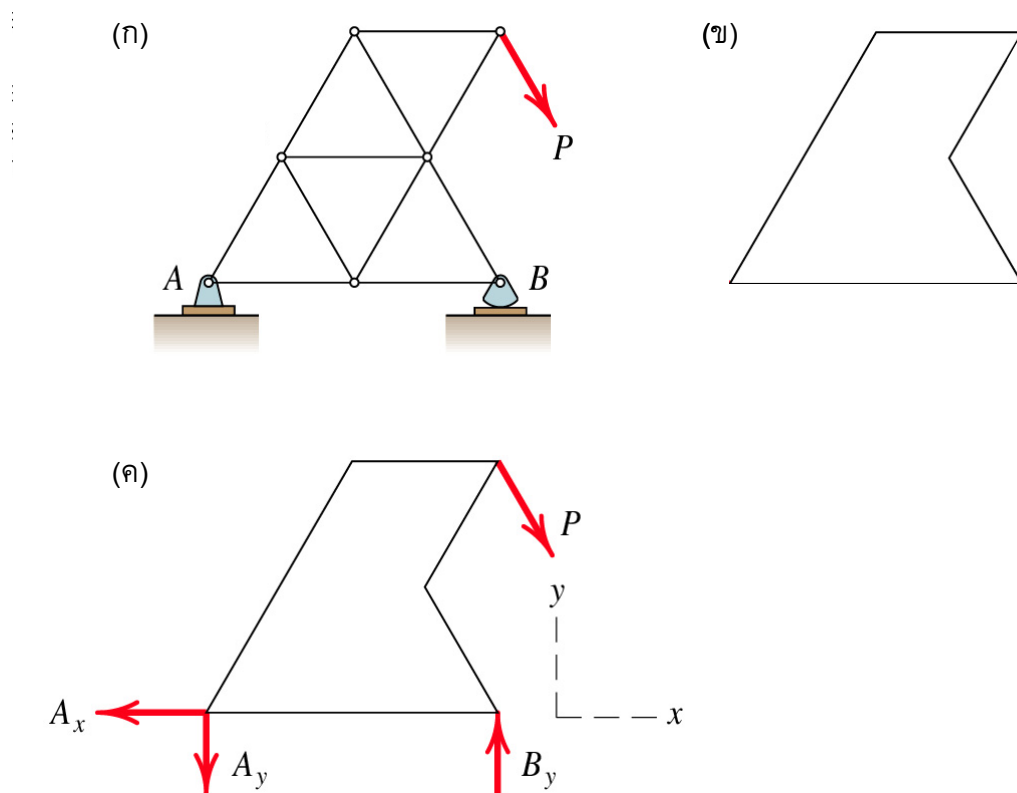
การเขียน Free-body diagram

การเขียน Free-body diagram มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. เลือกวัตถุที่ต้องการจะเขียน Free-body diagram
2. เขียนขอบเขตของวัตถุนั้น
3. ใส่แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับวัตถุนั้น
4. เขียนแกนพิกัด

ตัวอย่างการเขียน Free-body diagram

พิจารณาการเขียน Free-body diagram ของโครงถัก Plane truss ซึ่งรับแรง P ดังแสดงในรูปที่ 3(ก) สมมุติให้น้ำหนักของโครงถักมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรง P จึงไม่คิดน้ำหนักของโครงถัก



รูปที่ 3 การเขียน Free-body diagram ของโครงถัก

ขั้นที่ 1 เลือกโครงถักทั้งหมด Free-body diagram (ไม่คิดชิ้นส่วนรองรับแบบหมุดที่ A และแบบลูกกลิ้งที่ B)

ขั้นที่ 2 เขียนขอบเขตของวัตถุ ดังแสดงในรูปที่ 3(ข)

ขั้นที่ 3 เขียนแรงและโมเมนต์ทั้งหมดที่กระทำ ดังแสดงในรูปที่ 3(ค) แรงทั้งหมดที่กระทำต่อโครงถักมีดังนี้

1. แรงภายนอกที่กระทำกับขอบเขตในรูปที่ 3(ข) มีอยู่แรงเดียว คือ แรง P
2. แรงเนื่องจากการเชื่อมต่อที่จุด A; เนื่องจากจุดนี้เป็นการเชื่อมต่อแบบหมุด จึงมีแรงกระทำสองแรงในแนวตั้ง A_y และในแนวระดับ A_x เนื่องจากยังไม่ทราบทิศทางของแรงทั้งสอง จึงสมมุติให้แรงมีทิศทางดังแสดงในรูป (อาจจะสมมุติเป็นแบบอื่นก็ได้)
3. แรงเนื่องจากการเชื่อมต่อที่จุด B; เนื่องจากจุดนี้เป็นการเชื่อมต่อแบบลูกกลิ้งซึ่งรับแรงกดเพียงอย่างเดียว ดังนั้นแรงที่กระทำจึงต้องเป็นแรงกดกระทำกับโครงถัก
4. แรงเนื่องจากน้ำหนัก; เนื่องจากน้ำหนักของโครงถักมีค่าน้อยกว่าแรงภายนอกมาก ในตัวอย่างนี้จึงไม่คิดแรงเนื่องจากน้ำหนัก

ขั้นที่ 4 เขียนแกนพิกัด ในตัวอย่างนี้ใช้แกนพิกัดจากดังแสดงในรูปที่ 3(ค)

ตัวอย่างอื่นๆ ในการเขียน Free-body diagram แสดงดังรูปที่ 4

ตัวอย่างที่ 2 คานซึ่งมีปลายข้างหนึ่งยึดแน่น เนื่องจากคานในรูปไม่สามารถเคลื่อนที่ขึ้นลง หรือไปซ้ายขวาได้ และไม่สามารถหมุนได้ ดังนั้นที่ปลายข้างที่ยึดแน่นจะต้องมีแรงกระทำ 3 แรง คือ แรงในแนวระดับ F แรงในแนวตั้ง V และโมเมนต์ M

เนื่องจากคานนี้เป็นคานสมำเสมอ และมีมวล m จึงเขียนแรงเนื่องจากน้ำหนักของคาน $W = mg$ ไว้ที่กึ่งกลางคานซึ่งเป็นจุดศูนย์กลาง แรงภายนอกอื่นๆ เขียนเช่นเดียวกับที่กำหนดให้

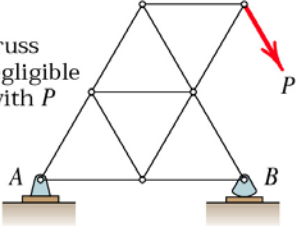
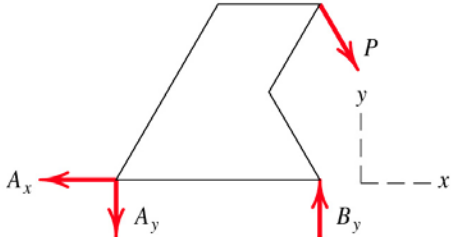
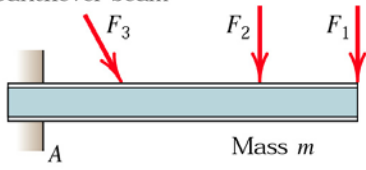
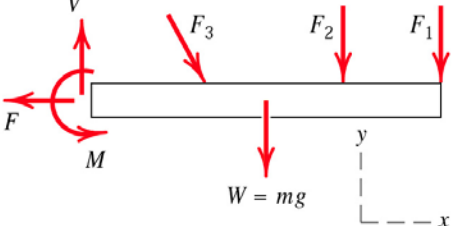
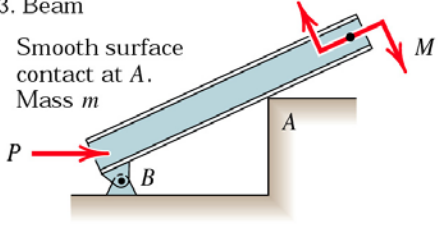
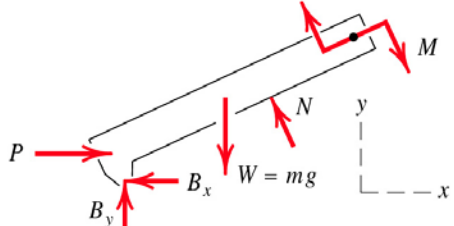
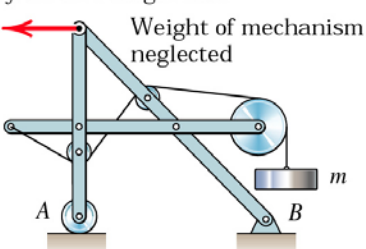
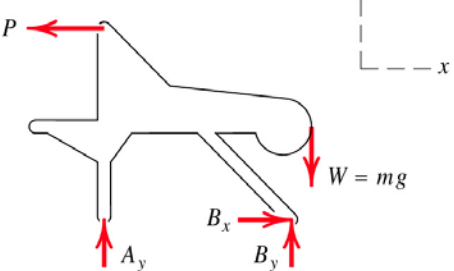
ตัวอย่างที่ 3 คานซึ่งมีปลายยึดด้วยหมุด การยึดด้วยหมุดทำให้คานไม่สามารถเคลื่อนที่ขึ้นหรือลงได้ แต่ยังสามารถหมุนได้อยู่ ดังนั้นที่จุดยึดด้วยหมุด จะมีแรงกระทำ 2 แรง คือแรงในแนวระดับ B_x และแรงในแนวตั้ง B_y ส่วนที่จุด A คานวางพาดไว้กับมุม จึงมีแรงเนื่องจากมุมดันคานด้วย โดยแรงนี้จะกระทำในทิศทางตั้งฉากกับคาน และเป็นแรงกด เนื่องจากผิวคานเป็นผิวเรียบไม่มีแรงเสียดทาน ที่จุด A จึงไม่มีแรงในแนวผิวของคาน

เช่นกับตัวอย่างที่ 2 คานนี้เป็นคานสมำเสมอ แรงเนื่องจากน้ำหนักของคานจึงเขียนแสดงไว้ที่กึ่งกลางคาน แรงและโมเมนต์ภายนอกอื่นๆ แสดงดังที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 4 ระบบกลไกซึ่งมีน้ำหนักถ่วง m ตัวอย่างนี้พิจารณาระบบทั้งหมด การเชื่อมต่อที่ A เป็นแบบลูกกลิ้ง จึงมีแรงในแนวตั้งเพียงแนวเดียว ส่วนที่จุด B เป็นหมุด จึงมีแรงทั้งในแนวตั้งและในแนวระดับ

สำหรับน้ำหนักของโครงสร้างกลไกถือว่ามีน้ำหนักเบา จึงไม่เขียนแรงในแผนภาพ อย่างไรก็ตาม กลไกนี้มีน้ำหนักถ่วง m จึงต้องเขียนแรงเนื่องจากน้ำหนักถ่วง m ด้วย โดยแรงนี้กระทำที่จุดศูนย์กลางถ่วงของมวล m (ถ้าตัดการพิจารณาเพียงแค่ที่เคเบิลแทน จะมีแรงดึงเคเบิล

เกิดขึ้นแทน โดยขนาดของแรงดึงจะมีค่าเท่ากับแรงเนื่องจากน้ำหนักของมวล m) ส่วนแรงภายนอกอื่น แสดงดังที่กำหนดให้

SAMPLE FREE-BODY DIAGRAMS	
Mechanical System	Free-Body Diagram of Isolated Body
<p>1. Plane truss</p> <p>Weight of truss assumed negligible compared with P</p> 	
<p>2. Cantilever beam</p>  <p>Mass m</p>	 <p>$W = mg$</p>
<p>3. Beam</p> <p>Smooth surface contact at A.</p> <p>Mass m</p> 	 <p>$W = mg$</p>
<p>4. Rigid system of interconnected bodies analyzed as a single unit</p> <p>Weight of mechanism neglected</p> 	 <p>$W = mg$</p>

รูปที่ 4 ตัวอย่างการเขียน Free-body diagram

3/3 สภาพสมดุล

สภาพสมดุล เป็นสภาพที่วัตถุหยุดนิ่ง หรือเคลื่อนที่ในทิศทางตรง (ไม่มีการเปลี่ยนทิศทางการเคลื่อนที่) ด้วยความเร็วคงที่ ตามกฎข้อที่สองของนิวตันพบว่า วัตถุจะอยู่ในสภาพสมดุลได้เมื่อ Resultant ของทุกๆ แรงและโมเมนต์ที่กระทำกับวัตถุมีค่าเป็น 0 คำกล่าวนี้สามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการ (2) ดังนี้

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \text{และ} \quad \sum M_o = 0 \quad (2)$$

สำหรับสมการโมเมนต์ในสมการ (2) เป็นโมเมนต์รอบจุด O ใดๆ จุดนี้อาจจะอยู่ในวัตถุหรืออยู่นอกวัตถุก็ได้

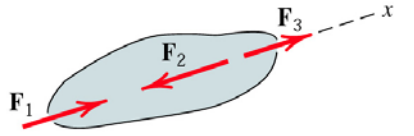
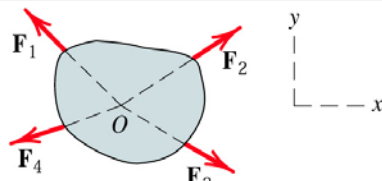
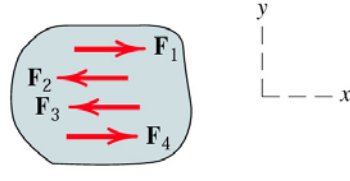
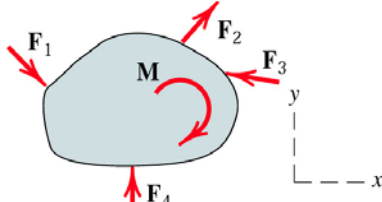
สภาพสมดุลอาจเกิดแค่บางทิศทางก็ได้ เช่น วัตถุเคลื่อนที่แบบเส้นตรงด้วยความเร่งในแนวระดับ กรณีนี้ สภาพสมดุลไม่เกิดในแนวระดับ แต่สภาพสมดุลมีในแนวตั้ง ดังนั้นสามารถใช้สมการสมดุลในแนวตั้งกับกรณีนี้ได้

จากสมการ (2) พบว่าสมการที่จะใช้วิเคราะห์สภาพสมดุลในสองมิติ มีเพียง 3 สมการ ดังนั้นปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ต้องมีตัวไม่ทราบค่าได้มากที่สุดเพียง 3 ตัว มิเช่นนั้นจะไม่สามารถแก้สมการหาค่าตัวไม่ทราบค่าได้ ด้วยวิธีการทางสถิตยศาสตร์

ประเภทของสมดุลในสองมิติ

สมดุลในสองมิติสามารถแบ่งได้เป็นประเภทต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 5

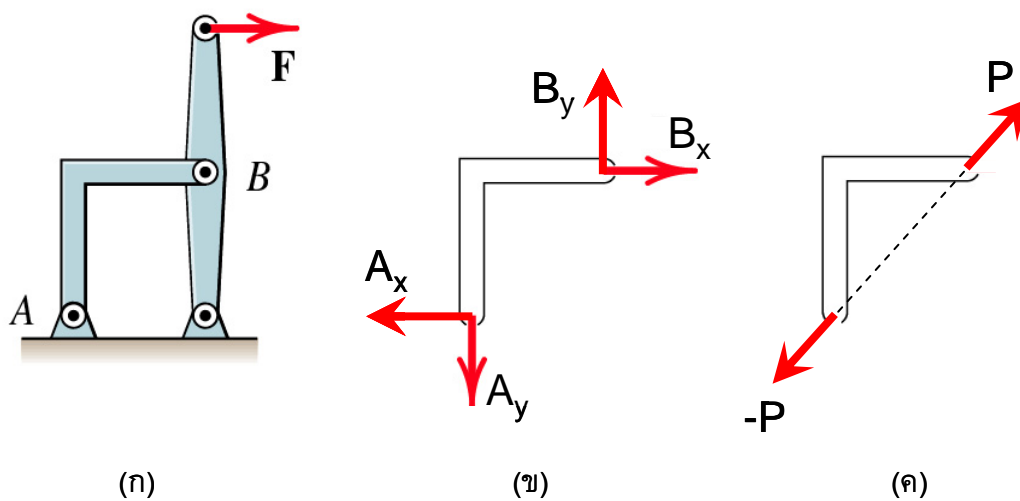
1. แรงอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน (Collinear) ในกรณีนี้ แรงทั้งหมดจะอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้นสมการที่ใช้ จะเป็นเพียงสมการสมดุลในแนวแกนเดียวเท่านั้น
2. แรงทั้งหมดผ่านจุดๆ เดียวกัน (Concurrent at a point) ในกรณีนี้แรงมีทิศทางต่างกัน แต่แรงทุกแรงผ่านจุดเดียวกันหมด สมการที่ใช้จะเป็นสมการสมดุลในแนวแกน x และแกน y ในกรณีนี้จะทำให้สมการโมเมนต์เป็นจริงอยู่แล้ว เนื่องจากโมเมนต์รอบจุดที่แรงทุกๆ แรงผ่านจะมีค่าเท่ากับศูนย์
3. แรงขนานกัน (Parallel) ในกรณีนี้แรงทั้งหมดขนานกัน (ทิศทางเดียวกัน หรือตรงข้ามกัน) แต่ไม่อยู่ในแนวเดียวกัน สมการที่จำเป็นต้องใช้ในกรณีนี้คือ สมการสมดุลในทิศทางของแรง และสมการโมเมนต์
4. กรณีใดๆ (General) กรณีนี้แรง ต่างๆ ไม่ขนานกัน และไม่ผ่านจุดเดียวกัน และอาจมีค้ำเปิดด้วย ในกรณีนี้จำเป็นต้องใช้สมการสมดุลทั้งหมดที่แสดงในสมการ (2) ในการวิเคราะห์

CATEGORIES OF EQUILIBRIUM IN TWO DIMENSIONS		
Force System	Free-Body Diagram	Independent Equations
1. Collinear		$\Sigma F_x = 0$
2. Concurrent at a point		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
3. Parallel		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_y = 0$

รูปที่ 5 ประเภทของสมดุลใน 2 มิติ

สภาพสมดุลด้วยแรงสองแรง (Two-force member)

เมื่อมีแรงเพียงสองแรงกระทำบนวัตถุ แล้ววัตถุนั้นอยู่ในสภาพสมดุล แรงทั้งสองนั้นต้องมีขนาดเท่ากัน อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และมีทิศตรงกันข้ามกัน ถ้าแรงทั้งสองไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันแล้ว แรงทั้งสองจะทำให้วัตถุเกิดการหมุน จนกระทั่งแนวของแรงอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันจึงจะสมดุล



รูปที่ 6 สภาพสมดุลด้วยแรงสองแรง

รูปที่ 6(ก) แสดงโครงสร้างซึ่งรับแรง F เมื่อพิจารณาชิ้นส่วน AB ถ้าไม่พิจารณาถึงน้ำหนัก (ถ้าแรงเนื่องจากน้ำหนักมีค่าน้อยกว่าแรงภายนอกที่กระทำมากจะละทิ้งได้) จะพบว่าจุดที่แรงกระทำมีเพียง 2 จุดคือ จุด A และจุด B และเนื่องจากที่จุด A และจุด B ยึดด้วยหมุดจากที่กล่าวมาใน**หัวข้อ 3.2** จะพบว่าต้องมีแรงกระทำทั้งในแนวตั้ง และแนวระดับที่จุด A และจุด B ดังแสดงใน**รูปที่ 6(ข)** เนื่องจากแรง $A_x = -B_x$ และแรง $A_y = -B_y$ ดังนั้นจากรูปที่ 6(ข) จะพบว่าไม่มีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากแรงที่จุด A และจุด B สามารถรวมเป็นแรงๆ เดียวได้ ดังนั้นแรงที่กระทำกับชิ้นส่วน AB จึงสามารถลดลงได้เป็น**รูปที่ 6(ค)** เนื่องจากมีแรง 2 แรงกระทำกับชิ้นส่วน AB ที่จุด A และ B ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ว่าแรงทั้ง 2 จะต้องมีความยาวเท่ากัน อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน (แนวเส้นตรง AB) และมีทิศทางตรงกันข้ามกัน จากรูปที่ 6(ค) จะพบว่าไม่มีตัวไม่ทราบค่าเพียงแค่ตัวเดียวเท่านั้น

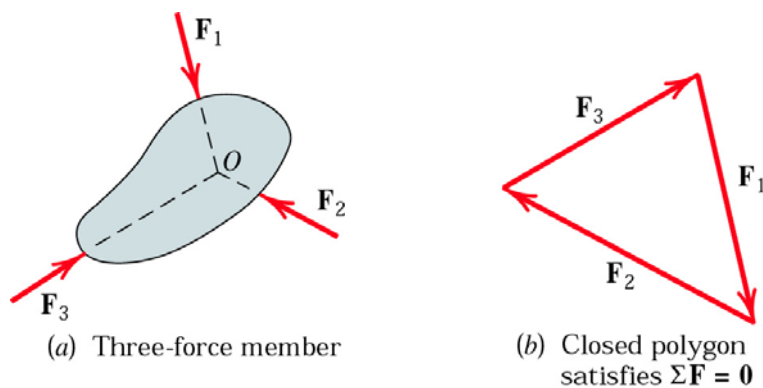
ในตัวอย่างนี้ชิ้นส่วน AB ถูกพิจารณาเป็น 2-Force member ได้ เนื่องจากไม่คิดแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวมัน แต่ถ้าคิดแรงเนื่องจากน้ำหนักด้วยแล้ว แรงทั้งหมดที่กระทำกับชิ้นส่วน AB จะมีทั้งหมด 3 แรง ทำให้แรงที่กระทำที่จุด A และ B ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

สภาพสมดุลด้วยแรงสามแรง (Three-force member)

เมื่อวัตถุอยู่ในสภาพสมดุลด้วยแรง 3 แรง โดยที่แรงทั้งสามไม่ขนานกันแล้ว จะได้ว่าแนวแรงของแรงทั้งสามนั้นต้องตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น ดังแสดงใน**รูปที่ 7(a)** สาเหตุที่แนวแรงทั้งสามต้องตัดกันที่จุดๆ เดียว เพื่อให้สภาพสมดุลของโมเมนต์เป็นจริงได้ จากรูปจะพบว่าผลรวมของโมเมนต์รอบจุด O ซึ่งเป็นจุดที่แนวแรงตัดกัน จะมีค่าเท่ากับศูนย์

ถ้าแรงไม่ตัดกันที่จุดๆ เดียว เมื่อหาผลรวมโมเมนต์รอบจุดตัดของแรงคู่หนึ่งจะพบว่าจะต้องมีโมเมนต์ลัพธ์จากแรงที่แนวแรงไม่ได้ผ่านจุดตัดนั้นเหลืออยู่เสมอ ทำให้ไม่สามารถอยู่ในสภาวะสมดุลได้

เงื่อนไขที่แนวแรงทั้งสามต้องผ่านจุดๆ เดียวกันนั้น มีข้อยกเว้นในกรณีที่แรงทั้งสามขนานกัน ซึ่งจะเกิดสภาพสมดุลของโมเมนต์ได้เช่นกัน



รูปที่ 7 สภาพสมดุลด้วยแรง 3 แรง

เมื่อสมมูลโมเมนต์เป็นจริง เนื่องจากแนวแรงทุกแรงผ่านจุดเดียวกันแล้ว สภาพสมมูลจะสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อ ผลรวมแรงลัพธ์ของแรงทั้งสามต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย จากความรู้เรื่องเวกเตอร์จะพบว่า เมื่อผลรวมเวกเตอร์แรงทั้งสามเป็นศูนย์ เวกเตอร์แรงทั้งสามจะต่อกัน แบบหัวต่อหาง เป็นรูปสามเหลี่ยมปิดได้ ดังแสดงในรูปที่ 7(b)

การเลือกใช้สมการสมมูล

ในการแก้ปัญหาสมมูล โดยปกติจะใช้สมการ (2) ในการแก้ปัญหา โดยมักจะเริ่มจากการใช้สมการโมเมนต์ และตามด้วยสมการสมมูลแรงในแนว x และ y การแก้ปัญหานี้มีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว จึงจำเป็นต้องใช้สมการ 3 สมการในการหาคำตอบ อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหามีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัวนี้ อาจใช้สมการสมมูลชุดอื่นๆ 3 สมการในการแก้ปัญหาก็ได้ ดังแสดงชุดของสมการในสมการ (3) และ (4)

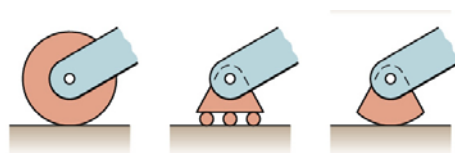
$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \text{และ} \quad \sum F_x = 0 \tag{3}$$

$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \text{และ} \quad \sum M_C = 0 \tag{4}$$

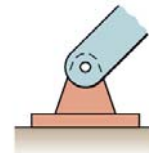
Constraints

Constraints หมายถึง การจำกัดการเคลื่อนที่ เช่น รูปที่ 8(ก) การรองรับแบบลูกกลิ้งสามารถรองรับแรงในแนวตั้ง และจำกัดการเคลื่อนที่ในแนวตั้งได้ แต่ไม่สามารถจำกัดการเคลื่อนที่ในแนวระดับได้ ตัวอย่างนี้จึงบอกได้ว่า ลูกกลิ้งมี constraint ในทิศแนวตั้ง สำหรับรูปที่ 8(ข) การยึดแบบหมุด จำกัดการเคลื่อนที่ทั้งในแนวตั้ง และแนวระดับ จึงกล่าวได้ว่าการยึดแบบหมุดมี constraint ทั้งในแนวตั้งและในแนวระดับ แต่อย่างไรก็ตามการยึดแบบนี้ไม่สามารถรองรับโมเมนต์ที่ใส่เข้าได้ เห็นได้จากชิ้นส่วนสีฟ้า สามารถหมุนได้เมื่อมีโมเมนต์มากระทำ ส่วนรูปที่ 8(ค) แสดงถึงการยึดแน่น หรือการเชื่อมติด การยึดแบบนี้ชิ้นส่วนสีฟ้าไม่สามารถเคลื่อนที่ในแนวตั้ง แนวระดับ หรือหมุนได้เลย ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าการยึดแบบนี้มี constraint ทั้งในแนวตั้ง แนวระดับ และการหมุน

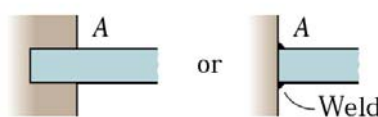
(ก)



(ข)



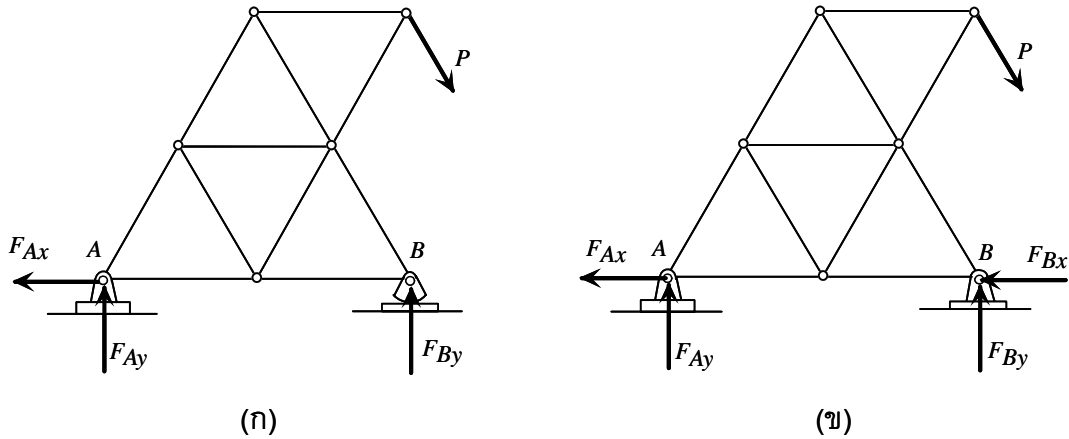
(ค)



รูปที่ 8 Constraints แบบต่างๆ

Statical Determinacy

เนื่องจากสมการที่แสดงถึงสภาพสมดุลในสองมิติ มีอยู่ 3 สมการ ดังนั้นตัวไม่ทราบค่าของปัญหานั้นๆ จึงมีได้มากที่สุดเพียง 3 ตัวเท่านั้น พิจารณารูปที่ 9 ซึ่งแสดงถึงปัญหาที่แก้ได้โดยวิธีการทางสถิตศาสตร์ และปัญหาที่แก้ไม่ได้โดยวิธีการทางสถิตศาสตร์



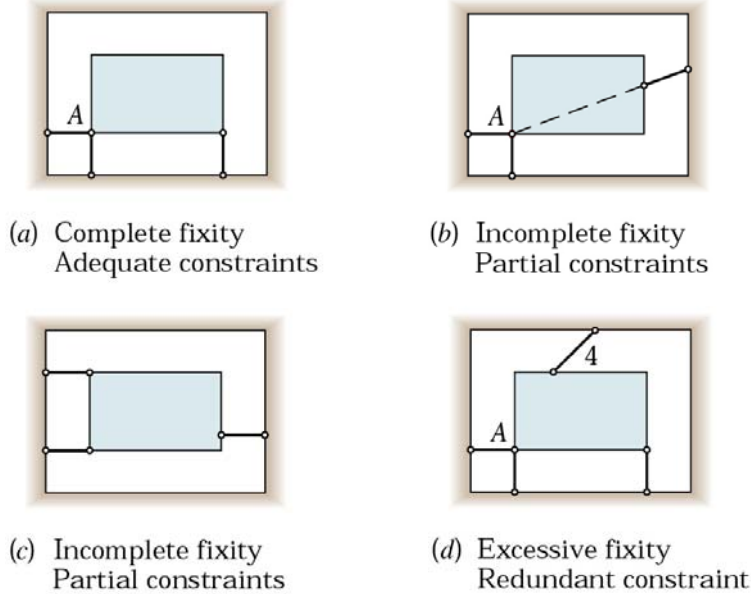
รูปที่ 9 ปัญหาที่แก้ได้ และไม่ได้โดยวิธีทางสถิตศาสตร์

พิจารณาแรงที่รองรับโครงสร้างที่จุด A และ B ในกรณีของรูปที่ 9(ก) ที่จุด A เป็นการยึดแบบหมุด จึงมีแรงกระทำ 2 ทิศทางในแนวตั้ง และแนวระดับ ส่วนที่จุด B เป็นการรองรับแบบลูกกลิ้ง จึงมีแรงกระทำในแนวตั้งเพียงอย่างเดียว จะพบว่าปัญหาในรูปที่ 9(ก) มีตัวไม่ทราบค่าที่จุดรองรับ 3 ตัว จึงสามารถแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยวิธีการทางสถิตศาสตร์ โดยใช้สมการสมดุลทั้ง 3 สมการได้ ปัญหาแบบนี้จึงเรียกว่าเป็น ปัญหาที่แก้ได้โดยวิธีทางสถิตศาสตร์ (Statically determinate)

ส่วนในรูปที่ 9(ข) จุดรองรับที่จุด B เป็นแบบหมุดยึดเช่นเดียวกับที่จุด A ทำให้มีแรงกระทำที่จุด B เพิ่มจากรูปที่ 9(ก) เป็น 2 แรง และมีแรงซึ่งไม่ทราบค่าทั้งหมด 4 แรง อย่างไรก็ตามสมการแสดงสภาพสมดุลมีอยู่เพียง 3 สมการ ดังนั้นจึงไม่สามารถแก้ปัญหานี้ได้ตามวิธีการสถิตศาสตร์ ปัญหาที่มีลักษณะเช่นนี้เรียกว่า ปัญหาที่แก้ไม่ได้โดยวิธีทางสถิตศาสตร์ (Statically indeterminate) การแก้ปัญหาลักษณะนี้จำเป็นต้องมีข้อมูล เช่นคุณสมบัติของวัสดุ เพื่อใช้สร้างสมการเพิ่มเติม

Adequacy of Constraints

การยึดวัตถุให้อยู่ในสภาพสมดุลนั้น จำเป็นที่จะต้องจำกัดไม่ให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ในแนวระดับ แนวตั้ง และไม่ให้อัตถุเกิดการหมุน หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า วัตถุต้องมี Constraint ในแนวระดับ แนวตั้ง และการหมุน พิจารณารูปที่ 10 ซึ่งแสดงรูปแบบการยึดต่างๆ กัน



รูปที่ 10 การยึดวัตถุในรูปแบบต่างๆ

การยึดวัตถุในรูปที่ 10 จะใช้การยึดโดยข้อต่อ โดยข้อต่อแต่ละอันจะสามารถรับแรงในแนวแกนของมันเท่านั้น ในรูปที่ 10(a) ข้อต่อในแนวระดับที่จุด A ทำหน้าที่รับแรง และยึดไม่ให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนวระดับ ข้อต่อ 2 ข้อที่วางตัวในแนวตั้ง ทำหน้าที่รับแรง และยึดไม่ให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง นอกจากนี้ ข้อต่อทั้งสองข้อนี้ยังทำหน้าที่รับโมเมนต์ และต้านทานการหมุนที่จะเกิดขึ้นด้วย จะเห็นว่าข้อต่อทั้ง 3 ข้อ สามารถยึดให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลได้โดยสมบูรณ์ โดยข้อต่อทั้ง 3 ข้อ มีความจำเป็นในการยึดโดยจะขาดข้อต่อใด ข้อต่อหนึ่งไม่ได้ กรณีนี้จะเรียกว่า การยึดโดยสมบูรณ์มีตัวจับยึดเพียงพอ (Adequate constraints)

รูปที่ 10(b) แสดงการจับยึดโดยมีข้อต่อ 3 ตัวเช่นเดียวกับที่แสดงในรูป 10(a) ต่างกันตรงที่ทิศทางการวางตัวของข้อต่อทั้งสามผ่านจุดเดียวกัน ที่จุด A เนื่องจากข้อต่อทั้งสามวางตัวอยู่ในแนวระดับ และอยู่ในแนวตั้ง ข้อต่อทั้งสามจึงสามารถรับแรง และยึดไม่ให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนวระดับ และแนวตั้งได้ อย่างไรก็ตามเนื่องจากการวางตัวของข้อต่อทั้งสามผ่านจุดเดียวกัน ดังนั้นข้อต่อทั้งสาม จึงไม่สามารถรับโมเมนต์ซึ่งทำให้วัตถุหมุนรอบจุด A ได้ ในกรณีนี้จะเรียกว่า การยึดบางส่วนโดยมีตัวจับยึดไม่เพียงพอ (Partial constraints)

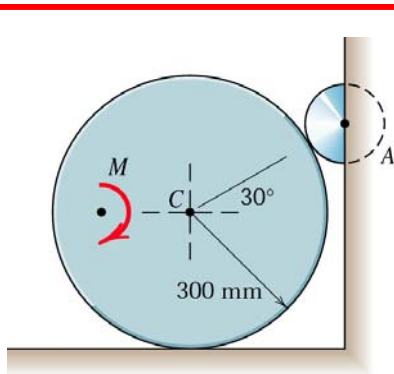
รูปที่ 10(c) แสดงการยึดโดยใช้ข้อต่อ 3 ตัวเช่นเดียวกัน แต่ข้อต่อทั้ง 3 ตัวอยู่ในแนวระดับ ข้อต่อทั้ง 3 นี้จะรับแรง และยึดไม่ให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนวระดับ และยึดไม่ให้เกิดการหมุนจากโมเมนต์ที่จะใส่เข้ามาได้ อย่างไรก็ตาม เนื่องจากระบบนี้ไม่มีข้อต่อซึ่งรับแรงในแนวตั้ง ดังนั้นการยึดในรูปนี้จึงเป็น การยึดเพียงบางส่วนโดยมีตัวจับยึดไม่เพียงพอ (Partial constraints)

รูปที่ 10(d) แสดงการจับยึดโดยใช้ข้อต่อ 4 ตัว 3 ตัวแรกวางตัวเช่นเดียวกับการจับยึดในรูปที่ 10(a) ดังนั้นจะเห็นว่าเพียงแค่ตัวจับยึด 3 ตัวก็ทำให้ยึดได้อย่างสมบูรณ์แล้ว การมีข้อต่อเพิ่มมาอีก 1 ตัว จึงเป็นการยึดซึ่งมีข้อต่อที่มากเกินไป (Redundant constraint)

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาสภาพสมดุลในสองมิติ

1. ตรวจสอบว่าปริมาณ หรือแรงใดทราบค่า หรือไม่ทราบค่าบ้าง
2. เลือกวัตถุที่จะพิจารณา และเขียน Free-body diagram แยกออกมา ไม่เขียนแรงในรูป โจทย์ เพราะจะทำให้สับสนได้ง่าย
3. ตั้งแกนพิกัดให้เหมาะสม และเลือกทิศทางซึ่งโมเมนต์มีค่าบวก (อาจเลือกตามกฎมือขวาก็ได้)
4. เลือกใช้สมการสมดุลของโมเมนต์ $\sum M_o = 0$ โดยเลือกจุดหมุนเป็นจุดที่มีแรงผ่านมากที่สุด
5. เลือกใช้สมการสมดุลของแรงในแนว x และ y $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ (อาจเลือกใช้สมการชุดอื่นๆ เช่น ใช้สมการโมเมนต์รอบจุดอื่น อีก 1 หรือ 2 จุด เป็นต้น)
6. แก้อสมการที่ได้จากขั้นตอน 4-5 จะได้คำตอบตามต้องการ

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์

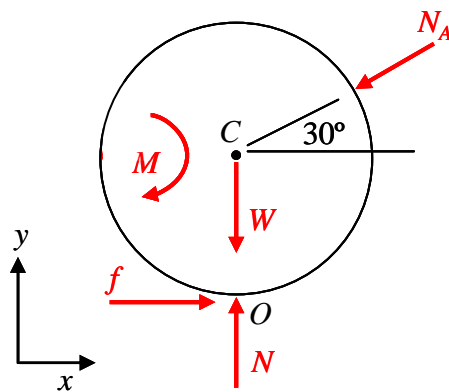


3/15 The 100-kg wheel rests on a rough surface and bears against the roller A when the couple M is applied, If $M = 60 \text{ Nm}$ and the wheel does not slip, compute the reaction on the roller A.

วิธีทำ กำหนด $W = mg = (100)(9.81) \text{ N}$

$$M = 60 \text{ Nm}$$

เขียน Free-body diagram ของล้อ 100 kg



$$[\sum M_C = 0] \quad \text{CW+}$$

$$60 - f(0.3) = 0$$

$$f = 200 \text{ N}$$

$$[\sum F_x = 0]$$

$$f - N_A \cos 30^\circ = 0$$

$$200 - N_A \cos 30^\circ = 0$$

$$N_A = 230.94 \text{ N}$$

Ans

โจทย์ข้อนี้เนื่องจากต้องการทราบแรง N_A จึงอาจเลือกจุด O ซึ่งเป็นจุดที่ล้อสัมผัสพื้น เป็นจุดหมุนในการคิดสมดุลโมเมนต์ก็ได้

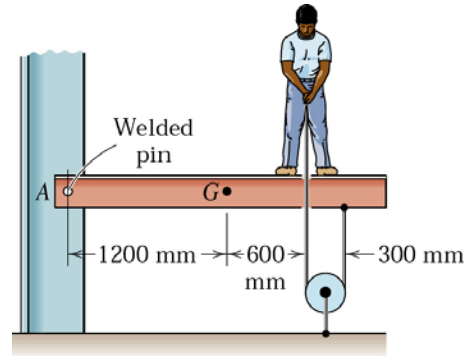
$$[\sum M_O = 0] \quad \text{CW+}$$

$$60 - N_A \cos 30^\circ(0.3) = 0$$

$$N_A = 230.94 \text{ N}$$

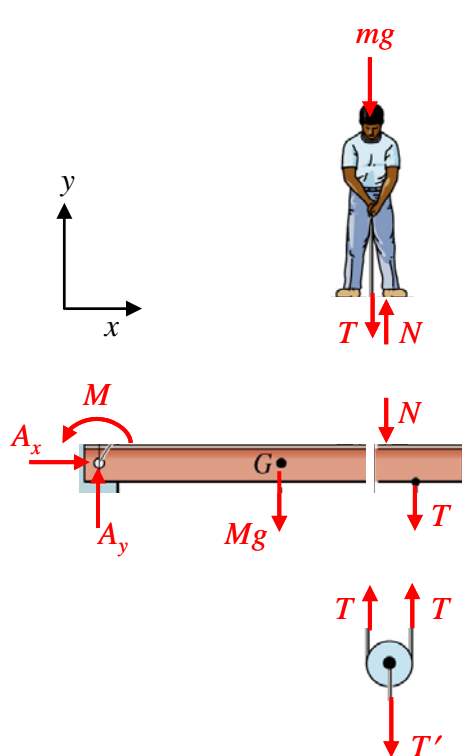
Ans

3/49 The pin A, which connects the 200-kg steel beam with center of gravity at G to the vertical column, is welded both the beam and to the column. To test the weld, the 80-kg man loads the beam by exerting a 300-N force on the rope which passes through a hole in the beam as shown. Calculate the torque (couple) M supported by the pin.



วิธีทำ กำหนดน้ำหนักคน $Mg = (200)(9.81)$ N
 น้ำหนักคน $mg = (80)(9.81)$ N
 แรงดึงเชือก = แรงดึงเชือก 300 N

ข้อนี้ ทำได้ 2 วิธี ขึ้นกับว่าจะเขียน Free-body diagram อย่างไร
 วิธีแรก ทำได้โดยเขียน FBD แยกระหว่างคน คาน และรอก



คิดที่คน

$$\sum F_y = 0$$

$$N - mg - T = 0$$

$$N = 80(9.81) + 300 = 1084.8 \text{ N}$$

คิดที่คาน

$$\sum M_A = 0 \quad \text{CCW+}$$

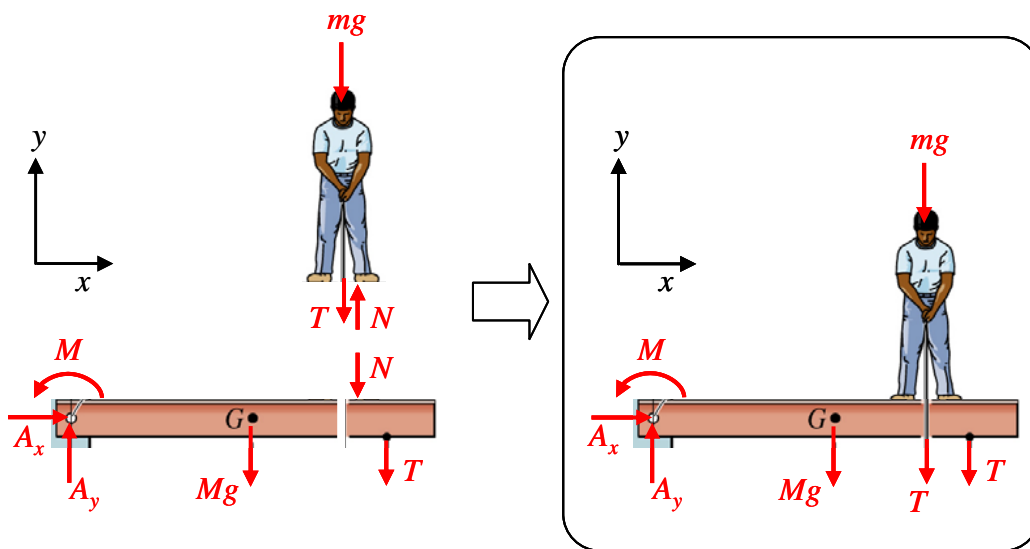
$$M - Mg(1.2) - N(1.8) - T(2.1) = 0$$

$$M = 200(9.81)(1.2) + 1084.8(1.8) + 300(2.1)$$

$$M = 4937.04 \text{ N}$$

$$\approx 4.94 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

วิธีที่สอง ทำได้โดยเขียน FBD โดยรวมคน และคานไว้ด้วยกัน จะทำให้แรงปฏิกิริยา N ระหว่างคน และคานกลายเป็นแรงภายในไม่ต้องนำมาคิด (จากรูปจะเห็นว่าเมื่อรวมทั้ง 2 รูปเข้าด้วยกัน แรง N จะหักล้างกันหมดไป) ดังนั้นแรงไม่ทราบค่าจึงมีเพียงแค่ 3 แรงเท่านั้น คือ A_x, A_y และ M



คิดที่คน และคาน

$$[\sum M_A = 0] \quad \text{CCW+}$$

$$M - Mg(1.2) - T(1.8) - mg(1.8) - T(2.1) = 0$$

$$M = 200(9.81)(1.2) + 300(1.8) + 80(9.81)(1.8) + 300(2.1)$$

$$M = 4937.04 \text{ N}$$

$$\approx 4.94 \text{ kN}$$

Ans