สถิตยศาสตร์ (Statics)

บทที่ 3 สภาพสมดุล (ตอนที่ 2)

Section B สภาพสมดุลในสามมิติ

3/4 สภาพสมดุล

ในหัวข้อนี้จะขยายความสภาพสมดุลให้ครอบคลุมถึงปัญหาในสามมิติ โดยหลักการแล้วสภาพสมดุลในสามมิติ กับในสองมิติจะเหมือนกัน และสมการสมดุลที่ใช้ยังคงเหมือนเดิมดังแสดงในสมการที่ (1)

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \quad \text{และ} \quad \vec{M} = \sum \vec{M} = 0 \tag{1}$$

ในสามมิติแรงและโมเมนต์จะต้องคำนึงถึงทิศทางด้านลึกที่เพิ่มเข้ามาด้วย ดังนั้นสมการที่ (1) จะสามารถขยายให้ครอบคลุมปัญหาในสามมิติได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \text{และ}\ \sum F_z = 0 \tag{2}$$

$$\sum \vec{M} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \sum M_x = 0,\ \sum M_y = 0,\ \text{และ}\ \sum M_z = 0 \tag{3}$$

การแก้ปัญหาสมดุลในสามมิติ อาจจะใช้วิธีการแบบสเกลาร์ โดยใช้สมการดังแสดงในสมการที่ (2) และ (3) หรือจะใช้วิธีการแบบเวคเตอร์ก็ได้ สำหรับการเขียน Free-body diagram นั้นก็อาจจะใช้วิธีเขียนรูปแบบสามมิติ (pictorial view drawing) หรือการเขียนภาพฉายทีละระนาบ และพิจารณาเป็นปัญหา 2 มิติก็ได้ (ดูตัวอย่างที่ 3/6 ในหนังสือ “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige)

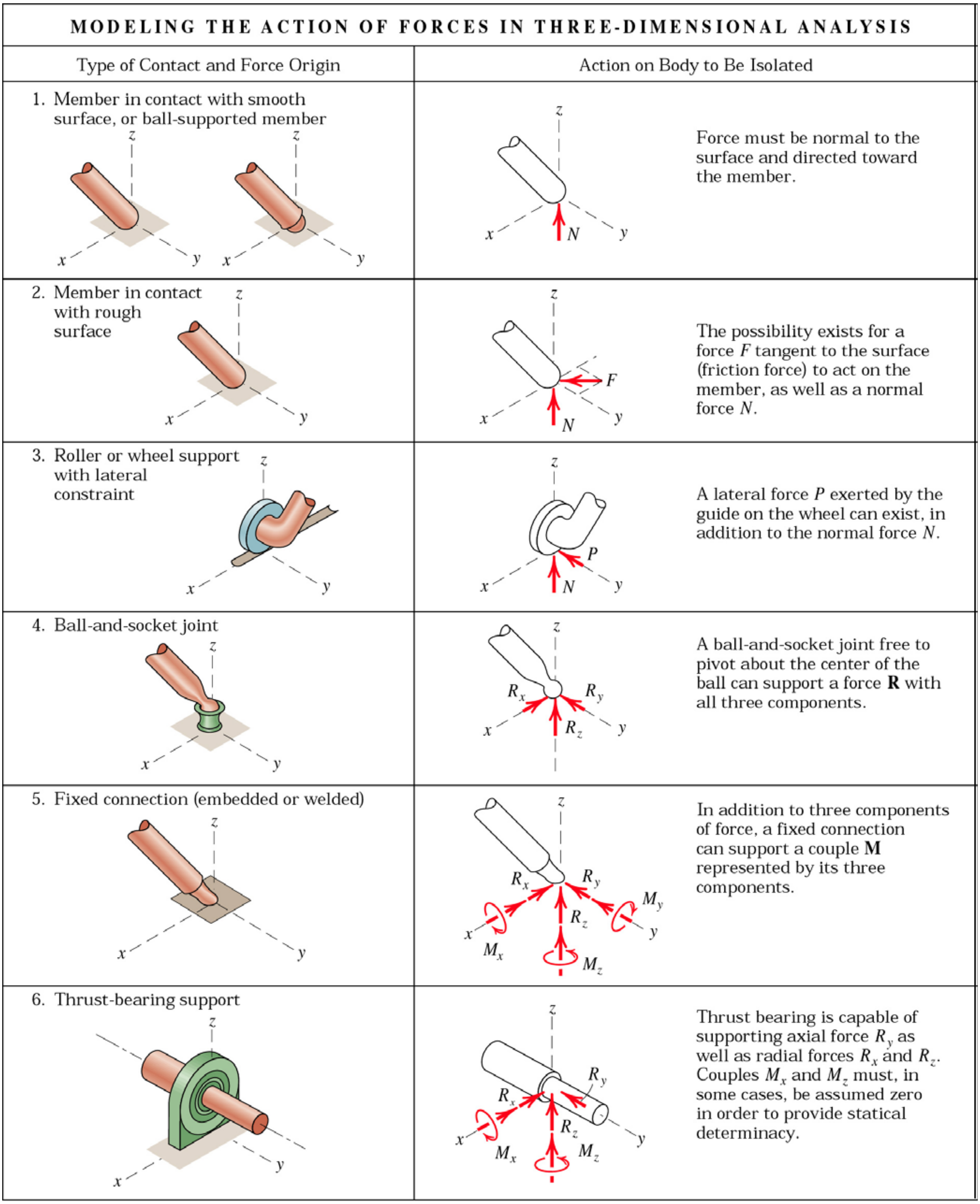
จากสมการที่ (2) และ (3) จะพบว่าเนื่องจากมีสมการสมดุลทั้งหมด 6 สมการ ดังนั้นตัวไม่ทราบค่าในการคำนวณสภาพสมดุล 3 มิติ จึงมีได้มากที่สุด 6 ตัว จึงจะสามารถหาค่าโดยวิธีทางสถิตยศาสตร์ได้

แรงที่เกิดจากการยึดแบบต่าง ๆ

แรงจากการจัดยึดแบบต่างๆ ในสามมิติ แสดงดังรูปที่ 1

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> แสดงถึงวัตถุแตะกับพื้นเรียบโดยไม่มีการยึดแน่นใดๆ หรืออาจจะพิจารณาเป็นการรองรับแบบลูกกลิ้งก็ได้ แรงที่กระทำในกรณีนี้จะมีเพียงแรงที่พื้นดันวัตถุ ในแนวดิ่ง N เพียงแรงเดียว

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> แสดงถึงวัตถุแตะกับพื้นขรุขระ ในตัวอย่างนี้จะต่างกับตัวอย่างแรกตรงที่มีแรงเสียดทาน F เพิ่มเข้ามาด้วย โดยทิศของแรงเสียดทานเกิดในทิศที่ต้านทานแนวโน้มที่จะเคลื่อนที่ของวัตถุ



MODELING THE ACTION OF FORCES IN THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS

Type of Contact and Force Origin	Action on Body to Be Isolated
1. Member in contact with smooth surface, or ball-supported member	Force must be normal to the surface and directed toward the member.
2. Member in contact with rough surface	The possibility exists for a force F tangent to the surface (friction force) to act on the member, as well as a normal force N.
3. Roller or wheel support with lateral constraint	A lateral force P exerted by the guide on the wheel can exist, in addition to the normal force N.
4. Ball-and-socket joint	A ball-and-socket joint free to pivot about the center of the ball can support a force **R** with all three components.
5. Fixed connection (embedded or welded)	In addition to three components of force, a fixed connection can support a couple **M** represented by its three components.
6. Thrust-bearing support	Thrust bearing is capable of supporting axial force R_y as well as radial forces R_x and R_z. Couples M_x and M_z must, in some cases, be assumed zero in order to provide statical determinacy.

รูปที่ 1 แรงจากการจับยึดในสามมิติ

ตัวอย่างที่ 3 แสดงถึงล้อวิ่งบนรางลื่น จะเห็นว่าล้อไม่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทาง y และ z ได้ ดังนั้นในทิศทาง y และ z จึงต้องมีแรงต้านทานกระทำ ส่วนในทิศทาง x นั้น ล้อกลิ้งได้อย่างอิสระ ดังนั้นจึงไม่มีแรงต้านทานมากระทำในทิศทางนี้

ตัวอย่างที่ 4 การยึดแบบ Ball-and-socket joint การยึดแบบนี้วัตถุจะหมุนได้อย่างอิสระทุกทิศทาง แต่ไม่สามารถเคลื่อนที่ออกจากเบ้าซึ่งรองรับลูกบอลได้ ดังนั้นการรองรับแบบนี้จึงต้องมีแรงต้านทานการเคลื่อนที่กระทำในทิศทาง x, y และ z

ตัวอย่างที่ 5 การรองรับแบบยึดแน่น (การเชื่อมติด) การยึดแบบนี้วัตถุจะไม่สามารถเคลื่อนที่ และไม่สามารถหมุนได้ด้วย ดังนั้นจึงต้องมีแรงต้านทาน และโมเมนต์ต้านทานทั้งทิศทาง x, y และ z

ตัวอย่างที่ 6 การยึดด้วยรองลื่นที่รับแรงในแนวแกนได้ด้วย (Thrust-bearing support) รองลื่นเป็นอุปกรณ์ทางกลชนิดหนึ่ง ใช้รองรับการหมุนของเพลา และบังคับไม่ให้เพลาเคลื่อนที่ได้ในทิศทางตั้งฉากกับแกนเพลา ความต้านทานการหมุนของเพลาที่รองรับด้วยรองลื่นจะมีค่าน้อยมาก จนถือว่าไม่มีความต้านทานการหมุนได้ รองลื่นที่รับแรงในแนวแกนได้หมายถึง รองลื่นซึ่งมีลักษณะพิเศษช่วยป้องกันไม่ให้เพลาเคลื่อนที่ในแนวแกนได้ด้วย

เมื่อพิจารณาการทำงานของรองลื่นแล้ว จะพบว่าแรงต้านทานที่กระทำกับรองลื่นที่รับแรงในแนวแกนได้ จะมีทั้ง 3 ทิศทางในแกน x, y, และ z สำหรับโมเมนต์ที่ต้านทานการเคลื่อนที่นั้น จะมีในทิศทางของการหมุนรอบแกนซึ่งตั้งฉากกับแกนเพลา ทำให้เพลาไม่สามารถหมุนรอบแกนซึ่งตั้งฉากกับแกนเพลาได้ อย่างไรก็ตามการที่รองลื่นทำขึ้นเพื่อไม่ให้มีความต้านทานการหมุน ดังนั้นจึงไม่มีโมเมนต์ต้านทาน ในทิศทางการหมุนของเพลา

ในตัวอย่างที่ 5 และ 6 จะพบว่าแรงและโมเมนต์ที่เกิดที่ตัวจับยึด ซึ่งมักเป็นตัวไม่ทราบค่าจะมีจำนวนมาก (6 และ 5 ตัวตามลำดับ) ในการพิจารณาปัญหาสมดุลสามมิติในกรณีเช่นนี้หลายๆ ครั้ง อาจจะจำเป็นต้องตั้งสมมุติฐานให้ไม่มีโมเมนต์ต้านทานจึงจะแก้ปัญหาโดยวิธีทางสถิตยศาสตร์ได้ การตั้งสมมุติฐานเช่นนี้สามารถเป็นไปได้ หมายความว่าโมเมนต์ที่เกิดจากแรงทุกๆ แรงในระบบ รอบจุดจับยึดจะหักล้างกันหมดพอดี ทำให้ไม่มีโมเมนต์เกิดที่ตัวจับยึด

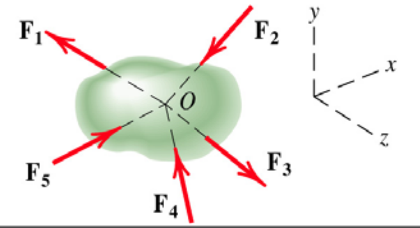
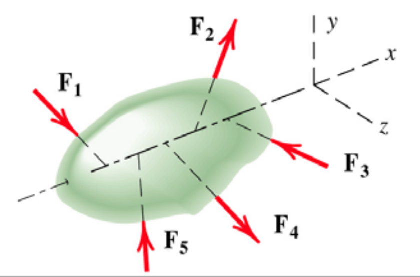
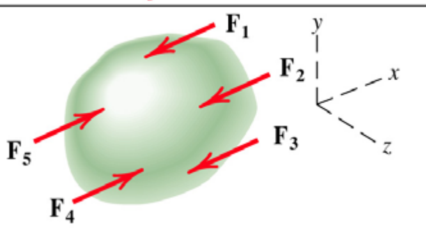
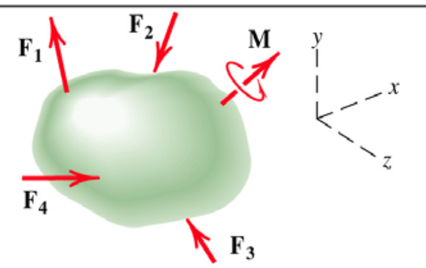
ประเภทของสมดุลในสามมิติ

สมดุลในสามมิติแบ่งเป็นประเภทต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 2 ดังนี้

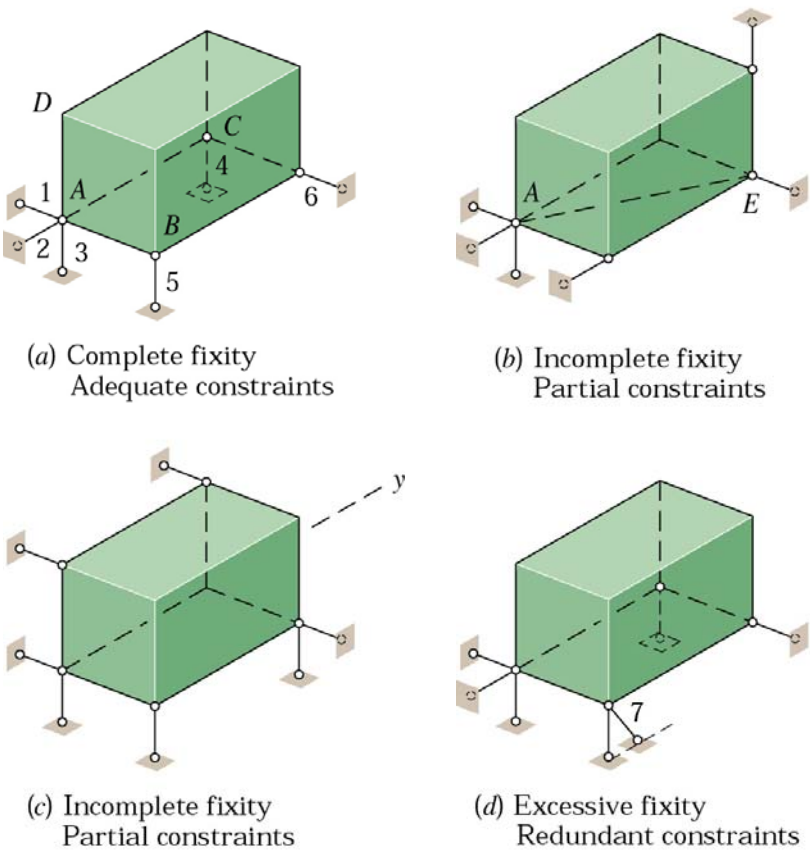
1. แรงทุกแรงผ่านจุดๆ เดียว (Concurrent at a point) ในกรณีนี้สมการสมดุลของแรง 3 สมการ ในทิศทาง x, y และ z ก็เพียงพอที่จะแสดงสภาพสมดุลได้ เนื่องจากผลรวมโมเมนต์รอบจุดที่แรงตัดกันมีค่าเท่ากับศูนย์แน่นอนอยู่แล้ว
2. แรงทุกแรงผ่านแนวเส้นตรงเดียวกัน (Concurrent with a line) กรณีนี้แสดงดังตัวอย่างที่ 2 ในรูปที่ 2 จากรูปจะพบว่า จำเป็นต้องใช้สมการสมดุล 5 สมการในการแสดงสภาพสมดุล สมการสมดุลของโมเมนต์รอบแกน x (ทับกับแกนของเส้นตรงที่แนวแรงทุกแรง

ผ่าน) ไม่จำเป็นต้องใช้เนื่องจากเมื่อแรงผ่านแกนใด จะไม่ทำให้เกิดโมเมนต์รอบแกนนั้นอยู่แล้ว ดังนั้นจากรูป เมื่อแรงทุกแรงผ่านแกน x จึงไม่เกิดโมเมนต์รอบแกน x

3. <u>แรงทุกแรงขนานกัน (Parallel)</u> กรณีนี้แสดงดังตัวอย่างที่ 3 ในรูปที่ 2 เนื่องจากแรงทุกแรงขนานกัน จึงใช้สมการสมดุลของแรงในทิศทางที่แรงขนานกันเพียงสมการเดียว ที่จะแสดงสภาพสมดุลของแรง ส่วนสภาพสมดุลของโมเมนต์นั้น ต้องใช้ 2 สมการในการแสดง สำหรับโมเมนต์รอบแกนที่มีทิศทางเดียวกับแรง ไม่จำเป็นต้องใช้ เนื่องจากไม่เกิดโมเมนต์อยู่แล้ว ($\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$ นั่นคือทิศทางของโมเมนต์ หรือทิศทางของแกนจะต้องตั้งฉากกับทิศทางของแรงเสมอ ดังนั้นถ้าแรงมีทิศทางเดียวกับแกน จะไม่เกิดโมเมนต์รอบแกนนั้น)
4. <u>กรณีใดๆ (General)</u> ในกรณีนี้แรงแต่ละแรงไม่ผ่านจุดเดียวกัน ไม่ผ่านแนวเส้นตรงเดียวกัน และไม่ขนานกัน กรณีนี้จำเป็นต้องใช้สมการสมดุลทั้งหมดในการแสดงสภาพสมดุล ดังแสดงในตัวอย่างที่ 4 รูปที่ 2

CATEGORIES OF EQUILIBRIUM IN THREE DIMENSIONS		
Force System	Free-Body Diagram	Independent Equations
1. Concurrent at a point		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
2. Concurrent with a line		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_z = 0$
3. Parallel		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_z = 0$

รูปที่ 2 สมดุลประเภทต่างๆ ใน 3 มิติ



รูปที่ 3 การยึดวัตถุในรูปแบบต่างๆ (3 มิติ)

Constraints and Statical Determinacy

รูปที่ 3 แสดงการยึดวัตถุในรูปแบบต่างๆ ใน 3 มิติ ข้อต่อแต่ละอันจะสามารถรับแรงในแนวแกนของมันได้เท่านั้น ในรูปที่ 3(a) ข้อต่อที่วางตัวในทิศทางต่างๆ กัน ทั้ง 3 ทิศทาง ทำให้ไม่เกิดการเคลื่อนไหวในแนวแกน x, y และ z นอกจากนี้ ข้อต่อคู่ 1-6, 3-4 และ 3-5 ทั้ง 3 คู่ยังทำหน้าที่รับโมเมนต์ที่อาจจะเกิดขึ้นทั้ง 3 ทิศทาง ดังนั้นการยึดในรูปที่ 3(a) จึงเป็นการยึดโดยสมบูรณ์และมีตัวจับยึดที่พอเพียง (Adequate constraints)

การยึดวัตถุในรูปที่ 3(b) ใช้จำนวนข้อต่อทั้งหมด 6 อัน เช่นเดียวกับรูปที่ 3(a) อย่างไรก็ตาม สังเกตได้ว่าแรงที่กระทำโดยข้อต่อทุกอัน ผ่านแนวเส้นตรง AE การที่แรงทุกแรงผ่านเส้นตรง AE ทำให้การจับยึดในรูปนี้ไม่สามารถรับโมเมนต์ภายนอกที่จะใส่เข้าเพื่อทำให้เกิดโมเมนต์รอบแกน AE ได้ ดังนั้นการยึดแบบนี้จึงเป็น การยึดเพียงบางส่วนโดยมีตัวจับยึดไม่เพียงพอ (Partial constraints)

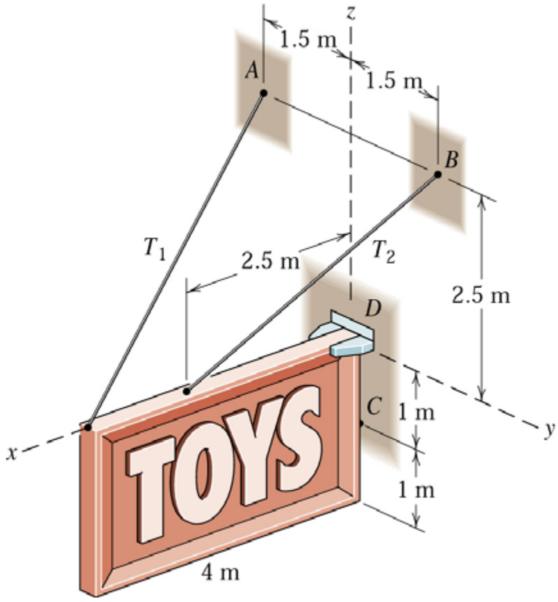
รูปที่ 3(c) แสดงการจับยึดโดยใช้ข้อต่อ 6 อันเช่นกัน แต่จะสังเกตได้ว่าข้อต่อทุกอันวางตัวในแนวแกน x และ z ไม่มีข้อต่ออันไหนที่วางตัวในแนวแกน y เลย ทำให้ระบบนี้ไม่สามารถรับแรงในแนวแกน y ที่จะใส่เพิ่มเข้าไปได้ การยึดแบบนี้จึงเป็น การยึดเพียงบางส่วนโดยมีตัวจับยึดไม่เพียงพอเช่นกัน

รูปที่ 3(d) แสดงการจับยึดคล้ายกับรูปที่ 3(a) เพียงแต่รูปที่ 3(d) มีข้อต่อ 7 เพิ่มเข้ามา โดยข้อต่ออื่นๆ ยังวางตัวเหมือนเดิม เนื่องจากจับยึดโดยข้อต่อ 6 อัน ดังแสดงในรูปที่ 3(a) เป็นการจับยึดที่พอเพียงอยู่แล้ว การใส่ข้อต่อที่ 7 เข้าไปจึงเป็นการจับยึดที่มากเกินความจำเป็น หรือเรียกว่า การจับยึดซึ่งมีข้อต่อมากเกินไป (Redundant constraints) และเนื่องจากสมการสมดุลใน 3 มิติ มีเพียง 6 สมการ แต่การจับยึดโดยข้อต่อมากกว่า 6 ข้อ จะทำให้มีตัวไม่ทราบค่ามากกว่าจำนวนสมการ กรณีนี้จึงไม่สามารถหาคำตอบได้โดยวิธีทางสถิตยศาสตร์ หรืออาจเรียกว่า Statically indeterminate

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาสภาพสมดุลสองมิติ

1. ตรวจสอบว่าปริมาณใด หรือแรงใดทราบค่า หรือไม่ทราบค่าบ้าง
2. เลือกวัตถุที่จะพิจารณา เขียน FBD และแกนพิกัด
3. หาพิกัดจุดต่างๆ ที่แรงกระทำ
4. เขียนแรงแบบเวคเตอร์ โดย
   แรง(เวคเตอร์) = (ขนาดของแรง)(เวคเตอร์หนึ่งหน่วยแสดงทิศทางของแรง)
5. เลือกจุดที่มีแรงผ่านมากที่สุด และใช้สมการสมดุลของโมเมนต์รอบจุดนั้น โดยคำนวณหาโมเมนต์ดังนี้ $\sum \vec{M} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$ จากสมการโมเมนต์นี้ จะทำให้สามารถหาค่าแรงไม่ทราบค่า ซึ่งไม่ได้ผ่านจุดหมุนได้
6. ใช้สมการสมดุลของแรง เพื่อหาแรงในทิศทางอื่นๆ

เรียบเรียงจาก “Engineering Mechanics Statics fifth edition SI version” ของ J. L. Meriam และ L. G. Kraige เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา 2103213 Engineering Mechanics I โดย อ.ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์



3/90 A rectangular sign over a store has a mass of 100 kg, with the center of mass in the center of the rectangle. The support against the wall at point *C* may be treated as a ball-and-socket joint. At corner *D* support is provided in the *y*-direction only. Calculate the tension T_1 and T_2 in the supporting wires, the total force supported at *C*, and the lateral force *D* supported at *D*.

วิธีทำ เขียน FBD ได้ดังแสดงในรูป จากรูปจะเห็นได้ว่ามีแรงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 6 แรง ดังนั้นสามารถใช้สมการสมดุล 3 มิติหาค่าออกมาได้

พิกัดจุดต่างๆ เป็นดังนี้

A(0,-1.5,2.5)

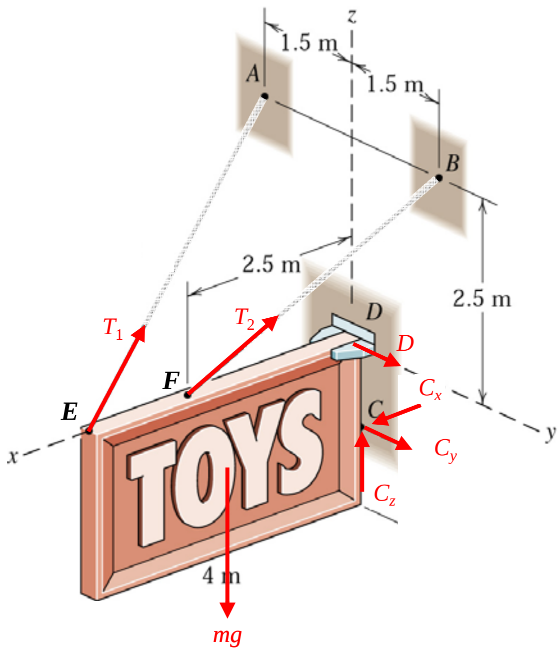
B(0,1.5,2.5)

C(0,0,-1)

D(0,0,0)

E(4,0,0)

F(2.5,0,0)



เขียนแรงที่ไม่ได้ขนานกันแกน x, y, และ z ให้อยู่ในรูปเวคเตอร์

$$\vec{T}_1 = T_1\hat{n}_{EA} = T_1\frac{(-4\hat{i} - 1.5\hat{j} + 2.5\hat{k})}{\sqrt{4^2 + 1.5^2 + 2.5^2}} = \frac{T_1}{4.9497}(-4\hat{i} - 1.5\hat{j} + 2.5\hat{k})$$

$$\vec{T}_2 = T_2\hat{n}_{FB} = T_2\frac{(-2.5\hat{i} + 1.5\hat{j} + 2.5\hat{k})}{\sqrt{2.5^2 + 1.5^2 + 2.5^2}} = \frac{T_2}{3.8406}(-2.5\hat{i} + 1.5\hat{j} + 2.5\hat{k})$$

เลือกจุดที่แรงผ่านมากที่สุดเป็นจุดหมุนในการใช้สมการสมดุลของโมเมนต์ ในที่นี้คือจุด C

$$\left[\sum \vec{M}_C = 0\right] \qquad \vec{r}_1 \times \vec{T}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 + mg(2)\hat{j} + D(1)(-\hat{i}) = 0 \tag{1}$$

โดย $\vec{r}_1$ คือเวคเตอร์ที่ชี้จากจุดหมุน C ไปยังแนวแรง T_1 (จุด E)

$\vec{r}_2$ คือเวคเตอร์ที่ชี้จากจุดหมุน C ไปยังแนวแรง T_2 (จุด F)

$$\vec{r}_1 \times \vec{T}_1 = (4\hat{i} + \hat{k}) \times \frac{T_1}{4.9497}(-4\hat{i} - 1.5\hat{j} + 2.5\hat{k}) = \frac{T_1}{4.9497}(1.5\hat{i} - 14\hat{j} - 6\hat{k})$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{T}_2 = (2.5\hat{i} + \hat{k}) \times \frac{T_2}{3.8406}(-2.5\hat{i} + 1.5\hat{j} + 2.5\hat{k}) = \frac{T_1}{3.8406}(-1.5\hat{i} - 8.75\hat{j} + 3.75\hat{k})$$

แทนลงในสมการ (1)

$$\frac{T_1}{4.9497}(1.5\hat{i} - 14\hat{j} - 6\hat{k}) + \frac{T_2}{3.8406}(-1.5\hat{i} - 8.75\hat{j} + 3.75\hat{k}) + 100(9.81)(2)\hat{j} - D\hat{i} = 0 \tag{2}$$

สมการนี้จะเป็นจริงได้เมื่อส่วนประกอบเวคเตอร์ในทิศทาง I, j, k เป็น 0 ทั้งหมด จากสมการที่ (2) เมื่อคิดทีละทิศทางจะได้ระบบสมการดังนี้

$$\left.\begin{aligned} &\frac{T_1}{4.9497}(1.5) + \frac{T_2}{3.8406}(-1.5) - D = 0 \\ &\frac{T_1}{4.9497}(-14) + \frac{T_2}{3.8406}(-8.75) = -100(9.81)(2) \\ &\frac{T_1}{4.9497}(-6) + \frac{T_2}{3.8406}(3.75) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

แก้ระบบสมการ (3) จะได้

T_1 = 346.83 N, T_2 = 430.586 N, D = -63.064 N *Ans*

จะเห็นว่า การใช้สมการสมดุลโมเมนต์รอบจุด จะทำให้หาค่าของแรงไม่ทราบค่าได้ 3 แรง เนื่องจากสมการเวคเตอร์ครอบคลุมถึงทิศทางตามแกน x, y, และ z 3 ทิศทาง ขั้นต่อไปจะหาแรงที่เหลือ โดยใช้สมการสมดุลแรงในแนวแกน x, y, และ z

จากขนาดของแรง T_1 และ T_2 ที่ได้จะสามารถเขียนแรงทั้งสองในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\vec{T}_1 = \frac{346.83}{4.9497}(-4\hat{i} - 1.5\hat{j} + 2.5\hat{k}) = -280.284\hat{i} - 105.106\hat{j} + 175.177\hat{k}$$

$$\vec{T}_2 = \frac{430.586}{3.8406}(-2.5\hat{i} + 1.5\hat{j} + 2.5\hat{k}) = -280.286\hat{i} + 168.171\hat{j} + 280.286\hat{k}$$

$\left[\sum F_x = 0\right]$ $\quad C_x - 280.284 - 280.286 = 0$

$$C_x = 560.57 \quad \text{N}$$

$\left[\sum F_y = 0\right]$ $\quad C_y - 105.106 + 168.171 - 63.064 = 0$

$$C_y = 0 \quad \text{N}$$

$\left[\sum F_z = 0\right]$ $\quad C_z + 175.177 + 280.286 - 100(9.81) = 0$

$$C_z = 525.537 \quad \text{N}$$

ดังนั้น $\quad C = \sqrt{560.57^2 + 0 + 525.537^2} = 768.39 \quad \text{N}$ *Ans*