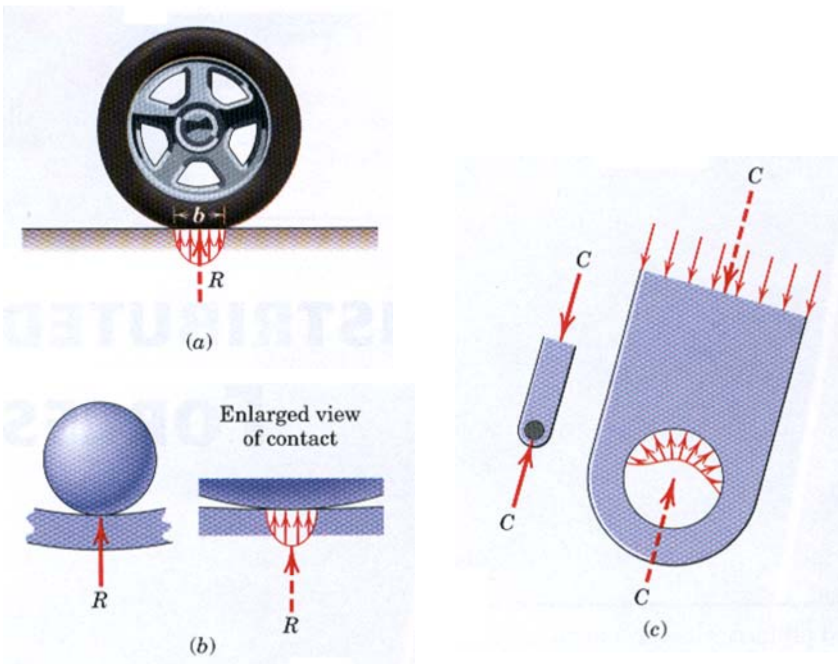
สถิตยศาสตร์ (Statics)

บทที่ 5 แรงกระจาย

51 บทนำ

ในบทก่อนๆ จะพิจารณาให้แรงกระทำตามแนวเส้นแรงกระทำ และมีตำแหน่งที่แรงกระทำกับวัตถุเป็นจุดๆ เดียว เรียกแรงลักษณะนี้ว่า Concentrated force การพิจารณาแบบนี้ช่วยให้การคำนวณลดความซับซ้อนลงอย่างมาก อย่างไรก็ตามในความเป็นจริงแล้ว ไม่มีแรงๆ ใดกระทำที่จุดๆ เดียว แต่ตำแหน่งแรงกระทำจะเป็นพื้นที่ แรงกระทำที่กระจายทั่วทั้งพื้นที่นี้เรียกว่า แรงกระจาย

พิจารณารูปที่ 1(a) ซึ่งแสดงแรงที่พื้นถนนกระทำกับล้อรถ จะเห็นว่ายางจะไม่สัมผัสกับพื้นถนนเพียงแค่จุดเดียว แต่จะสัมผัสเป็นพื้นที่ เนื่องจากยางเกิดการเสียรูปเนื่องจากน้ำหนักของรถ จากรูปมีความกว้างของผิวสัมผัส b แรงที่พื้นถนนกระทำกับล้อรถจะกระจายตลอดทั้งพื้นที่นี้ โดยแรงกระจายอาจจะไม่สม่ำเสมอตลอดทั้งพื้นที่ก็ได้ จากรูปจะเห็นว่าบริเวณตรงกลางแรงที่พื้นกระทำจะมีขนาดมากกว่าแรงที่กระทำที่บริเวณขอบๆ ของพื้นที่สัมผัส ลูกศรเส้นประแสดงถึงแรงลัพธ์ที่เกิดจากการรวมแรงกระจายนี้ รูปที่ 1(b) แสดงการสัมผัสของลูกบอลแข็ง กับพื้นผิวแข็ง ในกรณีนี้บริเวณสัมผัสจะเป็นเพียงพื้นที่เล็กๆ แต่อย่างไรก็ตามเนื่องจากบริเวณสัมผัสเป็นพื้นที่ แรงที่พื้นกระทำกับบอลจึงเป็นแรงกระจายเช่นกัน

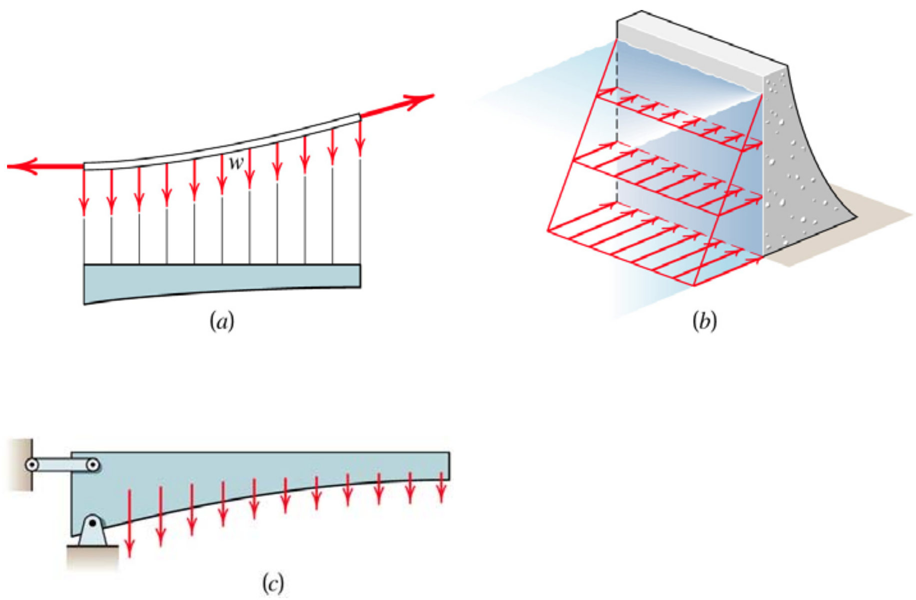


รูปที่ 1 ตัวอย่างแรงกระจาย

รูปที่ 1(c) แสดงแรงที่กระทำกับชิ้นส่วนกลซึ่งรับแรงกด C อีกด้านหนึ่งของชิ้นส่วนกลถูกเจาะรูแล้วยึดด้วยหมุด จะเห็นว่าแรงที่เกิดในชิ้นส่วนกลไม่ได้เกิดที่จุดๆ เดียว แต่กระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนกล สำหรับแรงที่หมุดกระทำกับชิ้นส่วนกลนั้นก็จะกระจายตลอดพื้นที่สัมผัสระหว่างผิวหมุดและผิวชิ้นส่วนกล อย่างไรก็ตามขนาดของแรงจะเปลี่ยนแปลงตามตำแหน่งที่สัมผัส

แรงกระจายสามารถแบ่งเป็น 3 ชนิดดังนี้

1. <u>แรงกระจายตามเส้น</u> (Line Distribution) ตัวอย่างของแรงกระจายชนิดนี้แสดงดังรูปที่ 2(a) แรงที่มวลดึงเคเบิลไว้กระทำกระจายตลอดความยาวเคเบิล หน่วยของแรงกระจายตามเส้นคือ N/m
2. <u>แรงกระจายตามพื้นที่</u> (Area Distribution) เมื่อแรงกระทำทั่วทั้งพื้นที่ จะเรียกแรงนี้ว่าแรงกระจายตามพื้นที่ ตัวอย่างของแรงกระจายชนิดนี้คือแรงดันน้ำที่กระทำกับเขื่อน ดังแสดงในรูปที่ 2(b) แรงดันนี้กระทำตลอดทั้งพื้นที่ แต่ขนาดของแรงดันที่แต่ละความลึกจะไม่เท่ากัน ลูกศรสีแดงในรูปแสดงถึงแรงกระจายที่แต่ละระดับความลึก หน่วยของแรงกระจายตามพื้นที่คือ N/m^2 หรือ Pa ซึ่งก็คือความดันนั่นเอง
3. <u>แรงกระจายตลอดปริมาตร</u> (Volume Distribution) แรงกระจายตลอดปริมาตรอาจเรียกอีกอย่างว่า Body force ตัวอย่างของแรงชนิดนี้คือ แรงดึงดูดเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก เนื่องจากแรงนี้กระทำกับทุกๆ ส่วนของมวล จึงเรียกว่าเป็นแรงกระจายตลอดปริมาตร หน่วยของแรงกระจายชนิดนี้คือ N/m^3



รูปที่ 2 แรงกระจายชนิดต่างๆ

5/2 จุดศูนย์กลางมวล

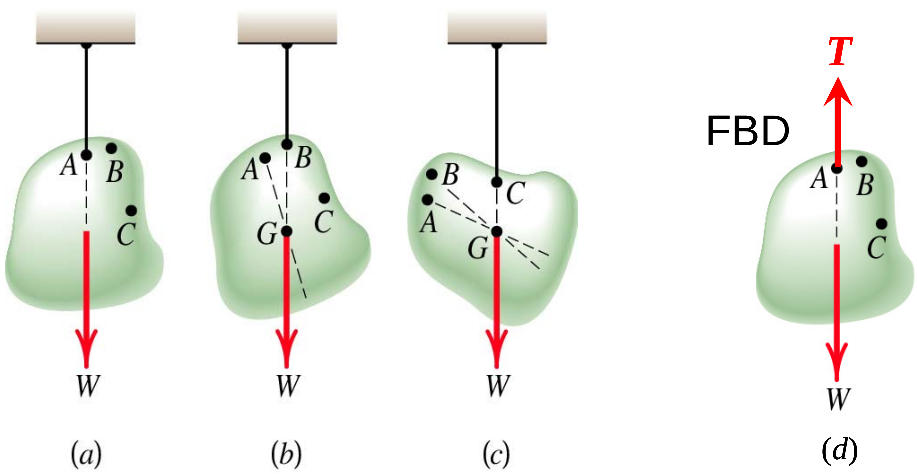
เนื่องจากน้ำหนักของวัตถุถือเป็นแรงกระจายตลอดทั้งเนื้อปริมาตร การคำนวณแรงกระจายนั้นยุ่งยากกว่าการคำนวณแรงที่กระทำเป็นจุดมาก ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณามักจะสมมุติให้มวลของวัตถุทั้งก้อนรวมอยู่ที่จุดๆ เดียว และจุดนี้จะเป็นตัวแทนของมวลทั้งก้อนเรียกจุดนี้ว่าจุดศูนย์กลางมวล (Center of mass) และหากถือว่าแรงดึงดูดของโลกมีค่าคงที่ตลอดวัตถุจะได้ว่าจุดศูนย์กลางมวลจะเป็นจุดเดียวกับจุดศูนย์ถ่วง (Center of gravity) ด้วยสำหรับวัตถุชิ้นหนึ่งๆ จะมีจุดศูนย์กลางมวลเพียงจุดเดียวเท่านั้น และจุดนี้จะอยู่ในหรือนอกเนื้อวัตถุก็ได้ วิธีหาจุดศูนย์กลางมวลด้วยวิธีทดลองแสดงดังในรูปที่ 3 และมีขั้นตอนดังนี้

1. ผูกวัตถุให้ห้อยลงอย่างอิสระ ดังแสดงในรูปที่ 3(a)

เมื่อพิจารณาให้น้ำหนักของวัตถุรวมที่จุดศูนย์ถ่วงเพียงจุดเดียว จะสามารถเขียนแผนผังแรงได้ดังแสดงในรูปที่ 3(d) จากแผนผังแรงพบว่ามีแรงเพียง 2 แรงที่ทำกระทำกับวัตถุและทำให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุล นั่นคือน้ำหนักของวัตถุ W และแรงตึงเชือก T เนื่องจากเป็นการสมดุลจากแรงเพียงสองแรง ดังนั้นแรงทั้งสองจึงต้องมีขนาดเท่ากันและอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เพราะว่าแรงจากน้ำหนักของวัตถุจะผ่านจุดศูนย์ถ่วงเสมอ ดังนั้นจึงทราบว่าจุดศูนย์ถ่วงต้องเป็นจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นแนวดิ่ง หรืออยู่ในแนวเส้นเชือก

2. เปลี่ยนตำแหน่งผูกเชือกห้อยวัตถุ เป็นจุด B ดังแสดงในรูปที่ 3(b)

ทำนองเดียวกับขั้นตอนที่ 1 จากขั้นตอนนี้จะทราบว่าจุดศูนย์ถ่วงต้องเป็นจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นแนวดิ่ง (B-G) เช่นกัน จากผลของการผูกวัตถุทั้งสองครั้งจะได้ว่า จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองกรณีจะเป็นจุดศูนย์ถ่วง G และหากห้อยวัตถุที่จุด C ก็จะพบว่าจุด G ก็จะอยู่บนแนวเส้นเชือกเช่นกัน



รูปที่ 3 การหาจุดศูนย์ถ่วงด้วยวิธีการทดลอง

การหาตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงและจุดศูนย์กลางมวล

เพื่อที่ให้การพิจารณาให้น้ำหนักรวมของวัตถุรวมเป็นจุดเดียวที่จุดศูนย์ถ่วง สามารถใช้ทดแทนการพิจารณาน้ำหนักของมวลย่อยๆ ทุกๆ ส่วนของวัตถุได้ คุณสมบัติทางด้านโมเมนต์ของการพิจารณาทั้งสองกรณีต้องเหมือนกัน

พิจารณารูปที่ 4(a) วัตถุในรูปมีจุดศูนย์ถ่วงอยู่ที่จุด G ซึ่งยังไม่รู้ตำแหน่งแน่นอน โดยสมมุติให้จุดศูนย์ถ่วงอยู่ที่พิกัด $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ หากหาโมเมนต์ของมวลก้อนนี้รอบแกน y สามารถหาได้โดยแบ่งมวลเป็นก้อนย่อยๆ dW หาโมเมนต์เนื่องจากน้ำหนักของมวลย่อยๆ แล้วค่อยนำมารวมกัน แต่เนื่องจากวัตถุก้อนนี้สามารถคิดเสมือนว่าน้ำหนักทั้งหมดรวมกันที่จุด G ซึ่งทำให้คุณสมบัติทางโมเมนต์ไม่แตกต่างจากเดิมด้วย ดังนั้นจึงอาจหาโมเมนต์ได้โดยนำเอาน้ำหนักรวมมาคูณด้วยแขนของโมเมนต์ซึ่งวัดจากแกน y มายังจุด G การหาโมเมนต์ทั้ง 2 วิธีสามารถแสดงได้ดังสมการ (1)

ผลรวมโมเมนต์ของมวลย่อยๆ = โมเมนต์ของน้ำหนักรวมที่จุดศูนย์ถ่วง

$$\int (x)dW = \bar{x}\int dW = \bar{x}W \qquad (1)$$

โดย x คือระยะวัดตามแกน x ไปยังมวลก้อนย่อยๆ (แขนของโมเมนต์ของมวลก้อนย่อยๆ)

W คือน้ำหนักรวมของวัตถุ

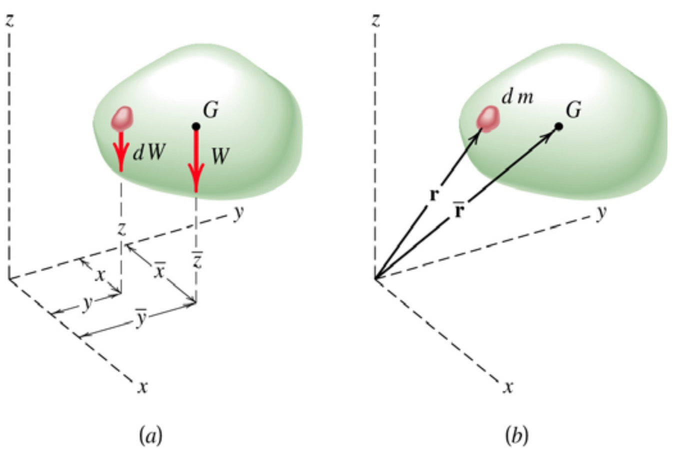
$\bar{x}$ คือตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วง วัดตามแกน x

จากสมการ (1) จะสามารถหาตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงได้ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{\int (x)dW}{W} \qquad (2)$$

ทำนองเดียวกัน ตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงวัดจากแกน y และ z สามารถหาได้ดังนี้

$$\bar{y} = \frac{\int (y)dW}{W}, \qquad \bar{z} = \frac{\int (z)dW}{W} \qquad (3)$$



รูปที่ 4 การหาจุดศูนย์กลางมวล

เนื่องจากน้ำหนักของวัตถุสัมพันธ์กับมวลตามสมการ $W = mg$ ถ้าค่า g มีค่าคงที่ หรือสามารถประมาณให้คงที่ตลอดชิ้นวัตถุแล้ว จะได้

$$dW = (g)dm \tag{4}$$

แทนสมการ (4) ลงในสมการ (3) และ (2) จะได้สมการเพื่อหาจุดศูนย์กลางมวลดังนี้

$$\bar{x} = \frac{\int (x)dm}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{\int (y)dm}{m}, \qquad \bar{z} = \frac{\int (z)dm}{m} \tag{5}$$

เนื่องจากการบอกตำแหน่งจุดใดๆ อาจบอกเป็นพิกัด (x,y,z) หรือบอกเป็นเวคเตอร์แสดงตำแหน่ง $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ก็ได้ ดังนั้นพิกัดทั้ง 3 ในสมการ (5) อาจจะบอกรวมได้ในรูปเวคเตอร์ $\bar{r}$ ดังนี้

$$\bar{\bar{r}} = \frac{\int (\bar{r})dm}{m} \tag{6}$$

5/3 Centroids of Lines, Areas, and Volumes

ถ้าความหนาแน่นของวัตถุ ρ สม่ำเสมอตลอดทั้งเนื้อวัตถุ สมการ (5) จะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{\int (x)\rho dV}{\rho V}, \qquad \bar{y} = \frac{\int (y)\rho dV}{\rho V}, \qquad \bar{z} = \frac{\int (z)\rho dV}{\rho V}$$

$$\bar{x} = \frac{\int (x)dV}{V}, \qquad \bar{y} = \frac{\int (y)dV}{V}, \qquad \bar{z} = \frac{\int (z)dV}{V} \tag{7}$$

โดย V คือปริมาตรของมวล

จะพบว่า $\bar{x}$, $\bar{y}$ และ $\bar{z}$ จากสมการที่ (7) ขึ้นอยู่กับรูปร่างของวัตถุเพียงอย่างเดียว จุด $\bar{x}$, $\bar{y}$ และ $\bar{z}$ ในกรณีนี้เรียกว่าจุดกลางรูป (Centroid) การหาจุด Centroid สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 รูปแบบดังนี้

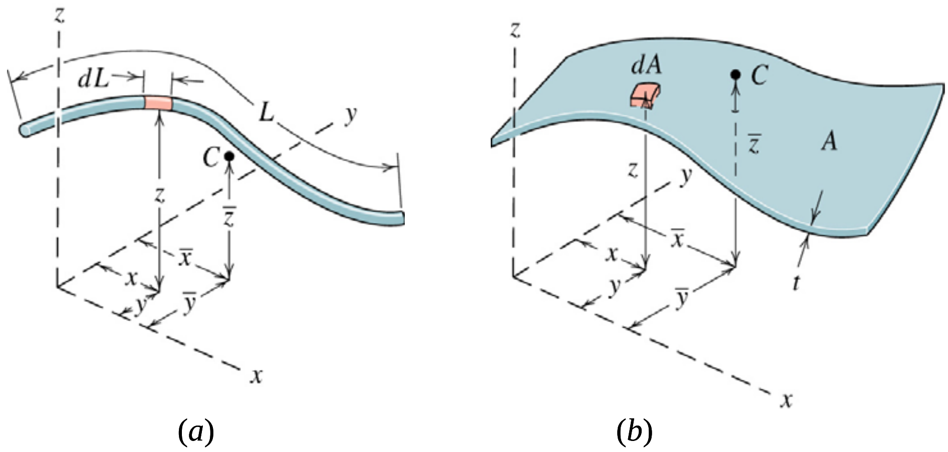
1 <u>เส้น</u> การหาจุด Centroid ในกรณีนี้ใช้กับวัตถุที่มีความยาวมากกว่าหน้าตัดมากๆ เช่น เส้นลวดเป็นต้น รูปการหาจุด Centroid แสดงในรูปที่ 5(a)

ถ้ากำหนดให้ A คือหน้าตัดของลวด สมการ (7) จะเขียนได้ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{\int (x)Adl}{Al}, \qquad \bar{y} = \frac{\int (y)Adl}{Al}, \qquad \bar{z} = \frac{\int (z)Adl}{Al}$$

$$\bar{x} = \frac{\int (x)dl}{l}, \qquad \bar{y} = \frac{\int (y)dl}{l}, \qquad \bar{z} = \frac{\int (z)dl}{l} \tag{8}$$

จากรูปที่ 5(a) จะพบว่าจุด Centroid อาจจะไม่อยู่ในเส้นลวดก็ได้



รูปที่ 5 จุดกลางรูป

2 <u>พื้นที่</u> การหาจุด Centroid ในกรณีนี้ใช้กับวัตถุบางที่มีความหนาเท่ากันตลอดแผ่นรูปการหาจุด Centroid แสดงในรูปที่ 5(b)

ถ้ากำหนดให้ *t* คือหน้าหนาของแผ่น สมการ (7) จะเขียนได้ดังนี้

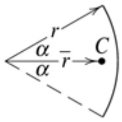
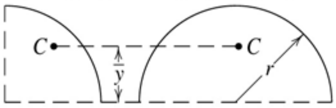
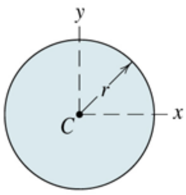
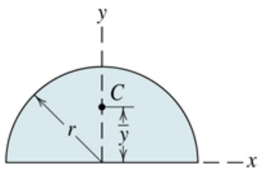
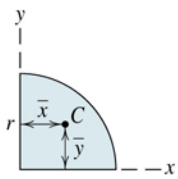
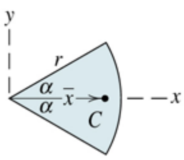
$$\bar{x} = \frac{\int (x)tdA}{At}, \qquad \bar{y} = \frac{\int (y)tdA}{At}, \qquad \bar{z} = \frac{\int (z)tdA}{At}$$

$$\bar{x} = \frac{\int (x)dA}{A}, \qquad \bar{y} = \frac{\int (y)dA}{A}, \qquad \bar{z} = \frac{\int (z)dA}{A} \qquad (9)$$

3 <u>ปริมาตร</u> การหาจุด Centroid ในกรณีนี้สามารถหาได้โดยสมการ (7) ตามที่ได้แสดงไว้แล้ว

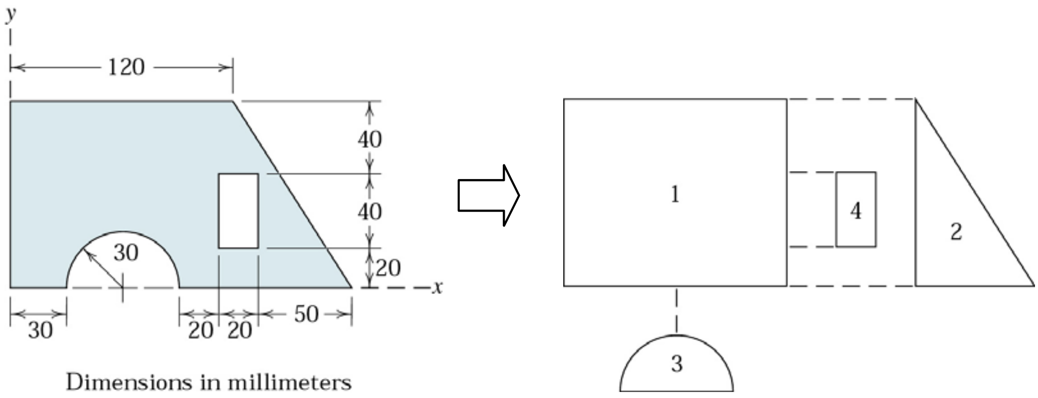
ตารางที่ 1 แสดงตำแหน่งของจุด Centroid ของรูปทรงเรขาคณิตบางชนิด

ตารางที่ 1 จุด Centroid ของรูปทรงเรขาคณิตบางชนิด

FIGURE	CENTROID	AREA MOMENTS OF INERTIA
Arc Segment 	$\bar{r} = \dfrac{r\sin\alpha}{\alpha}$	—
Quarter and Semicircular Arcs 	$\bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$	—
Circular Area 	—	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{2}$
Semicircular Area 	$\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{8}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{4}$
Quarter-Circular Area 	$\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{8}$
Area of Circular Sector 	$\bar{x} = \dfrac{2}{3}\dfrac{r\sin\alpha}{\alpha}$	$I_x = \dfrac{r^4}{4}(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$ $I_y = \dfrac{r^4}{4}(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$ $I_z = \frac{1}{2} r^4\alpha$

5/4 Composite body

การหาจุดศูนย์ถ่วง หรือจุดกลางรูปตามที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้าสามารถใช้หาได้ในทุกกรณี ไม่ว่าวัตถุจะมีรูปร่างใดๆ อย่างไรก็ตามถ้าวัตถุนั้นมีรูปร่างที่เกิดขึ้นจากการประกอบกันของรูปทรงเรขาคณิตพื้นฐาน เช่น วงกลม สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม ซึ่งรู้ตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงอยู่แล้วนั้น การคำนวณหาจุดศูนย์ถ่วงจะสามารถหาได้ง่าย โดยการแบ่งส่วนวัตถุก้อนใหญ่ให้เป็นชิ้นเรขาคณิตย่อยๆ ดังตัวอย่างในรูปที่ 6



(a) (b)

รูปที่ 6 การหาจุดศูนย์ถ่วงของ Composite body

วัตถุที่แสดงในรูปที่ 6(a) เกิดจากการประกอบกันของชิ้นส่วนย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ 6(b) โดยเกิดจากชิ้นส่วนที่ 1 ประกอบกับชิ้นที่ 2 และหักออกด้วยชิ้นส่วนที่ 3 และชิ้นส่วนที่ 4 เนื่องจากชิ้นส่วนแต่ละชิ้นในรูป 6(b) เป็นรูปเรขาคณิตพื้นฐานซึ่งรู้จุดศูนย์ถ่วง (หรือจุด Centroid) อยู่แล้ว การหาจุดศูนย์ถ่วงของวัตถุทั้งชิ้นจึงสามารถหาได้จากจุดศูนย์ถ่วงของชิ้นส่วนย่อยๆ ดังนี้

โมเมนต์วัตถุทั้งชิ้น = ผลรวมโมเมนต์ของชิ้นส่วนย่อย (ชิ้น1 + ชิ้น2 - ชิ้น3 - ชิ้น4)

$$\overline{X}\cdot(A_1 + A_2 - A_3 - A_4) = A_1\overline{x}_1 + A_2\overline{x}_2 - A_3\overline{x}_3 - A_4\overline{x}_4$$

$$\overline{X} = \frac{A_1\overline{x}_1 + A_2\overline{x}_2 - A_3\overline{x}_3 - A_4\overline{x}_4}{(A_1 + A_2 - A_3 - A_4)}$$

โดย $\overline{X}$ คือจุดกลางรูปของวัตถุทั้งก้อน

$\overline{x}$ คือจุดกลางรูปของชิ้นส่วนย่อย

A คือพื้นที่ของชิ้นส่วนย่อย

<u>ข้อสังเกต</u> เนื่องจากวัตถุทั้งชิ้นเกิดจากการรวมชิ้นที่ 1 และ 2 และหักออกด้วยชิ้นที่ 3 และ 4 ดังนั้นการหาจุดกลางรูป จึงเป็นการรวมของโมเมนต์เนื่องจากชิ้นที่ 1 และ 2 และต้องลบด้วยโมเมนต์ที่เกิดจากชิ้นที่ 3 และ 4

สมการที่ใช้ในการหาจุดศูนย์ถ่วงหรือจุดกลางรูปของ Composite body สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

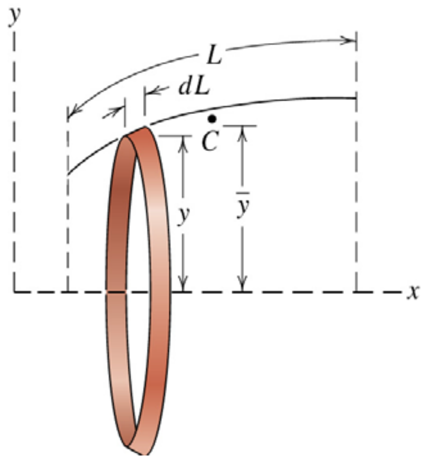
$$\bar{X} = \frac{\sum m\bar{x}}{\sum m}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m}, \quad \bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} \qquad (10)$$

โดย m สามารถเปลี่ยนเป็น V หรือ A ได้แล้วแต่กรณี

5/5 ทฤษฎีของ Pappus

ทฤษฎีของ Pappus ใช้หาพื้นที่ หรือปริมาตร ซึ่งเกิดจากการหมุน เส้น หรือพื้นที่ รอบแกนหมุน โดยที่แกนหมุนไม่ได้ตัดกับเส้น หรือพื้นที่ที่นำมาหมุน

<u>1. การหาพื้นที่ที่เกิดจากการหมุนของเส้นรอบแกนหมุน</u>



รูปที่ 7 การหาพื้นที่ที่เกิดจากการหมุนเส้นรอบแกนหมุน

รูปที่ 7 แสดงพื้นที่ที่เกิดจากการหมุนเส้นรอบแกนหมุน โดยพื้นที่วงแหวนย่อยๆ หาได้จากเส้นรอบวงคูณด้วยความหนาย่อยๆ ของวงแหวน และสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$dA = (2\pi y)dL$$

$$A = 2\pi\int ydL \qquad (11)$$

เนื่องจาก $\int ydL = \bar{y}\cdot L$ แทนในสมการ (11) จะได้

$$A = 2\pi\bar{y}L \qquad (12)$$

โดย $\bar{y}$ คือตำแหน่ง Centroid ของเส้นที่นำมาหมุน โดยวัดจากแกนหมุน

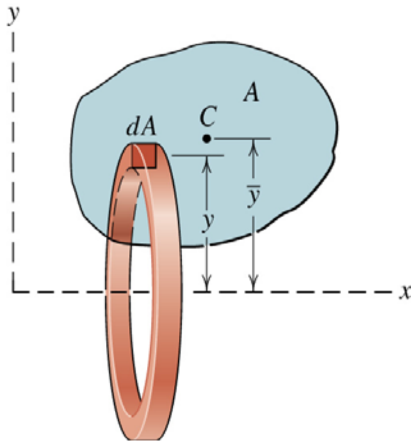
L คือความยาวของเส้น

ถ้าหมุนเส้นรอบแกนไม่ครบ 2π เรเดียน จะสามารถหาพื้นที่ได้จากสมการ (13)

$$A = \theta \bar{y} L \tag{13}$$

โดย θ เป็นมุมในหน่วยเรเดียน

2. การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกนหมุน



รูปที่ 8 การหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกนหมุน

รูปที่ 8 แสดงปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกนหมุน โดยปริมาตรย่อยๆ หาได้จากเส้นรอบวงคูณด้วยพื้นที่หน้าตัดย่อยๆ พื้นที่รวมทั้งหมด และสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$dV = (2\pi y)dA$$

$$V = 2\pi \int y dA \tag{14}$$

เนื่องจาก $\int y dA = \bar{y} \cdot A$ แทนในสมการ (14) จะได้

$$V = 2\pi \bar{y} A \tag{15}$$

โดย $\bar{y}$ คือตำแหน่ง Centroid ของพื้นที่ที่นำมาหมุน โดยวัดจากแกนหมุน

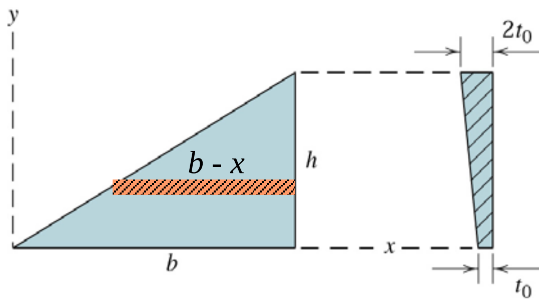
A คือพื้นที่รวมที่นำมาหมุน

ถ้าหมุนพื้นที่รอบแกนไม่ครบ 2π เรเดียน จะสามารถหาปริมาตรที่ได้จากสมการ (16)

$$V = \theta \bar{y} A \tag{16}$$

โดย θ เป็นมุมในหน่วยเรเดียน

5/29 The thickness of the triangle plate varies linearly with y from a value t_0 along its base $y = 0$ to $2t_0$ at $y = h$. Determine the y-coordinate of the center of mass of the plate.



วิธีทำ หาความสัมพันธ์ของรูปร่างในรูปสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

1.ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด y กับความหนา

$$t = t_0 + \frac{y}{h}t_0 = t_0(1+\frac{y}{h})$$

2.ความสัมพันธ์ของรูปร่างหน้าตัดสามเหลี่ยม

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{h} \longrightarrow x = \frac{b}{h}y$$

ปริมาตรของแผ่นสามเหลี่ยมหาได้ดังนี้

$$V = \int_0^h t_0(1+\frac{y}{h})(b-x)dy = \int_0^h t_0(1+\frac{y}{h})(b-\frac{by}{h})dy$$

$$V = \int_0^h bt_0(1-\frac{y^2}{h^2})dy$$

จุด Centroid หาได้จาก

โมเมนต์ของปริมาตรรวม = ผลรวมของโมเมนต์ของชิ้นส่วนย่อยๆ

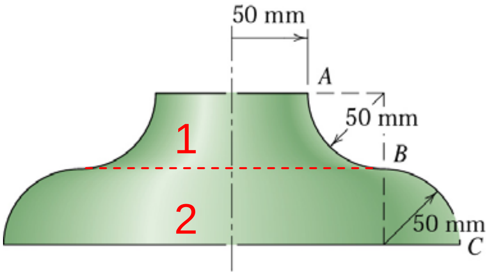
$$\bar{Y}\cdot\int_0^h bt_0(1-\frac{y^2}{h^2})dy = \int_0^h yt_0(1+\frac{y}{h})(b-x)dy$$

$$\bar{Y}\cdot\int_0^h bt_0(1-\frac{y^2}{h^2})dy = \int_0^h bt_0(y+\frac{y^3}{h^2})dy$$

$$\bar{Y} = \frac{3h}{8}$$

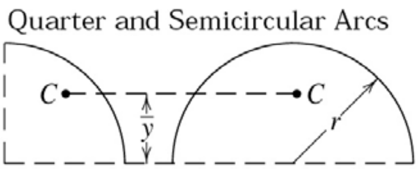
Ans

5/81 The two circular arcs *AB* and *BC* are revolved about the vertical axis to obtain the surface of revolution shown. Compute the area *A* of the outside of this surface

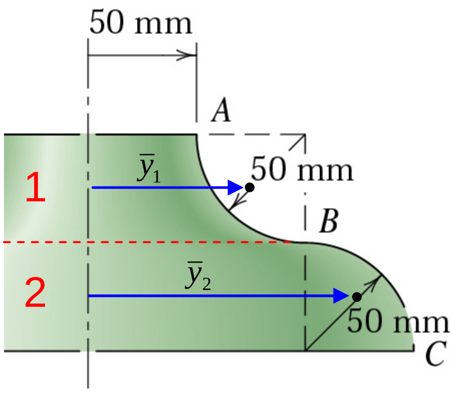


วิธีทำ หาพื้นที่ผิวโดยใช้ทฤษฎีของ Pappus
แบ่งพื้นผิวออกเป็น 2 ส่วน ส่วนที่ 1 เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง *AB* รอบแกนในแนวดิ่ง ส่วนที่ 2 เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง *BC* รอบแกนในแนวดิ่ง

จากสมการของ Pappus $A = \theta \bar{y} L$



จากตารางจะได้ $\bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$



$$\bar{y}_1 = (100 - \frac{2 \cdot 50}{\pi})$$

$$\bar{y}_2 = (100 + \frac{2 \cdot 50}{\pi})$$

พื้นที่ส่วนที่ 1 $A_1 = 2\pi(100 - \dfrac{2 \cdot 50}{\pi})(\dfrac{2\pi \cdot 50}{4}) = 3.3640 \times 10^4 \quad \text{mm}^2$

พื้นที่ส่วนที่ 2 $A_2 = 2\pi(100 + \dfrac{2 \cdot 50}{\pi})(\dfrac{2\pi \cdot 50}{4}) = 6.5055 \times 10^4 \quad \text{mm}^2$

พื้นที่รวม $A_1 + A_2 = (3.3640 + 6.5055) \times 10^4 = 9.87 \times 10^4 \quad \text{mm}^2$ Ans

5/9 Fluid statics

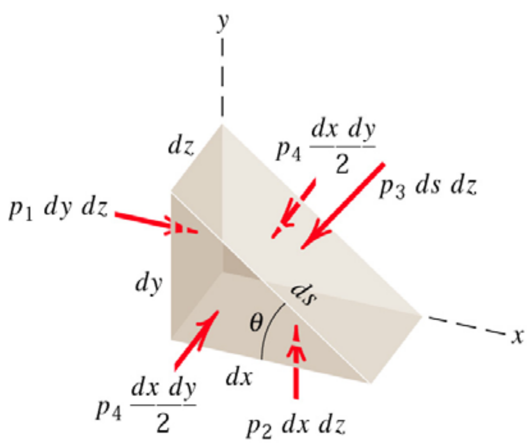
ในบทก่อนๆ เราพิจารณาแรงที่กระทำระหว่างของแข็ง แต่ในบทนี้จะพิจารณาถึงแรงที่กระทำเนื่องจากความดันของของไหล ก่อนจะศึกษาแรงเนื่องจากความดันของของไหล จำเป็นจะต้องรู้สมบัติของของไหลในสภาวะอยู่นิ่งเสียก่อนดังนี้

<u>สมบัติของของไหลในสภาวะอยู่นิ่ง</u>

1. ของไหลในสภาวะอยู่นิ่งไม่สามารถรับแรงเฉือนได้
2. จากผลของข้อ 1 จะได้ว่า แรงที่กระทำโดยของไหลที่อยู่นิ่งจะเกิดเฉพาะแรงในแนวตั้งฉากกับผิวของไหลเท่านั้น

ความดันของของไหล

จากกฎของปาสคาล (Pascal's law) ทราบว่า เมื่อพิจารณาจุดๆ หนึ่งในของไหล ความดันที่กระทำกับจุดๆ นี้ไม่ว่าจะเป็นทิศทางใดจะมีขนาดเท่ากันตลอด กฎของปาสคาลนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยพิจารณาชิ้นของไหลซึ่งมีขนาดเล็กๆ (พิจารณาเหมือนเป็นจุดๆ หนึ่งในของไหล) ดังแสดงในรูปที่ 9



รูปที่ 9 แรงที่กระทำกับชิ้นของไหลเล็กๆ

จากรูปความดันที่กระทำที่แต่ละผิวของชิ้นของไหล มีค่าเท่ากับ p_1, p_2, p_3 และ p_4 ตามลำดับ ดังนั้นจะสามารถหาแรงที่กระทำกับแต่ละพื้นผิวได้โดยนำเอาความดันมาคูณกับพื้นที่หน้าตัด ดังแรงที่แสดงในรูปที่ 9 เนื่องจากของไหลอยู่นิ่ง แรงที่กระทำในแต่ละทิศทางจะอยู่ในสภาวะสมดุล ดังแสดงในสมการ (17)

สมดุลตามแนวแกน x $$p_1 \cdot dy \cdot dz = p_3 \cdot ds \cdot dz \cdot \sin\theta$$

สมดุลตามแนวแกน y $$p_2 \cdot dx \cdot dz = p_3 \cdot ds \cdot dz \cdot \cos\theta + \rho g \cdot \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2} \qquad (17)$$

เนื่องจาก $ds \cdot \sin\theta = dy$, $ds \cdot \cos\theta = dx$ และ ค่า $\rho g \cdot \dfrac{dx \cdot dy \cdot dz}{2}$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมอื่นๆ สามารถละทิ้งได้

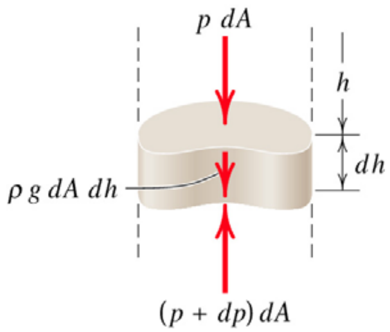
แทนความสัมพันธ์เหล่านี้ลงในสมการ (17) จะได้

$$p_1 = p_2 = p_3 = p \tag{18}$$

จากสมการ (18) จะได้ว่าความดันที่กระทำกับจุดๆ หนึ่งในของไหล (ชิ้นของไหลเล็กๆ ตามรูป) จะมีขนาดเท่ากัน ไม่ว่าจะกระทำในทิศทางใด ซึ่งสอดคล้องกับกฎของปาสคาล

ความดันของของไหลที่ระดับความลึกต่างกัน

ความดันของของไหลมีความสัมพันธ์กับระยะในแนวดิ่ง รูปที่ 9 แสดงแรงในแนวดิ่งที่กระทำกับชิ้นของไหล



รูปที่ 9 แรงในแนวดิ่งที่กระทำกับชิ้นของไหล

เนื่องจากของไหลอยู่ในสภาวะสมดุล จะเขียนสมการสมดุลในแนวดิ่งได้ดังนี้

$$p \cdot dA + \rho \cdot g \cdot dA \cdot dh - (p + dp)dA = 0$$

$$dp = \rho \cdot g \cdot dh \tag{19}$$

จากสมการที่ (19) จะเห็นว่าความดันของไหลจะเพิ่มขึ้นเมื่อระยะ h หรือความลึกมากขึ้น เมื่อของไหลเป็นของเหลว ซึ่งมีค่าความหนาแน่น ρ คงที่ สมการที่ (19) จะเขียนได้ดังนี้

$$p = p_0 + \rho g h \tag{20}$$

โดย p_0 เป็นความดันที่ผิวของของเหลว (h = 0)

หน่วยของความดัน คือ N/m^2 หรือ Pa

ถ้าผิวของของเหลวเปิดสู่บรรยากาศ สมการ (20) จะเขียนได้ดังนี้

$$p = p_a + \rho g h \tag{21}$$

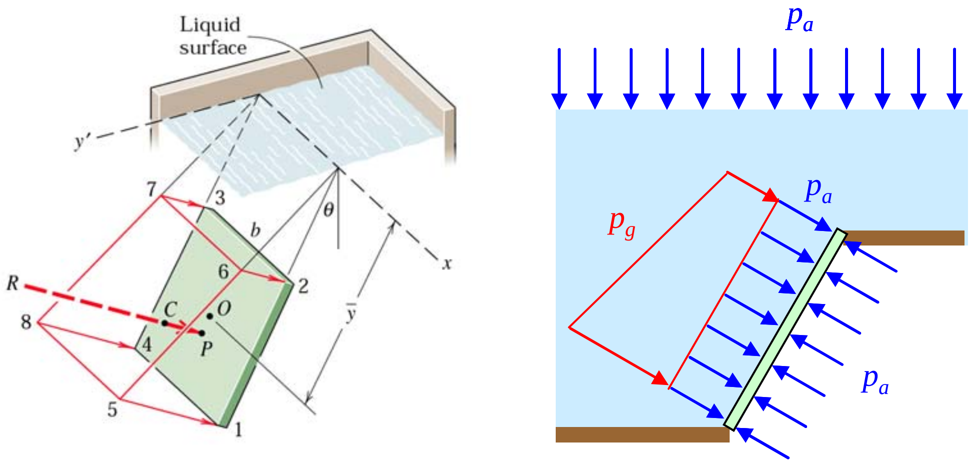
โดย p_a เป็นความดันบรรยากาศ มีค่าเท่ากับ 101.3 kPa

เครื่องมือวัดความดันโดยทั่วไปจะวัดความแตกต่างระหว่างความดันของของไหล กับความดันบรรยากาศ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า วัดความดันที่เพิ่มขึ้นขึ้นจากความดันบรรยากาศ ความดันที่เครื่องมือวัดวัดได้เรียกว่า <u>ความดันเกจ</u> p_g และมีความสัมพันธ์ตามสมการ (22)

$$p_g = \rho g h \tag{22}$$

ความดันของเหลวที่กระทำต่อแผ่นสี่เหลี่ยมจมในของเหลว

ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมจมในของเหลวพบได้ทั่วไปในงานวิศวกรรม ตัวอย่างปัญหาประเภทนี้ได้แก่ ปัญหาแรงดันที่กระทำกับผนังเขื่อน หรือ ผนังแท็งก์น้ำ เป็นต้น



(a) (b)

รูปที่ 10 แผ่นสี่เหลี่ยมจมในของเหลว

รูปที่ 10 แสดงตัวอย่างของแผ่นสี่เหลี่ยมจมในของเหลว ในรูปที่ 10(a) เส้นบางสีแดงแสดงถึงความดันของของเหลวที่กระทำกับแผ่นสี่เหลี่ยม จะเห็นว่าที่ระดับความลึกมากขึ้นความดันของของเหลวจะมากขึ้นด้วยตามสมการ $dp = \rho \cdot g \cdot dh$ และแสดงให้เห็นด้วยความยาวของเส้นบางสีแดงที่ยาวมากขึ้น ความดันของของเหลวนี้จะกระทำกระจายทั่วทั้งแผ่นสี่เหลี่ยม

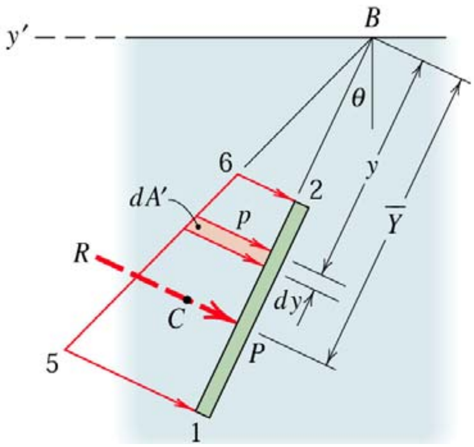
รูปที่ 10(b) แสดงมุมมองด้านข้างของแผ่นสี่เหลี่ยม เนื่องจากระบบนี้เป็นระบบเปิดซึ่งผิวของเหลวเปิดสู่บรรยากาศ แรงดันบรรยากาศ p_a จะกระทำต่อผิวของแผ่นสี่เหลี่ยมทุกๆด้าน ดังนั้นแรงลัพธ์เนื่องจากแรงดันบรรยากาศจึงหักล้างกันไปหมด และมีค่าเท่ากับ 0 การคิดแรงที่กระทำในกรณีระบบเปิดสู่บรรยากาศจึงคิดเพียงแค่ความดันเกจ ซึ่งแสดงโดยเส้นสีแดงเท่านั้น เมื่อพิจารณาเส้นบางสีแดงในรูปที่ 10(a) ก็จะพบว่าแสดงเฉพาะความดันเกจเช่นกัน โดยจะเห็นได้จากที่ผิวของเหลวมีความดันเป็นศูนย์ เมื่อรวมแรงที่เกิดจากความดันนี้จะสามารถรวมได้เป็นแรงลัพธ์ R แสดงด้วยเส้นประทึบสีแดง

การหาขนาดของแรงลัพธ์เนื่องจากความดันของของเหลว

การหาขนาดของแรงลัพธ์เนื่องจากความดันของของเหลวกระทำได้ 3 วิธี ได้แก่วิธีการอินทิเกรตโดยตรง วิธีการหาโดยใช้หลักการหาจุด Centroid และวิธีหาปริมาตรของปริซึมความดัน

1.วิธีการอินทิเกรต

พิจารณาการหาแรงกระทำกับแผ่นสี่เหลี่ยมจมในของเหลว แสดงดังรูปที่ 11



รูปที่ 11 การหาแรงกระทำกับแผ่นสี่เหลี่ยมจมในของเหลว

แรงลัพธ์

$$R = \int dR = \int p dA$$

$$R = \int (\rho g h) dA = \int_{y_2}^{y_1} (\rho g y \cos\theta) b dy$$

$$R = \rho g b \cos\theta (\frac{y_1^2 - y_2^2}{2}) = \rho g b \cos\theta \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{2}$$

$$R = \rho g b L \frac{(y_1 \cos\theta + y_2 \cos\theta)}{2} = \rho g b L \frac{h_1 + h_2}{2} \qquad (23\text{-}1)$$

โดย h เป็นความลึกจากผิวของเหลว

b คือความกว้างของแผ่นสี่เหลี่ยม (ลึกลงไปในกระดาษ)

L คือความยาวของแผ่น

แรงลัพธ์สามารถเขียนในรูปความดันได้ดังนี้

$$R = \rho g b L \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2} b L \qquad (23\text{-}2)$$

2. <u>การหาแรงลัพธ์อาจจะพิจารณาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการหาจุด Centroid</u>

$$R = \int (\rho g h) dA = \rho g \int h dA = \rho g \bar{h} A \qquad (24\text{-}1)$$

โดย $\int h dA = \bar{h} A$

$\bar{h}$ <u>คือความลึกที่จุด Centroid</u> ของแผ่นสี่เหลี่ยม ซึ่งในกรณีแผ่นสี่เหลี่ยม ค่านี้จะเท่ากับความลึกเฉลี่ย

การหาแรงลัพธ์สามารถเขียนในรูปความดันได้ดังนี้

$$R = \rho g \bar{h} A = \bar{p} \cdot A \qquad (24\text{-}2)$$

โดย $\bar{p}$ คือ<u>ความดันที่จุด Centroid</u> ของแผ่นสี่เหลี่ยม ซึ่งในกรณีแผ่นสี่เหลี่ยม ค่านี้จะเท่ากับความดันเฉลี่ย

3. <u>วิธีหาปริมาตรของปริซึมความดัน</u>

พิจารณารูปที่ 11 เช่นเดียวกับการหาโดยวิธีการอินทิเกรต

แรงลัพธ์ $R = \int dR = \int p dA$

$$R = \int pbdy = \int bpdy = \int bdA' \qquad (25)$$

โดย $dA' = \int pdy$ คือพื้นที่ที่แรเงาสีแดงในรูปที่ 11

ดังนั้น ผลคูณของ b กับ dA' จึงเป็นปริมาตรส่วนย่อยๆ และแรงลัพธ์ R จึงเป็นปริมาตรรวมของปริซึมความดัน ซึ่งมีหน้าตัดเป็นจุด 1-2-6-5 และมีความหนาเข้าไปในกระดาษ b เมื่อพิจารณาในรูปที่ 10 แรงลัพธ์ R สามารถหาได้ปริมาตรของปริซึมความดัน ซึ่งล้อมรอบด้วยจุด 1-2-3-4-5-6-7-8

การหาตำแหน่งของแรงลัพธ์

การหาตำแหน่งของแรงลัพธ์เนื่องจากความดันของของเหลวใช้หลักการของโมเมนต์ โดยผลรวมโมเมนต์เนื่องจากแรงย่อยๆ จากความดันของเหลว มีค่าเท่ากับโมเมนต์ซึ่งเกิดจากแรงลัพธ์รวม การหาตำแหน่งของแรงลัพธ์กระทำได้ 2 วิธี ได้แก่วิธีการอินทิเกรตโดยตรง และวิธีหาตำแหน่งของแรงลัพธ์รวมจากตำแหน่งแรงย่อยๆ

1.<u>วิธีการอินทิเกรต</u>

พิจารณารูปที่ 11 แรงลัพธ์ R กระทำผ่านจุด C ซึ่งห่างจากจุด B ตามแนวแกน y เป็นระยะ $\bar{Y}$

โมเมนต์เนื่องจากแรงลัพธ์ = ผลรวมโมเมนต์เนื่องจากแรงย่อยๆ

$$\bar{Y} \cdot R = \int ypdA = \int ypbdy$$

$$\bar{Y} \cdot \int pbdy = \int ypbdy$$

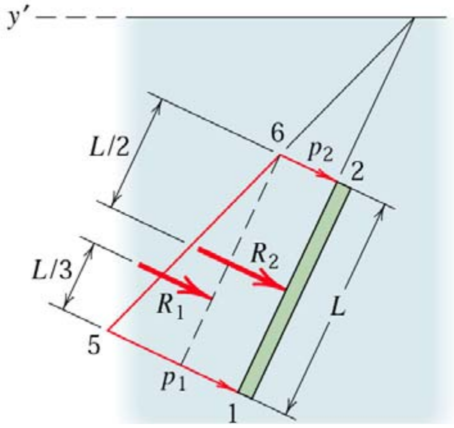
$$\bar{Y} = \frac{\int ypbdy}{\int pbdy} \qquad (26)$$

กรณีแผ่นสี่เหลี่ยม b มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (26) จะกลายเป็น

$$\bar{Y} = \frac{\int ypdy}{\int pdy} = \frac{\int ydA'}{\int dA'} \tag{27}$$

ซึ่งจะพบว่า $\bar{Y}$ คือตำแหน่งจุด Centroid ของพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู 1-2-6-5 ในรูปที่ 11 นั่นเอง

2. วิธีหาตำแหน่งแรงลัพธ์รวมจากตำแหน่งแรงย่อยๆ



รูปที่ 12 การหาตำแหน่งแรงลัพธ์จากแรงย่อยๆ

เนื่องจากแรงลัพธ์หาได้จากปริมาตรของปริซึมความดันซึ่งมีหน้าตัดสี่เหลี่ยมคางหมู 1-2-6-5 และตำแหน่งของแรงลัพธ์เป็นตำแหน่งจุด Centroid ของรูปสี่เหลี่ยม 1-2-6-5 ดังนั้นจะสามารถหาตำแหน่งจุด Centroid ของสี่เหลี่ยมคางหมูได้โดยแบ่งสี่เหลี่ยมคางหมูออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่เป็นสามเหลี่ยม และส่วนที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในรูปที่ 12

โมเมนต์เนื่องจากแรงลัพธ์ = โมเมนต์เนื่องจากชิ้นสามเหลี่ยม + โมเมนต์จากสี่เหลี่ยม

$$\bar{Y} \cdot R = \bar{y}_1 R_1 + \bar{y}_2 R_2 \tag{28}$$

$\bar{Y}, \bar{y}_1,$ และ $\bar{y}_2$ อาจจะวัดจากตำแหน่งอ้างอิงตามรูปที่ 11 ก็ได้ หรือจะวัดจากตำแหน่งอื่นก็ได้ เช่นถ้าวัดจากจุด 2 สามารถหาตำแหน่งจุดแรงลัพธ์กระทำได้ดังนี้

$$\bar{Y} \cdot (R_1 + R_2) = \frac{2L}{3} R_1 + \frac{L}{2} R_2 \tag{29}$$

โดย $\bar{Y}$ จะวัดจากจุด 2 ด้านบนของแผ่นสี่เหลี่ยม

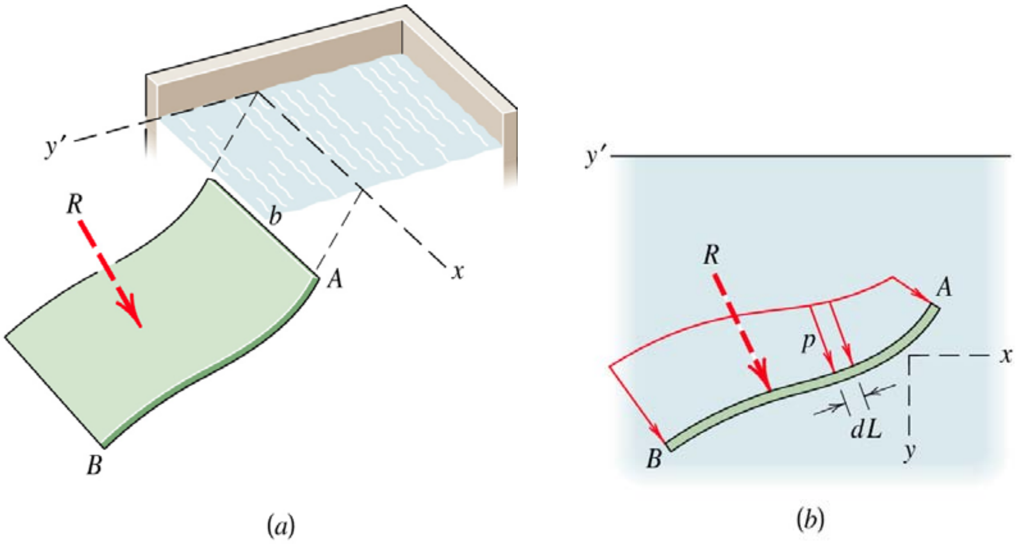
ความดันของเหลวที่กระทำบนแผ่นสี่เหลี่ยมโค้งจมในของเหลว

พิจารณาแรงที่กระทำกับแผ่นสี่เหลี่ยมโค้งจมในของเหลวแสดงดังรูปที่ 12 จากรูปจะพบว่าความดันที่กระทำกับแผ่นโค้งจะมีทิศทางตั้งฉากกับผิวโค้งเสมอ อย่างไรก็ตามทิศทางของความดันและแรงที่กระทำแต่ละจุด จะเปลี่ยนแปลงไปตลอดแนวโค้ง การหาแรงลัพธ์ R ซึ่งเป็น

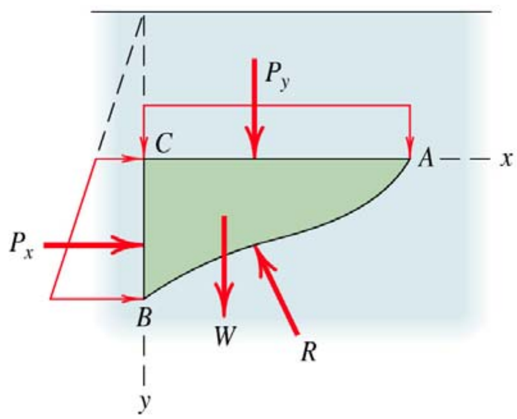
ปริมาณเวคเตอร์ และตำแหน่งที่แรงลัพธ์กระทำ จึงจำเป็นต้องคำนึงถึงทิศทางแรงกระทำด้วย ดังจะเห็นได้จากสมการ (30) ดังนี้

$$R_x = b\int (pdL)_x = b\int pdy \quad \text{และ} \quad R_y = b\int (pdL)_y = b\int pdx \qquad (30)$$

การพิจารณาหาแรงและตำแหน่งของแรงที่กระทำกับผิวโค้งยังสามารถทำได้อีกวิธีหนึ่ง โดยใช้หลักการของสมดุล พิจารณารูปที่ 13 ซึ่งแสดง FBD ของระบบที่จะพิจารณา



รูปที่ 12 แผ่นสี่เหลี่ยมโค้งจมในของเหลว



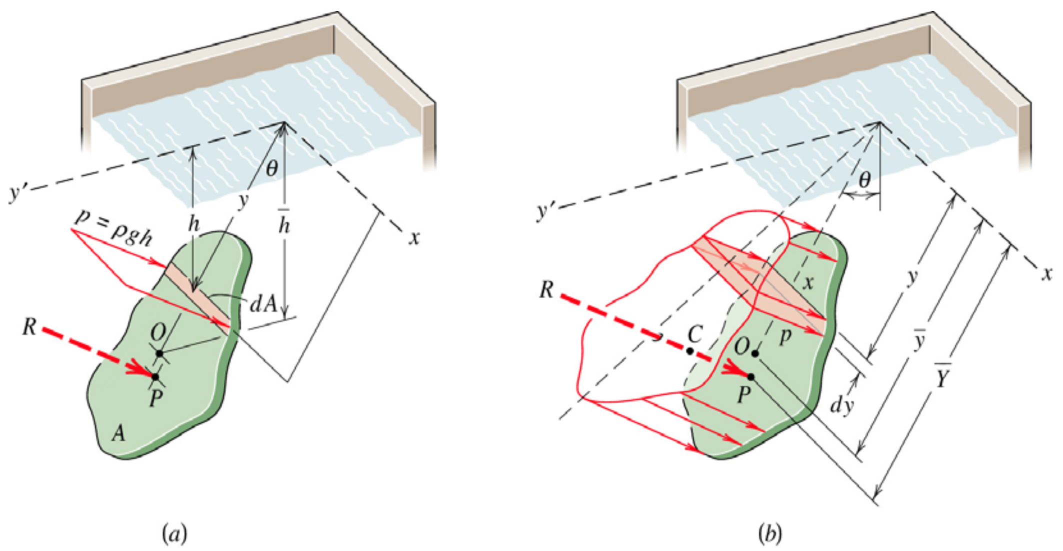
รูปที่ 13 ระบบที่พิจารณาเพื่อหาแรงที่กระทำกับแผ่นสี่เหลี่ยมโค้ง

การหาแรงที่กระทำ R กับแผ่นสี่เหลี่ยมโค้งในรูปที่ 12(b) โดยวิธีของสมดุลจะพิจารณา โดยตัดของเหลวซึ่งติดกับแผ่นโค้ง (ส่วนสีเขียว ABC ในรูปที่ 13) มาคิดแทน และแรงที่แผ่นสี่เหลี่ยมโค้งกระทำกับส่วนของเหลว R จะมีค่าเท่ากับแรงที่ของเหลวกระทำกับแผ่นสี่เหลี่ยมโค้งในรูป 12(b) โดยเป็นแรง action-reaction กันตามกฎของที่ 3 ของนิวตัน แรงนี้เป็นแรงที่ไม่ทราบค่าและต้องการจะหา สำหรับแรงอื่นๆ ที่กระทำกับของเหลวได้แก่ แรงที่ผิว Px และ Py

ซึ่งสามารถหาได้โดยง่ายตามวิธีที่ได้กล่าวมาแล้ว และแรงเนื่องจากน้ำหนักของของเหลว W ซึ่งก็สามารถหาค่าได้เช่นกัน เมื่อทราบค่า Px, Py และ W แล้วก็ใช้สมการสมดุลจะสามารถหาค่า R ออกมาได้ ตำแหน่งของแรงลัพธ์ R ก็สามารถหาค่าได้โดยใช้หลักการสมดุลของโมเมนต์กับ FBD ที่แสดงในรูปที่ 13

ความดันของเหลวที่กระทำบนแผ่นเรียบจมในของเหลว

พิจารณาแรงที่กระทำกับแผ่นเรียบรูปร่างใดๆ ซึ่งจมในของเหลวแสดงดังรูปที่ 14 การหาแรงที่กระทำกับแผ่นเรียบสามารถพิจารณาได้หลายรูปแบบดังนี้



รูปที่ 14 แรงที่กระทำกับแผ่นเรียบจมในของเหลว

1. <u>การหาขนาดของแรงลัพธ์ในกรณีนี้ทำโดยวิธีการอินทิเกรต</u>

$$R = \int pdA = \rho g \int hxdy \tag{31}$$

เนื่องจาก x เป็นฟังก์ชั่นของ y ถ้ารู้ความสัมพันธ์ของ x กับ y จะสามารถอินทิเกรตสมการ (31) โดยตรงเพื่อหาแรงลัพธ์ออกมาได้

2. <u>การหาขนาดของแรงลัพธ์อาจจะใช้หลักการของการหาจุด Centroid</u>

$$R = \int pdA = \rho g \int hdA$$

เนื่องจาก $\int hdA = \bar{h}A$ ดังนั้น

$$R = \rho g \bar{h} A \tag{32}$$

โดย $\bar{h}$ คือความลึกที่<u>จุด Centroid ของพื้นที่ A</u>

3. ใช้หลักการหาปริมาตรของรูปทรงความดัน

$$R = \int pdA = \int dV' = V' \qquad (33)$$

โดย V' คือปริมาตรของรูปทรงที่ล้อมรอบด้วยแผ่นเรียบสีเขียว และเส้นบางสีแดงแสดงในรูปที่ 14(b)

การหาตำแหน่งของแรงลัพธ์

การหาตำแหน่งของแรงลัพธ์ในกรณีแผ่นเรียบซึ่งมีรูปร่างใดๆ ใช้หลักการของโมเมนต์เช่นเดียวกับกรณีของแผ่นสี่เหลี่ยม ดังนี้

$$R \cdot \bar{Y} = \int ydR$$

$$\bar{Y} \cdot \int pxdy = \int ypxdy$$

$$\bar{Y} = \frac{\int ypxdy}{\int pxdy} = \frac{\int ydV'}{\int dV'} \qquad (34)$$

จากสมการที่ (34) พบว่าตำแหน่งของแรงลัพธ์จะผ่านจุด Centroil ของรูปทรงที่ล้อมรอบด้วยแผ่นเรียบสีเขียว และเส้นบางสีแดง

สรุปการหาแรงลัพธ์และตำแหน่งของแรงลัพธ์

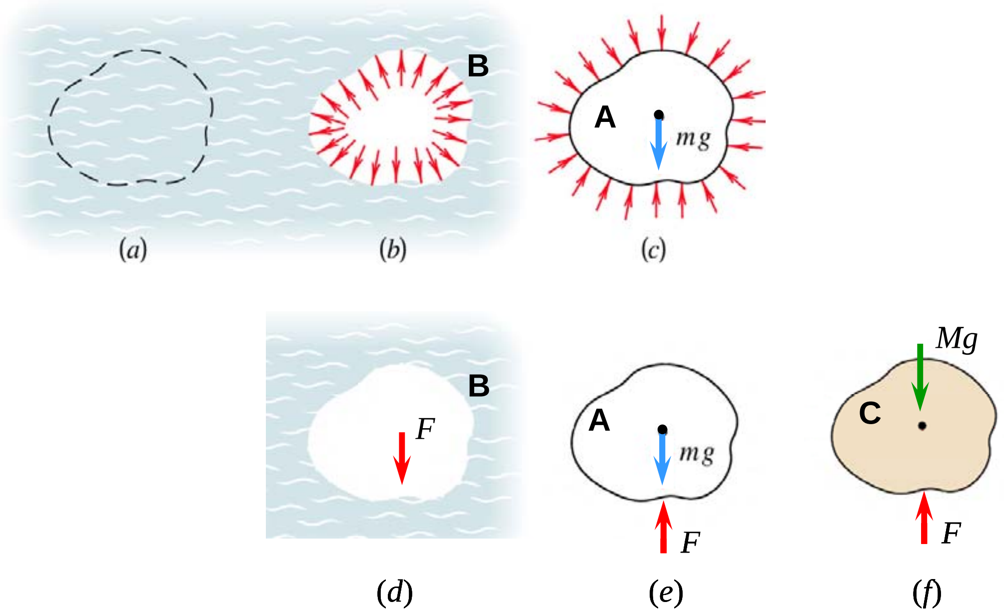
การหาแรงลัพธ์ และตำแหน่งของแรงลัพธ์สามารถสรุป และมีข้อแนะนำดังนี้

1. การหาโดยวิธีการอินทิเกรตอาจจะดูยาก แต่ถ้าเข้าใจแล้วทำได้ทุกกรณีไม่ว่าจะหาขนาดแรง หรือตำแหน่งของแรงลัพธ์โดยไม่เกิดความสับสน
2. กรณีแผ่นสี่เหลี่ยมเรียบ หาขนาดแรงโดยการหาปริมาตรของปริซึมความดันทำได้ง่ายที่สุด ส่วนตำแหน่งของแรงลัพธ์คือตำแหน่ง Centroid ของปริมาตรปริซึมความดัน ซึ่งทำได้โดยแบ่งปริซึมเป็นรูปทรงเรขาคณิตที่รู้ตำแหน่งจุด Centroid และใช้หลักการของโมเมนต์
3. กรณีแผ่นสี่เหลี่ยมโค้ง ใช้วิธีการตัดส่วนของเหลว และใช้สมการสมดุลในการหาขนาดของแรงลัพธ์ และตำแหน่งของแรงลัพธ์
4. กรณีแผ่นเรียบที่มีรูปร่างใดๆ ใช้สูตรการหาจะง่ายที่สุด โดย

   ขนาดของแรงลัพธ์ $R = \rho g\bar{h}A$ โดย $\bar{h}$ <u>คือความลึกที่จุด Centroid ของพื้นที่หน้าตัด ไม่ใช่</u>ความลึกเฉลี่ย

   ตำแหน่งของแรงลัพธ์ เกิดที่ตำแหน่ง Centroid ของปริมาตรรูปทรงที่เกิดจากความดัน โดยปกติมักจะต้องใช้การตั้งสมการอินทิเกรตเพื่อหาตำแหน่งแรงลัพธ์

แรงลอยตัว (Buoyancy)



รูปที่ 15 แรงลอยตัว

แรงลอยตัวสามารถอธิบายได้ดังรูปที่ 15 พิจารณาของเหลวที่อยู่นิ่งดังรูป 15(a) เมื่อตัดชิ้นของเหลวออกมาพิจารณาแรงกระทำ ของเหลวที่ตัดมาเรียกว่าของเหลว A ส่วนของเหลวเดิมที่เหลือจากการตัดเรียกว่าของเหลว B แรงที่ของเหลว A กระทำกับของเหลว B แสดงในรูปที่ 15(b) ส่วนแรงที่ของเหลว B กระทำกับของเหลว A แสดงด้วยลูกศรสีแดงในรูปที่ 15(c) จะพบว่าแรงที่กระทำที่ผิวของเหลวจะตั้งฉากกับผิวของเหลว และกระจายตลอดผิว

พิจารณารูปที่ 15(c) เมื่อรวมแรงกระจายเข้าด้วยกันจะสามารถเขียนแรงที่ทำกับของเหลว A ได้ดังรูปที่ 15(e) เนื่องจากของเหลวอยู่นิ่ง (อยู่ในสภาวะสมดุล) และมีแรงเพียงแค่ 2 แรงกระทำกับของเหลว A แรงลัพธ์จากแรงกระจาย F จึงมีค่าเท่ากับน้ำหนักของของเหลว A ซึ่งมีค่า mg และทิศทางของแรงต้องอยู่ในแนวเส้นตรงกับแรงเนื่องจากน้ำหนักของของเหลว หรืออาจกล่าวอีกอย่างว่าแรง F ต้องผ่านจึงศูนย์ถ่วงของของเหลว A ถ้าของเหลว A มีเนื้อสม่ำเสมอ อาจกล่าวได้ว่าแรง F ต้องกระทำผ่านจุด Centroid ของของเหลว A เมื่อพิจารณาของเหลว B จะพบว่ามีแรง F ที่ของเหลว A กระทำกับของเหลว B ดังแสดงในรูปที่ 15(d) แรงนี้เป็นแรง action-reaction กับแรง F ในรูป 15(e) นั่นเอง

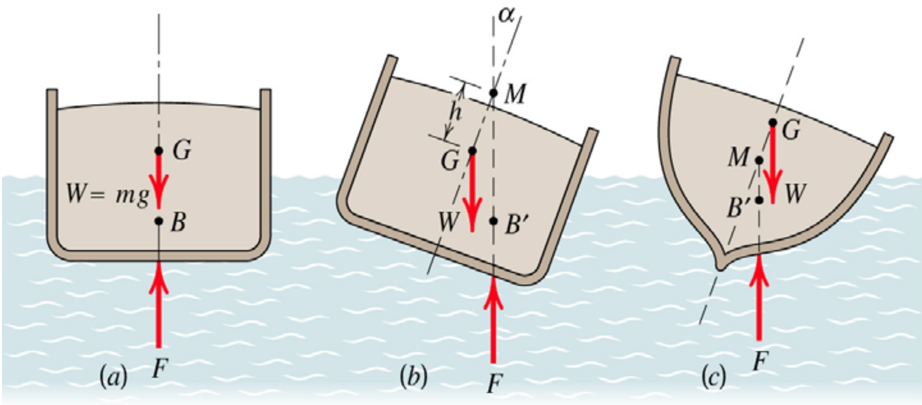
สมมุติให้มีวัตถุ C รูปร่างเหมือนของเหลว A ทุกประการ วางแทนที่ของเหลว A ในของเหลว B จะพบว่าแรงเนื่องวัตถุ C กระทำกับของเหลว B จะยังมีค่า F เท่าเดิม เนื่องจากรูปร่างเหมือนเดิม ดังนั้นเมื่อพิจารณาที่วัตถุ C แรงเนื่องจากของเหลว B ที่กระทำกับวัตถุ C จึงมีขนาด F เท่าเดิม และมีทิศทางชี้ขึ้น รวมถึงตำแหน่งของแรงเหมือนเดิม เนื่องจากแรง F จะชี้ขึ้นเสมอ จึงเรียก F ว่าแรงลอยตัว และเนื่องจากขนาดของแรง F สมดุลกับน้ำหนักของเหลว A ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า แรง F มีขนาดเท่ากับน้ำหนักของเหลว A นั่นคือของเหลวที่ถูกวัตถุ C แทนที่นั่นเอง

จากที่อธิบายข้างต้นสามารถสรุปได้ดังนี้ แรงลอยตัวมีขนาดเท่ากับน้ำหนักของเหลวที่ถูกแทนที่ โดยทิศทางของแรงจะชี้ขึ้นและผ่านจุดศูนย์ถ่วงของของเหลวที่ถูกแทนที่ แรงลอยตัวเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$F = \rho_{fluid} gV \tag{35}$$

โดย ρ_{fluid} คือความหนาแน่นของของเหลวที่ถูกแทนที่

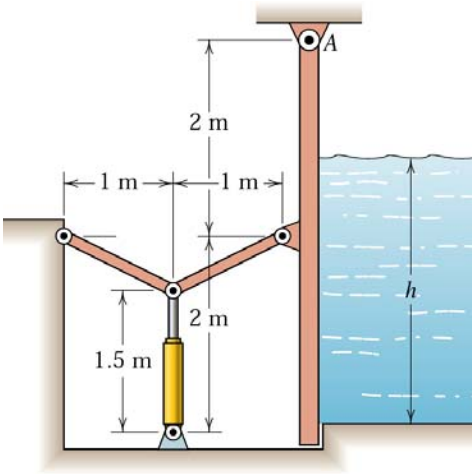
V คือปริมาตรของเหลวที่ถูกแทนที่



รูปที่ 16 แรงลอยตัวกับการออกแบบเรือ

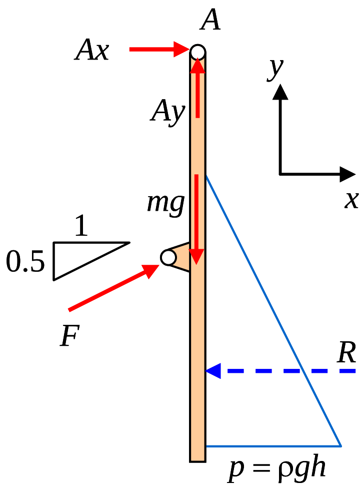
แรงลอยตัวสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการออกแบบเรือได้ดังแสดงในรูปที่ 16 รูปที่ 16(a) แสดงเรือขณะที่ไม่เกิดการโคลง น้ำหนักของเรือ mg กระทำผ่านจุดศูนย์ถ่วงของเรือ G ส่วนแรงลอยตัว F กระทำผ่านจุดศูนย์กลางของแรงลอยตัว B ซึ่งเป็นจุด Centroid ของปริมาตรส่วนที่จม (ซึ่งก็คือจุดศูนย์ถ่วงของของเหลวที่ถูกแทนที่นั่นเอง)

เมื่อเรือโคลงตามรูปที่ 16(b) จะพบว่าตำแหน่งจุด B ที่แรงลอยตัวผ่าน จะย้ายไปที่ตำแหน่ง B' เนื่องจากเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง และปริมาตรของของเหลวส่วนที่จม ตำแหน่งแรงลอยตัวนี้ จะมีแนวโน้มทำให้เกิดโมเมนต์หมุนให้เรือกลับเข้าสู่สภาวะที่มีเสถียรภาพได้ ส่วนรูปที่ 16(c) เนื่องจากออกแบบรูปร่างเรือต่างกัน ตำแหน่งที่แรงลอยตัวกระทำจะต่างกัน ในกรณีนี้แขนของโมเมนต์เนื่องจากแรงลอยตัวจะน้อยกว่าแขนของโมเมนต์เนื่องจากน้ำหนัก ซึ่งมีแนวโน้มที่เรือจะพลิกคว่ำได้



5/179 The hydraulic cylinder operates the toggle which closes the vertical gate against the pressure of fresh water on the opposite side. The gate is rectangular with a horizontal width of 2 m perpendicular to the paper. For a depth h = 3 m of water, calculate the required oil pressure p which acts on the 150-mm-diameter piston of the hydraulic cylinder.

วิธีทำ เขียน FBD ของประตูน้ำได้ดังนี้



เนื่องจากระบบนี้เป็นระบบเปิดสู่บรรยากาศ ผลของความดันบรรยากาศทั้งสองด้านของประตูน้ำหักล้างกันหมด จึงไม่ต้องคิดความดันบรรยากาศ

แรงลัพธ์ R หาโดยวิธีการปริซึมความดัน ดังนี้

$$R = \frac{1}{2}(\rho g h)(h)(\text{gate width})$$

$$R = \frac{1}{2}(10^3 \cdot 9.81 \cdot 3)(3)(2) = 88290 \text{ N}$$

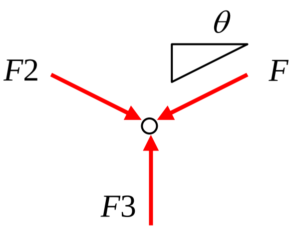
เนื่องจากลักษณะปริซึมเป็นรูปสามเหลี่ยม จึงรู้ว่าแรง R กระทำที่ความสูง 1/3 ของ h นับจากฐาน

$\left[\sum M_A = 0\right]$ CCW+

$$F \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + 0.5^2}}\right) \cdot 2 - 88290 \cdot 3 = 0$$

$$F = 148066.83 \text{ N}$$

พิจารณาแรงกระทำที่ข้อต่อของกระบอกสูบ



$\left[\sum F_x = 0\right]$ $\quad F_2 \cos\theta - F\cos\theta = 0 \longrightarrow F_2 = F$

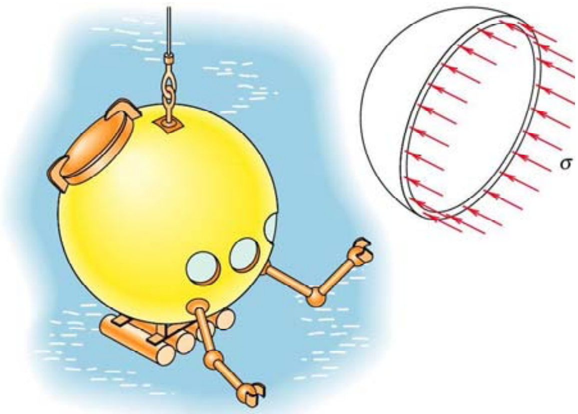
$\left[\sum F_y = 0\right]$ $\quad F_3 - 2F\sin\theta = 0$

$$F_3 - 2 \cdot 148066.83 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{1^2 + 0.5^2}} = 0$$

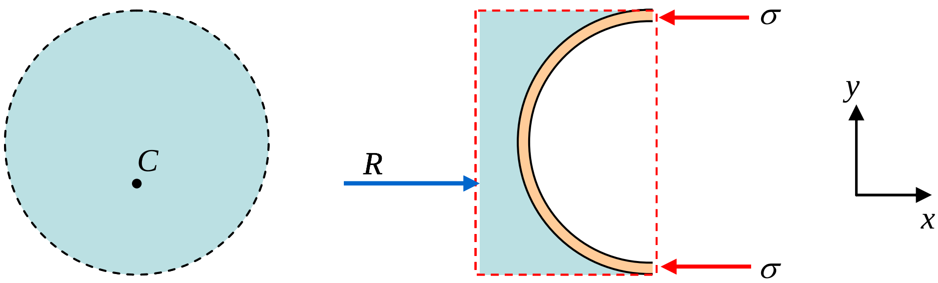
$$F_3 = 132435 \text{ N}$$

ความดันในกระบอกสูบ $\quad p = \dfrac{F_3}{\pi d^2/4} = \dfrac{132435}{\pi(150\times 10^{-3})^2/4} = 7.494\times 10^6 \text{ Pa}$ Ans

5/167 A deep-submersible diving chamber designed in the form of a spherical shell 1500 mm in diameter is ballasted with lead so that its weight slightly exceeds its buoyancy. Atmospheric pressure is maintained within the sphere during an ocean dive to a depth of 3 km. The thickness of the shell is 25 mm. For this depth calculate the compressive stress σ which acts on a diametral section of the shell, as indicated in the right-hand view.



วิธีทำ เนื่องจากวัตถุที่พิจารณามีความโค้ง จึงต้องตัด FBD ส่วนของน้ำมาคิด โดยตัดให้เป็นรูปร่างที่สามารถพิจารณาได้ง่ายดังนี้



ใน FBD ด้านบนจะแสดงเพียงแค่แรงในแนวแกน x เท่านั้น และเนื่องจากระบบนี้เป็นระบบเปิดสู่บรรยากาศ และภายในเรือดำน้ำก็มีความดันเท่ากับความดันบรรยากาศ เพราะฉะนั้นผลของความดันบรรยากาศจึงหักล้างกันหมด จึงไม่ต้องคิดผลของความดันบรรยากาศ

แรงลัพธ์ R หาได้โดยพิจารณาให้ผิวด้านข้างด้านที่มีแรงดันน้ำกระทำ เป็นเหมือนแผ่นเรียบที่มีหน้าตัดวงกลม ซึ่งกรณีนี้การใช้สูตรหาแรงลัพธ์จะทำได้ง่ายที่สุด

$$R = \rho g \bar{h} A$$

$\bar{h}$ คือ ความลึกที่จุด Centroid ของวงกลม ซึ่งเท่ากับ 3 km

A คือ พื้นที่ที่แรงดันน้ำกระทำ ในที่นี้คือพื้นที่วงกลม

$$R = (1030)(9.81)(3\times10^{3})(\frac{\pi\cdot1.5^{2}}{4})$$

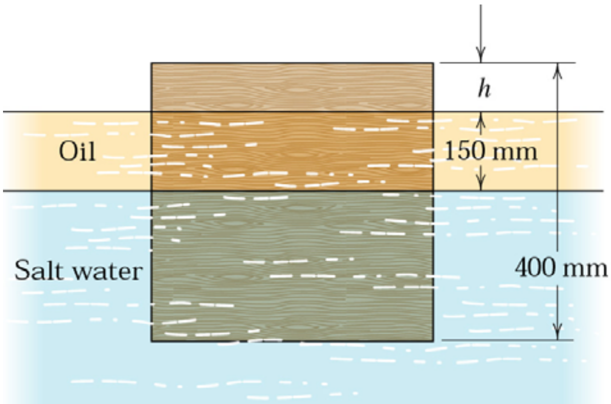
แรงในเนื้อวัสดุ $$F = \sigma\left[\frac{\pi\cdot D^{2}}{4} - \frac{\pi\cdot(D-50\times10^{-3})^{2}}{4}\right]$$

$\left[\sum F_x = 0\right]$ $$R - F = 0$$

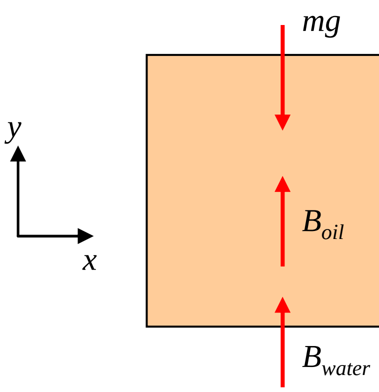
$$(1030)(9.81)(3\times10^{3})(\frac{\pi\cdot1.5^{2}}{4}) - \sigma\left[\frac{\pi\cdot1.5^{2}}{4} - \frac{\pi\cdot(1.5-50\times10^{-3})^{2}}{4}\right] = 0$$

$$\sigma = 462.4 \text{ MPa}$$ <u>Ans</u>

5/172 A block of wood in the form of a waterproofed 400 mm cube is floating in a tank of salt water with a 150 mm layer of oil floating on the water. Assume that the cube floats in the attitude shown, and calculate the height *h* of the block above the surface of the oil. The density of oil, salt water, and wood are 900, 1030, and 800 kg/m^3, respectively.



วิธีทำ เขียน FBD ได้ดังนี้



$$\left[\sum F_y = 0\right]$$

$$-mg + B_{oil} + B_{water} = 0$$

$$-\rho_{wood} g V_{wood} + \rho_{oil} g V_{oil} + \rho_{water} g V_{water} = 0$$

$$-800A(400) + 900A(150) + 1030A(400 - 150 - h) = 0$$

$$h = 70.39 \text{ mm}$$ Ans