สถิตยศาสตร์ (Statics)

บทที่ 6 แรงเสียดทาน

6/1 บทนำ

ในบทก่อนๆ การสัมผัสกันของวัตถุมักถูกสมมุติให้มีแรงในแนวตั้งฉากกับผิววัตถุเพียงอย่างเดียว ซึ่งหมายความว่าพื้นผิวนั้นเรียบ ถึงแม้ว่าสมมุติฐานนี้จะสามารถใช้ได้ดีกับปัญหาในหลายๆ กรณีโดยมีความคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อย แต่ในหลายๆ กรณี จำเป็นต้องคำนึงถึงแรงต้านทานในแนวสัมผัสกับผิววัตถุที่เรียกว่าแรงเสียดทานด้วย แรงเสียดทานเป็นแรงต้านทานการเคลื่อนที่ หรือต้านทานแนวโน้มที่จะเกิดการเคลื่อนที่ ดังนั้นทิศทางของแรงเสียดทานจะตรงกันข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ หรือทิศทางที่มีแนวโน้มจะเกิดการเคลื่อนที่เสมอ

ในเครื่องจักรกลหลายๆ ชนิด เช่น รองลื่น (ตลับลูกปืน, แบริ่ง Bearing) เฟือง สกรูส่งกำลัง หรือการไหลของของเหลวในท่อ ไม่ต้องการให้มีแรงเสียดทาน ซึ่งทำให้เกิดการเสียดสีความร้อน และการสึกหรอขึ้น อย่างไรก็ตามเครื่องจักรกลหลายๆ ชนิดใช้ประโยชน์จากแรงเสียดทานเช่นกัน เช่น เบรก คลัตช์ สายพาน ยางรถยนต์ เป็นต้น

6/2 ประเภทของแรงเสียดทาน

แรงเสียดทานสามารถแบ่งได้เป็นประเภทใหญ่ๆ 3 ประเภทดังนี้

1. Dry Friction

แรงเสียดทานประเภทนี้เกิดขึ้นเมื่อมีการสัมผัสกันของผิวของแข็งซึ่งไม่เรียบ และมีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน หรือมีแนวโน้มที่จะเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน ทิศทางของแรงเสียดทานจะตรงกันข้ามกับทิศการเคลื่อนที่ หรือทิศที่มีแนวโน้มจะเคลื่อนที่ แรงเสียดทานชนิดนี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Coulomb friction

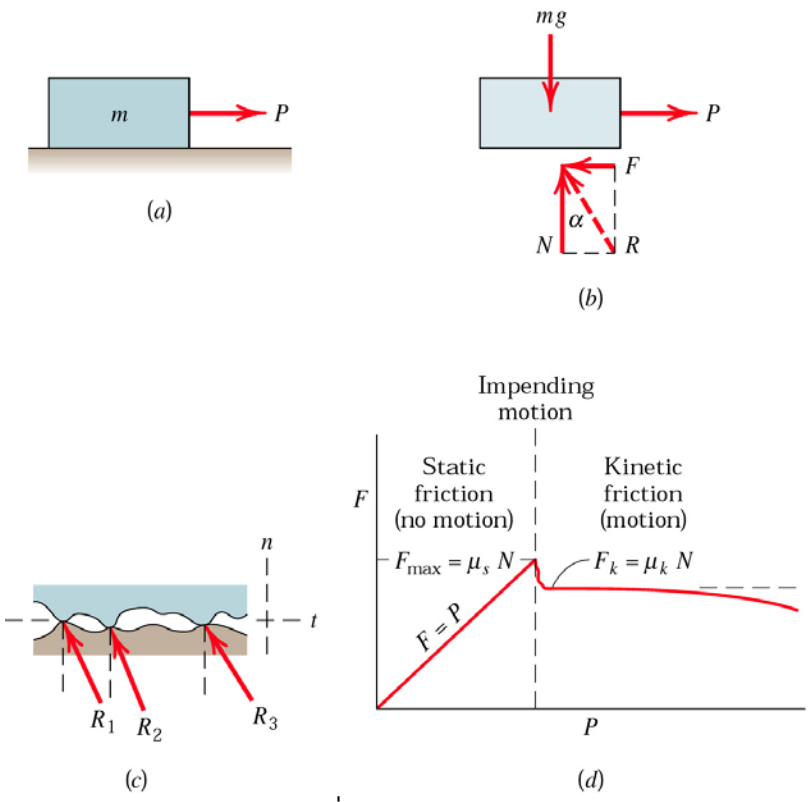
2. Fluid Friction

Fluid Friction เกิดเมื่อแต่ละชั้นของอนุภาคของไหล (ของเหลว หรือ ก๊าซ) เคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน แรงเสียดทานประเภทนี้ขึ้นอยู่กับ ความเร็วของของไหล และความหนืดของของไหล แรงเสียดทานชนิดนี้มีความสำคัญอย่างมากในการศึกษาวิชากลศาสตร์ของไหล

3. Internal Friction

แรงเสียดทานประเภทนี้เกิดขึ้นในของแข็งทุกชนิด ซึ่งรับแรงแบบเป็นคาบกลับไปกลับมา (Cyclical loading) ตัวอย่างแรงเสียดทานประเภทนี้คือการสั่นสะเทือนของของแข็ง ซึ่งจะสูญเสียพลังงานไปทุกๆ รอบของการสั่น ทำให้ขนาดการสั่นสะเทือนลดลงจนกระทั่งหยุดนิ่ง

สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงเพียงแค่ Dry Friction เท่านั้น



รูปที่ 1 Dry Friction

6/3 Dry Friction

Mechanism of Dry Friction

พิจารณากล่องมวล m ซึ่งวางอยู่บนพื้นขรุขระ ดังแสดงในรูปที่ 1(a) แรง P เป็นแรงภายนอกที่กระทำกับกล่องนี้ FBD ของกล่องนี้แสดงดังรูปที่ 1(b) เนื่องจากพื้นขรุขระ จึงต้องมีแรงเสียดทาน F ต้านทานการเคลื่อนที่เกิดขึ้นด้วย เนื่องจากเมื่อให้แรง P วัตถุจะมีแนวโน้มเคลื่อนที่ไปทางขวามือตามทิศทางแรง P ดังนั้นแรงเสียดทานจึงต้องมีทิศทางไปทางด้านซ้ายตรงข้ามกับแรง P ส่วนแรง R คือผลรวมของแรงเสียดทาน F และ แรงปฏิกิริยาที่พื้นดันกล่อง N

รูปที่ 1(d) แสดงความสัมพันธ์ของขนาดของแรง P และแรงเสียดทาน F เมื่อขนาดของแรง P ค่อยๆ เพิ่มขึ้นจากศูนย์ ถ้าขณะนั้นกล่องยังไม่เคลื่อนที่แสดงว่ากล่องยังอยู่ในสภาวะสมดุล นั่นคือ แรงเสียดทาน F จะมีค่าเท่ากับแรงภายนอก P และจะเรียกแรงเสียดทานในช่วงนี้ว่า**แรงเสียดทานสถิต** อย่างไรก็ตามถ้าเพิ่มแรง P จนถึงค่าๆ หนึ่ง กล่องจะเริ่มเคลื่อนที่ ค่าแรงเสียดทานสถิตสุดท้ายก่อนที่กล่องจะเคลื่อนที่เรียกว่าแรงเสียดทานสถิตสูงสุด เมื่อกล่องเริ่มเคลื่อนที่แล้ว จะพบว่าขนาดแรงเสียดทานจะลดลงเล็กน้อย และมีค่าค่อนข้างคงที่ แรงเสียดทานในช่วงนี้จะเรียกว่า**แรงเสียดทานจลน์** อย่างไรก็ตามถ้าความเร็วในการเคลื่อนที่มากขึ้นขนาดแรงเสียดทานจะลดลงเล็กน้อย สำหรับการคำนวณจะพิจารณาให้ค่าแรงเสียดทานจลน์มีค่าคงที่

เพื่อให้เข้าใจถึงกลไกของแรงเสียดทานดียิ่งขึ้น พิจารณารูปที่ 1(c) ซึ่งแสดงภาพขยายของผิวสัมผัสระหว่างกล่องกับพื้น จะเห็นว่าทั้งผิวกล่องและผิวของพื้นขรุขระ ทำให้การสัมผัส

กันของทั้ง 2 ผิว เกิดที่บางตำแหน่งเท่านั้น แรง R1, R2 และ R3 แสดงแรงปฏิกิริยาย่อยๆ ที่แต่ละตำแหน่งจุดสัมผัส จากรูปจะเห็นว่าแรง R1, R2 และ R3 มีทิศทางไม่เหมือนกัน ขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของพื้นผิว และการเสียรูปของยอดขรุขระ ผลรวมของแรง R1, R2 และ R3 คือแรงลัพธ์ R ส่วนผลรวมของแรง R1, R2 และ R3 ในทิศทางตั้งฉาก (ทิศทาง n) และทิศทางสัมผัส (ทิศทาง t) ก็คือแรง N และแรง F ในรูปที่ 1(b) ตามลำดับ ในขณะที่วัตถุเคลื่อนที่การสัมผัสกันของผิว จะเกิดที่ส่วนยอดของผิวขรุขระเท่านั้น ด้วยสาเหตุนี้แรงเสียดทานซึ่งเกิดขึ้นในขณะที่เคลื่อนที่หรือแรงเสียดทานจลน์ จึงมีค่าน้อยกว่าในขณะที่หยุดนิ่ง (แรงเสียดทานสถิตสูงสุด)

แรงเสียดทานสถิต (Static Friction)

แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นในช่วงก่อนที่จะเกิดการเคลื่อนที่เรียกว่า แรงเสียดทานสถิต จากรูปที่ 1(d) พบว่าขนาดของแรงเสียดทานนี้เปลี่ยนแปลงตั้งแต่ศูนย์ถึงค่าแรงเสียดทานสถิตสูงสุด โดยค่าแรงเสียดทานสถิตสูงสุดหาได้จากสมการ

$$F_{\max} = \mu_s N \qquad (1)$$

สมการที่ (1) จะใช้ได้ในกรณีที่วัตถุกำลังจะเคลื่อนที่ซึ่งแรงเสียดทานสถิตมีค่าสูงสุดเท่านั้น ถ้าวัตถุยังไม่เกิดการเคลื่อนที่ แรงเสียดทานต้องมีค่าเท่ากับแรงที่ทำให้ระบบสมดุล และมีค่าน้อยกว่าค่าแรงเสียดทานสถิตสูงสุด ($F < \mu_s N$)

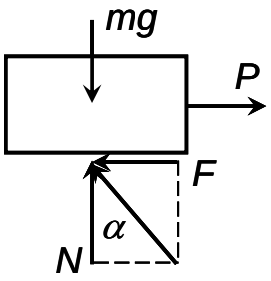
แรงเสียดทานจลน์ (Kinematic Friction)

เมื่อวัตถุเกิดการเคลื่อนที่แรงเสียดทานจะมีค่าลดลง เรียกว่าแรงเสียดทานในช่วงนี้ว่าแรงเสียดทานจลน์ ขนาดของแรงเสียดทานจลน์สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$F_K = \mu_k N \qquad (2)$$

เนื่องจากที่พื้นผิวเดียวกัน แรงเสียดทานจลน์จะมีค่าน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตเสมอ ดังนั้นจะพบว่า $\mu_S > \mu_k$ เสมอ

มุมของแรงเสียดทาน (Friction Angles)



รูปที่ 2 มุมของแรงเสียดทาน α

รูปที่สองแสดง FBD ของวัตถุมวล m ซึ่งถูกดึงด้วยแรง P จะพบว่าแรงที่พื้นกระทำกับวัตถุมีอยู่ 2 แรง คือแรง N และแรงเสียดทาน F เมื่อรวมแรง N และ F เข้าด้วยกันจะได้แรงลัพธ์ซึ่งทำมุมกับแนวดิ่งเท่ากับมุม α มุม ความสัมพันธ์ของมุม α กับแรง N และ F เป็นดังนี้

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} \tag{3}$$

จะพบว่าเมื่อเพิ่มแรง P ขึ้นเรื่อยๆ จนวัตถุเริ่มเคลื่อนที่ แรงเสียดทาน F จะมีค่ามากที่สุด ทำให้มุม α มีค่ามากที่สุดเท่ากับ ϕ_S เรียกมุม ϕ_S นี้ว่ามุมของแรงเสียดทานสถิต โดย

$$\tan\phi_S = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{\mu_S N}{N} = \mu_S \tag{4}$$

ทำนองเดียวกัน กำหนดให้มุมของแรงเสียดทานจลน์คือ

$$\tan\phi_k = \frac{\mu_k N}{N} = \mu_k \tag{5}$$

ชนิดของปัญหาเรื่องแรงเสียดทาน

ปัญหาเรื่องแรงเสียดทาน สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภทดังนี้

1. <u>ปัญหาซึ่งรู้ว่าวัตถุกำลังจะเคลื่อนที่</u>

เมื่อวัตถุกำลังจะเคลื่อนที่ หรือเปลี่ยนสภาพจากหยุดนิ่งไปเป็นเคลื่อนที่ แรงเสียดทานจะมีค่ามากที่สุด โดย $F = F_{\max} = \mu_s N$

นอกจากนี้เนื่องจากวัตถุกำลังจะเคลื่อนที่ หมายถึงวัตถุยังหยุดนิ่งอยู่ ดังนั้นจึงสามารถใช้สมการสมดุลกับปัญหาประเภทนี้ได้ตามปกติ

2. <u>ปัญหาซึ่งรู้ว่าวัตถุกำลังเคลื่อนที่อยู่</u>

เนื่องจากวัตถุกำลังเคลื่อนที่ขนาดของแรงเสียดทานจะมีค่าเท่ากับแรงเสียดทานจลน์ตามสมการ $F = F_K = \mu_k N$

เนื่องจากกรณีนี้วัตถุเคลื่อนที่ จึงอาจจะอยู่หรือไม่อยู่ในสภาพสมดุลก็ได้ ถ้าเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ในแนวเส้นตรงจะอยู่ในสภาวะสมดุล แต่ถ้าเคลื่อนที่ด้วยความเร่งจะไม่อยู่ในสภาพสมดุล ทำให้ไม่สามารถใช้สมการสมดุลในทิศทางที่เกิดความเร่งได้

3. <u>ปัญหาซึ่งไม่รู้สภาพการเคลื่อนที่ของวัตถุ</u>

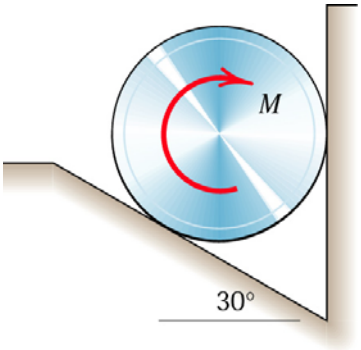
ในกรณีนี้ ไม่รู้ว่าวัตถุยังไม่เคลื่อนที่ กำลังจะเคลื่อนที่ หรือเคลื่อนที่อยู่ การแก้ปัญหาในกรณีนี้สามารถทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. สมมุติให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุล
2. ใช้สมการสมดุลคำนวณหาแรงเสียดทาน F (ไม่แทน F ด้วย $F = F_{\max} = \mu_s N$ เนื่องจากไม่รู้ว่าวัตถุอยู่ในสภาพกำลังจะเคลื่อนที่หรือไม่)
3. เมื่อหาค่า F ได้จากสมการสมดุล ตรวจสอบค่า F ว่าเป็นไปได้หรือไม่ดังนี้

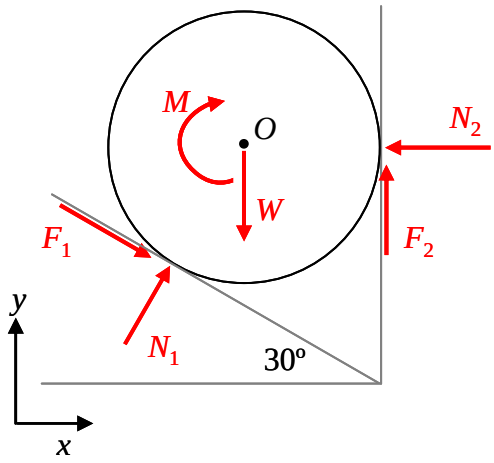
ถ้าค่า $F < \mu_s N$ แสดงว่าเกิดแรงเสียดทานนี้ได้ กรณีนี้วัตถุยังหยุดนิ่งอยู่ ค่าแรงเสียดทานจึงมีค่าน้อยกว่าค่าแรงเสียดทานมากที่สุด ดังนั้นที่สมมุติให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลถูกต้องแล้ว

ถ้าค่า $F = \mu_s N$ แสดงว่าเกิดแรงเสียดทานนี้ได้ กรณีนี้วัตถุกำลังจะเริ่มเคลื่อนที่ ค่าแรงเสียดทานจึงมีค่าเท่ากับแรงเสียดทานมากที่สุด ดังนั้นที่สมมุติให้วัตถุอยู่ในสภาพสมดุลถูกต้องแล้ว

ถ้าค่า $F > \mu_s N$ แสดงว่าแรงเสียดทานนี้เป็นไปไม่ได้ การสมมุติผิดความเป็นจริง วัตถุเกิดการเคลื่อนที่



6/8 The 30-kg homogeneous cylinder of 400-mm diameter rests against the vertical and inclined surfaces as shown. If the coefficient of static friction between the cylinder and the surface is 0.3, calculate the applied clockwise couple M which would cause the cylinder to slip.



วิธีทำ เขียน Free-body diagram ได้ดังรูป โดยจะสังเกตได้ว่าเริ่มแรกจะแทนแรงเสียดทานแต่ละจุดด้วยค่า F เสียก่อน

$$W = mg = (30)(9.81) \quad \text{N}$$

$$[\textstyle\sum F_x = 0]$$

$$F_1 \cos 30° + N_1 \sin 30° - N_2 = 0 \qquad (1)$$

$$[\textstyle\sum F_y = 0] \quad N_1 \cos 30° - F_1 \sin 30° + F_2 - (30)(9.81) = 0 \qquad (2)$$

$$[\textstyle\sum M_O = 0] \quad \text{CW+} \quad M - F_1(0.2) - F_2(0.2) = 0 \qquad (3)$$

เนื่องจากโมเมนต์ M ที่ใส่เข้าไปทำให้เกิดการหมุนรอบจุด O ดังนั้นจุดสัมผัสทั้งสองจะต้องเกิดการไถลพร้อมกัน

$$F_1 = \mu N_1 = 0.3N_1 \quad \text{และ} \quad F_2 = \mu N_2 = 0.3N_2$$

แทนค่าแรงเสียดทาน F_1 และ F_2 ลงในสมการ (1) และ (2) ได้

$$0.3N_1 \cos 30° + N_1 \sin 30° - N_2 = 0$$

$$(0.3\cos 30° + \sin 30°)N_1 - N_2 = 0 \qquad (4)$$

$$N_1 \cos 30° - 0.3N_1 \sin 30° + 0.3N_2 - (30)(9.81) = 0$$

$$(\cos 30° - 0.3\sin 30°)N_1 + 0.3N_2 = (30)(9.81) \qquad (5)$$

แก้สมการที่ (3) และ (4) จะได้

$N_1 = 311.7691$ N

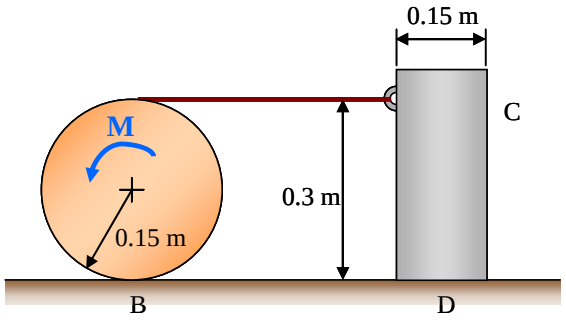
$N_2 = 236.8846$ N

แทนค่า N_1 และ N_2 ลงในสมการที่ (3) จะได้

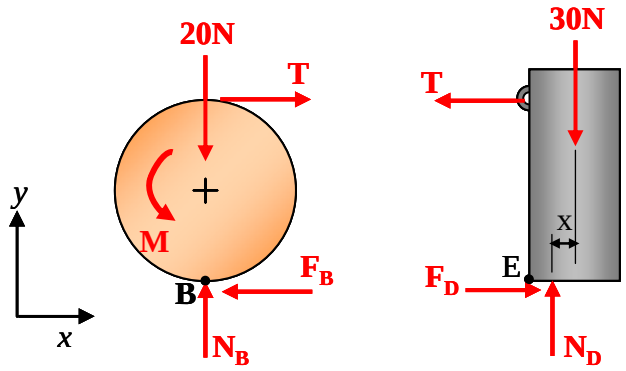
$$M - (0.3)(311.7691)(0.2) - (0.3)(236.8846)(0.2) = 0$$

$M = 32.9$ Nm *Ans*

8/46 Determine the smallest couple moment which can be applied to the 20-N (≈2-kg) wheel that will cause impending motion. The cord is attached to the 30-N (≈3-kg) block, and the coefficients of static friction are $\mu_B = 0.2$ and $\mu_D = 0.3$



วิธีทำ เขียน Free-body diagram ของล้อ และบล็อกได้ดังนี้



จาก Free-body diagram สามารถเขียนสมการสมดุลได้ดังนี้

ที่ล้อ

$$[\sum F_x = 0] \qquad T - F_B = 0 \tag{1}$$

$$[\sum F_y = 0] \qquad N_B - 20 = 0\ ; \qquad N_B = 20\ \text{N} \tag{2}$$

ที่บล็อก

$$[\sum F_x = 0] \qquad F_D - T = 0 \tag{3}$$

$$[\sum F_y = 0] \qquad N_D - 30 = 0\ ; \qquad N_D = 30\ \text{N} \tag{4}$$

เมื่อให้ moment ที่ล้อจนเริ่มเกิดการเคลื่อนที่ การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นได้ เป็นไปได้ 3 กรณี ดังนี้

1. เกิดการไถลระหว่างล้อกับพื้น (ล้อหมุนฟรี บล็อกไม่เคลื่อนที่)
2. เกิดการไถลระหว่างบล็อกกับพื้น (ล้อกลิ้งโดยไม่ไถล ดึงให้บล็อกเคลื่อนที่)
3. บล็อกล้ม (ล้อกลิ้งโดยไม่ไถล ดึงให้บล็อกล้ม)

สมมุติให้เกิดการไถลระหว่างล้อกับพื้นก่อน

ดังนั้น $F_B = F_{\max} = \mu_B N_B = 0.2(20) = 4$ N

จาก (1) จะได้ $T = F_B = 4$ N

จาก (3) จะได้ $F_D = T = F_B = 4$ N

เนื่องจากสมมุติให้เกิดการไถลระหว่างล้อกับพื้นก่อน ดังนั้นที่บล็อกต้องยังไม่เกิดการไถล และไม่เกิดการล้ม
สามารถตรวจสอบว่าที่สมมุติไว้เป็นจริงหรือไม่ได้ดังนี้

ตรวจสอบการไถลระหว่างบล็อกกับพื้น

$(F_D)_{\max} = \mu_D N_D = 0.3(30) = 9$ N

เนื่องจาก F_D ที่คำนวณได้จากสมการสมดุลเท่ากับ 4 N มีค่าน้อยกว่าค่า $(F_D)_{\max}$ ซึ่งเท่ากับ 9 N แสดงว่าบล็อกไม่เกิดการไถล ดังนั้นที่สมมุติไว้จึงเป็นไปได้

ตรวจสอบการล้มของบล็อก

เมื่อออกแรงดึงแล้วบล็อกเริ่มล้ม ปลายด้านขวาของบล็อกจะเริ่มยก ทำให้แรง N_D ย้ายไปทางด้านซ้ายเรื่อยๆ และจะเริ่มล้มเมื่อแรง N_D เลื่อนไปอยู่ที่จุด E ดังนั้นการตรวจสอบว่าบล็อกจะล้มหรือไม่ ก็คือการตรวจสอบว่าแรง N_D กระทำที่ตำแหน่งใด ถ้าแรง N_D กระทำอยู่ภายในฐานของบล็อกแสดงว่าวัตถุยังอยู่ในสภาพสมดุลอยู่และบล็อกไม่ล้ม แต่ถ้าคำนวณตำแหน่งแรง N_D แล้วตำแหน่งแรงกระทำอยู่ภายนอกฐาน ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แสดงว่าวัตถุต้องเกิดการล้มก่อน

$$\left[\sum M_E = 0\right] \quad \text{CW+} \qquad \frac{30(0.15)}{2} - N_D\left(\frac{0.15}{2} - x\right) - T(0.3) = 0$$

$$2.25 - 30(0.075 - x) - 4(0.3) = 0$$

$$x = 0.04 \quad \text{m}$$

เนื่องจาก x ที่คำนวณได้จากสมการสมดุลมีค่าเท่ากับ 0.04 m ซึ่งน้อยกว่าระยะจากจุดศูนย์กลางมวลไปยังมุม E แสดงว่าแรง N_D ยังกระทำอยู่ในขอบฐานของบล็อก ดังนั้นบล็อกจึงไม่ล้มตามที่สมมุติไว้

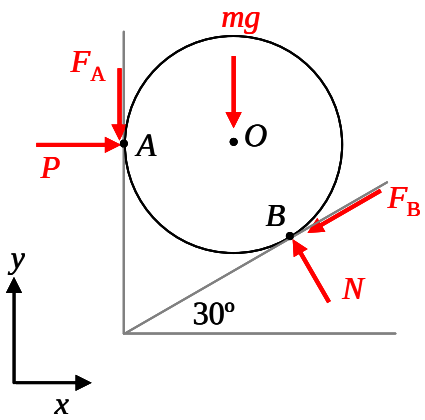
จากที่ตรวจสอบพบว่าเกิดการไถลที่ล้อ นั่นคือล้อหมุนฟรี แต่บล็อกไม่เคลื่อนที่และไม่ล้ม

คิดที่ล้อ $\left[\sum M_B = 0\right]$ $M - T(0.3) = 0$

$M = 4(0.3) = 1.2$ Nm *Ans*

6/43 The industrial truck is used to move the solid 1200-kg roll of paper up the 30° incline. If the coefficients of static and kinetic friction between the roll and the vertical barrier of the truck and between the roll and the incline are both 0.40, compute the required tractive force P between the tires of the truck and the horizontal surface.

วิธีทำ เขียน Free-body diagram ของม้วนกระดาษได้ดังนี้



$$[\sum F_x = 0]$$

$$P - N\sin 30° - F_B\cos 30° = 0 \qquad (1)$$

$$[\sum F_y = 0]$$

$$N\cos 30° - F_A - F_B\sin 30° - mg = 0 \qquad (2)$$

$$[\sum M_O = 0] \quad \text{CCW+}$$

$$F_A r - F_B r = 0; \quad F_A = F_B \qquad (3)$$

เนื่องจากมีจุดที่ม้วนกระดาษสัมผัสกับชิ้นส่วนอื่นอยู่ 2 จุด ดังนั้นการไถลอาจจะเกิดไม่พร้อมกัน คือเกิดที่จุด A หรือจุด B ก่อนก็ได้

<u>สมมุติให้เกิดการไถลที่จุด B ก่อน</u> เมื่อกำลังจะเกิดการไถล $F_B = \mu N$ (4)

แทนค่า F_A และ F_B จากสมการ (4) และ (3) ลงในสมการ (2)

$$N\cos 30° - \mu N - \mu N\sin 30° - mg = 0$$

$$N = \frac{mg}{\cos 30° - \mu - \mu\sin 30°} = \frac{1200(9.81)}{\cos 30° - 0.4 - 0.4\sin 30°} = 44251.416 \quad \text{N}$$

แทนค่า N ลงในสมการ (1) เพื่อหาค่า P

$$P = N\sin 30° + \mu N\cos 30°$$

$$P = (44251.413)\sin 30° + 0.4(44251.413)\cos 30° = 37454.8456 \quad \text{N}$$

ค่า P ที่ได้นี้ยังไม่ใช่คำตอบ เนื่องจากเกิดจากการสมมุติให้เกิดการไถลที่จุด B ก่อน การตรวจสอบว่าที่สมมุตินี้เป็นจริงหรือไม่ทำโดย ตรวจสอบว่า F_A ที่คำนวณได้จากสมการสมดุลมีค่ามากกว่าค่า $(F_A)_{max}$ หรือไม่

จากสมการ (3) $F_A = F_B = \mu N = 0.4(44251.413)$ N

$$(F_A)_{\max} = \mu P = 0.4(37454.8456) \quad \text{N}$$

จะเห็นว่า F_A ที่คำนวณได้จากสมการสมดุลมีค่ามากกว่า $(F_A)_{max}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นที่สมมุติมาตอนแรกให้เกิดการไถลที่จุด B ก่อนจึงไม่เป็นความจริง การไถลต้องเกิดที่จุด A ก่อน และ

$$F_A = (F_A)_{\max} = \mu P$$

จากสมการ (1) ได้ $N \sin 30° = P - F_B \cos 30°$ (5)

จากสมการ (2) ได้ $N \cos 30° = F_A + F_B \sin 30° + mg$ (6)

(5)/(6) $$\tan 30° = \frac{P - F_B \cos 30°}{F_A + F_B \sin 30° + mg} \quad (7)$$

เนื่องจาก $F_A = F_B = \mu P$

สมการ (7) จะเขียนได้เป็น $$\tan 30° = \frac{P - \mu P \cos 30°}{\mu P + \mu P \sin 30° + mg}$$

จัดรูปเพื่อหาค่า P ได้ดังนี้

$$P = \frac{mg \tan 30°}{1 - \mu \cos 30° - \mu \tan 30°(1 + \sin 30°)}$$

$$P = \frac{(1200)(9.81) \tan 30°}{1 - 0.4 \cos 30° - 0.4 \tan 30°(1 + \sin 30°)}$$

$$P = 22125.7 \quad \text{N} \qquad \approx 22.1 \quad \text{kN}$$ *Ans*