เอกสารประกอบการสอน

วิชา 2103213 กลศาสตร์วิศวกรรม 1

(Engineering Mechanics 1)

ส่วนที่ 2 DYNAMICS

โดย อ.ดร.ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

กลศาสตร์เป็นวิทยาศาสตร์กายภาพที่เกี่ยวข้องกับแรง และผลของแรงบนวัตถุ วิชากลศาสตร์เป็นพื้นฐานที่สำคัญของวิศวกรรมศาสตร์หลายๆ แขนง จึงได้ถูกบรรจุเป็นวิชาบังคับในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิตของทุกสาขา สำหรับหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิตของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย มีวิชาที่เกี่ยวข้องกับกลศาสตร์อยู่ทั้งหมด 3 วิชา ได้แก่ วิชากลศาสตร์วิศวกรรม (Engineering Mechanics I) วิชาสถิตยศาสตร์ (Statics) และวิชาจลศาสตร์ (Dynamics) สำหรับนิสิตภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล และวิศวกรรมอุตสาหการ ซึ่งจำเป็นต้องใช้วิชานี้เป็นอย่างมากจะเรียนวิชาสถิตยศาสตร์ และวิชาจลศาสตร์ รวม 2 วิชา แต่กับภาควิชาอื่นๆ นั้น จะเรียนวิชากลศาสตร์วิศวกรรมเพียงตัวเดียว โดยเนื้อหาของวิชากลศาสตร์วิศวกรรมจะประกอบด้วยเนื้อหาบางส่วนของวิชาสถิตยศาสตร์ และบางส่วนของวิชาจลศาสตร์ สำหรับเอกสารประกอบการสอนนี้มีจุดประสงค์หลักเพื่อใช้สำหรับวิชากลศาสตร์วิศวกรรม จึงมีเนื้อหาส่วนที่ 1 เป็นส่วนสถิตยศาสตร์และเนื้อหาส่วนที่ 2 เป็นจลศาสตร์

การเรียงบทและหัวข้อในเอกสารประกอบการสอนนี้ จะอ้างอิงตามบทและหัวข้อที่แสดงไว้ในหนังสือ Engineering Mechanics STATICS และ Engineering Mechanics DYNAMICS ซึ่งเขียนโดย Meriam และ Kraige ซึ่งเป็นหนังสืออ่านบังคับในวิชากลศาสตร์วิศวกรรม และยังสอดคล้องกับเนื้อหา และลำดับหัวข้อที่เขียนไว้ในประมวลรายวิชา ทั้งนี้เพื่อความสะดวกของนิสิตในการใช้อ่านประกอบกับหนังสืออ่านบังคับ ด้วยเหตุนี้จะเห็นได้ว่าเลขบทและเลขหัวข้อในเอกสารประกอบการสอนนี้ บางส่วนจะไม่เรียงลำดับตามตัวเลข โดยจะข้ามบท หรือหัวข้อที่ไม่มีการเรียนการสอนไป การเขียนเอกสารประกอบการสอนนี้ ผู้เขียนไม่ได้แปลมาจากหนังสืออ่านบังคับภาษาอังกฤษโดยตรง แต่จะแปล เรียบเรียง และบางส่วนมีการอธิบายเพิ่มเติม เพื่อให้นิสิตสามารถเข้าใจเนื้อหาได้ง่ายและรวดเร็วยิ่งขึ้น รูปภาพและโจทย์ตัวอย่างในเอกสารนี้ผู้เขียนนำมาจากหนังสือ Engineering Mechanics STATICS และ DYNAMICS ซึ่งเขียนโดย Meriam และ Kraige เป็นหลักและเสริมด้วยบางส่วนจากหนังสือ Engineering Mechanics STATICS และ DYNAMICS ซึ่งเขียนโดย R.C.Hibbeler ซึ่งเป็นหนึ่งในหนังสืออ่านบังคับเช่นกัน โดยที่มาของรูปและโจทย์ปัญหาได้อ้างอิงไว้ดังแสดงในรายการเอกสารอ้างอิงท้ายหัวข้อนั้นๆ

สุดท้ายนี้ผู้เขียนยินดีรับฟังความคิดเห็น และข้อเสนอแนะต่างๆ เพื่อปรับปรุงเอกสารประกอบการสอนนี้ให้ดียิ่งๆ ขึ้นไป โดยสามารถเสนอความคิดเห็นได้โดยผ่านทางอีเมล์ของผู้เขียน Chanat.r@chula.ac.th

ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์

สารบัญ Dynamics

เอกสารประกอบการสอน

วิชา 2103213 กลศาสตร์วิศวกรรม 1
(Engineering Mechanics 1)

ส่วนที่ 2 DYNAMICS

โดย อ.ดร.ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ Dynamics

พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 1)

2/1 บทนำ

พลศาสตร์ เป็นสาขาหนึ่งของวิชากลศาสตร์ พลศาสตร์เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้แรงกระทำ พลศาสตร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 สาขาย่อย ได้แก่

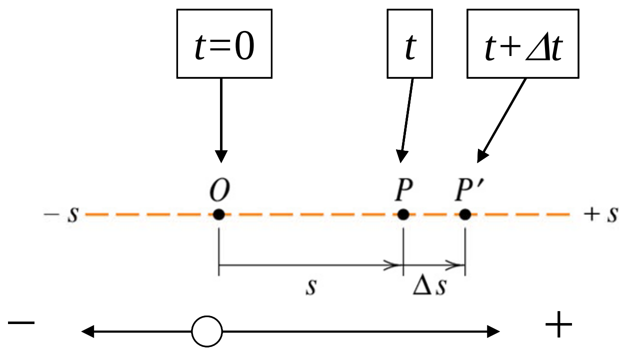
1. Kinematics ซึ่งจะพิจารณาถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยยังไม่พิจารณาถึงแรงกระทำกับวัตถุนั้น

2. Kinetics ซึ่งจะพิจารณาผลของแรงที่กระทำบนวัตถุ ว่าทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่อย่างไร

สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึง Kinematics of particles หรือการเคลื่อนที่ของอนุภาค ในที่นี้อนุภาคหมายถึงวัตถุที่มีขนาดเล็กเมื่อเทียบเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่ของรถยนต์ ถือเป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาค เนื่องจากขนาดของรถยนต์เล็กกว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของรถบนถนนมาก ตัวอย่างอื่นๆ เช่นการเคลื่อนที่ของเครื่องบิน ลูกกระสุนปืน เป็นต้น

2/2 การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

พิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงของวัตถุแสดงดังรูปที่ 1 วัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากจุด O โดยเคลื่อนที่ไปทางขวา (แกนบวก) ที่เวลา t วัตถุอยู่ที่จุด P ซึ่งมีระยะห่างจากจุดเริ่มต้น s เมื่อเวลาผ่านไป Δt วัตถุเคลื่อนที่ไปที่จุด P’ และมีระยะห่าง $s+\Delta s$ จากจุดเริ่มต้น การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในช่วงเวลา Δt เรียกว่า การขจัด Δs การขจัดเป็นปริมาณเวคเตอร์ มีค่าบวกเมื่อเคลื่อนที่ไปตามแกนบวก และจะมีค่าลบเมื่อเคลื่อนที่ไปในทิศทางลบ



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรง [1]

ความเร็วและความเร่ง

ความเร็ว (Velocity) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งเมื่อเทียบกับเวลา ความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลา Δt หาได้จากการหารการขจัด Δs ที่เคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลา Δt ด้วยเวลา Δt หรือเขียนเป็นสมการได้เป็น $v = \Delta s/\Delta t$ ถ้าต้องการพิจารณาความเร็วที่จุดใดๆ สามารถหาได้โดยพิจารณาในช่วงเวลาเล็กๆ เข้าใกล้ศูนย์ ความเร็วที่จุดใดๆ หาได้จาก

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad (1)$$

โดย สัญลักษณ์จุดเหนือตัวเลข แสดงให้เห็นว่าเป็นการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา

ความเร็วเป็นปริมาณเวคเตอร์ โดยความเร็วที่ทำให้การขจัดมีความเพิ่มขึ้น (เคลื่อนที่ไปทางบวก) จะมีค่าเป็นบวก ส่วนความเร็วที่ทำให้การขจัดมีค่าลดลง (เคลื่อนที่ไปทางลบ) จะมีค่าเป็นลบ

ความเร่ง (Acceleration) คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วเมื่อเทียบกับเวลา ความเร่งเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลา Δt หาได้จากการหารความเร็ว Δv ด้วยเวลา Δt หรือเขียนเป็นสมการได้เป็น $a = \Delta v/\Delta t$ ถ้าต้องการพิจารณาความเร่งที่จุดใดๆ สามารถหาได้โดยพิจารณาในช่วงเวลาเล็กๆ เข้าใกล้ศูนย์ ความเร่งที่จุดใดๆ หาได้จาก

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \qquad (2)$$

ความเร่งเป็นปริมาณเวคเตอร์ โดยความเร่งเป็นบวกเมื่อความเร็วมีค่าเพิ่มขึ้น และความเร่งเป็นลบเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ช้าลง เรียกความเร่งที่เป็นลบว่า ความหน่วง (Deceleration)

จากสมการ (1) และ (2) สามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ใหม่โดยใช้กฎลูกโซ่ดังนี้

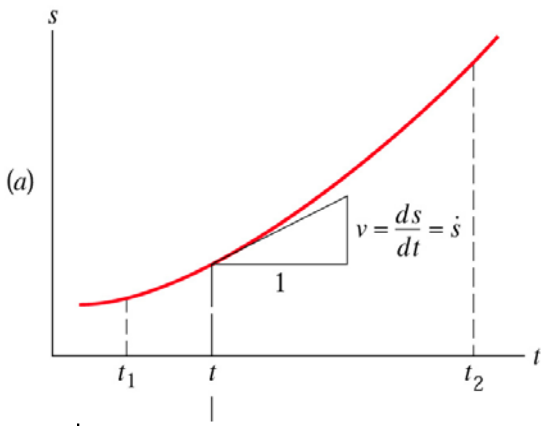
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = a\frac{ds}{dv}$$

$$vdv = ads \qquad (3)$$

ข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ได้จากกราฟการเคลื่อนที่

การจะทราบว่าจะสามารถดึงข้อมูลใดจากกราฟการเคลื่อนที่ที่กำหนดให้ได้ ให้พิจารณากราฟการเคลื่อนที่ และสมการที่ (1) – (3) ประกอบกัน โดยส่วนใหญ่ข้อมูลที่ได้จากกราฟมักจะได้จากความชันของกราฟ (เช่น อัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา) และพื้นที่ใต้กราฟ (ผลคูณของปริมาณหนึ่ง กับส่วนย่อยๆ ของอีกปริมาณหนึ่ง)

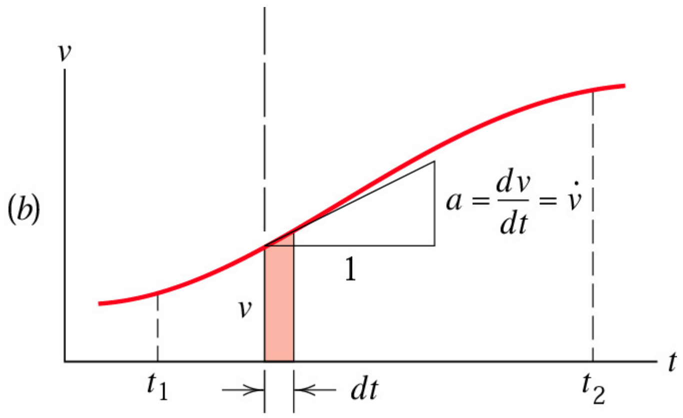
1. กราฟระหว่างการขจัดกับเวลา



รูปที่ 2 กราฟระหว่างการขจัดและเวลา [1]

กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ s-t ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับตัวแปร s-t ซึ่งจากสมการ (1) - (3) จะพบว่ามีเพียงสมการ (1) เท่านั้นที่แสดงความสัมพันธ์ ของ s-t จากสมการ (1) จะได้ $v = \frac{ds}{dt}$ ซึ่งค่าอัตราการเปลี่ยนแปลง $\frac{ds}{dt}$ ก็คือความชันของกราฟนั่นเอง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าความชันของกราฟที่จุดใดๆ จะแสดงค่าความเร็วของการเคลื่อนที่ที่จุดนั้นๆ

2. กราฟระหว่างความเร็วกับเวลา



รูปที่ 3 กราฟระหว่างความเร็วและเวลา [1]

กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ v-t ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับตัวแปร v-t จะพบว่ามีสองสมการ ที่แสดงความสัมพันธ์ ของ v-t ได้แก่สมการ (1) จะได้ $v = \frac{ds}{dt}$ และสมการ (2) $a = \frac{dv}{dt}$

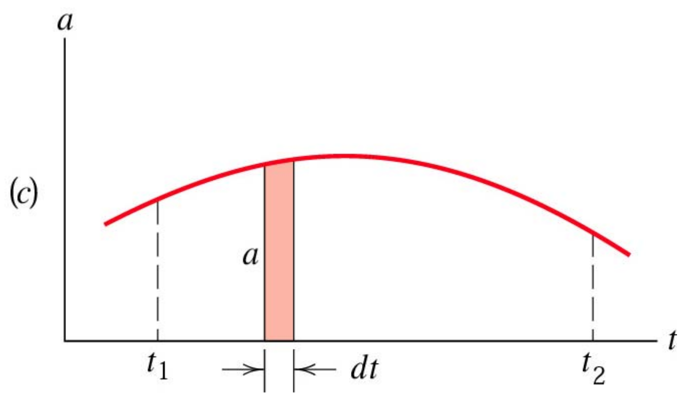
สมการ (1) สามารถจัดรูปและเขียนได้ดังนี้ $ds = vdt$ จะพบว่าผลคูณของ v และ dt จะแสดงถึงพื้นที่ย่อยๆ ซึ่งแรเงาในรูป และมีค่าเท่ากับการขจัดย่อยๆ ds เมื่ออินทิเกรตตลอดช่วงตั้งแต่ t1 จนถึง t2 พื้นที่ย่อยๆ จะกลายเป็นพื้นที่ใต้กราฟ และ การขจัดย่อยๆ จะกลายเป็นการขจัดที่เกิดในช่วงเวลาตั้งแต่ t1 จนถึง t2 ดังสมการ

$$\text{displacement } s = \int_{t_1}^{t_2} vdt = \text{Area under } v-t \text{ curve} \tag{4}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าพื้นที่ใต้กราฟของกราฟที่ v-t จะแสดงค่าการขจัดของการเคลื่อนที่ในขอบเขตนั้นๆ

สมการ (2) $a = \dfrac{dv}{dt}$ มีรูปแบบเดียวกับกรณีกราฟ s-t ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าความชันของกราฟที่จุดใดๆ จะแสดงค่าความเร่งของการเคลื่อนที่ที่จุดนั้นๆ

3. กราฟระหว่างความเร่งกับเวลา



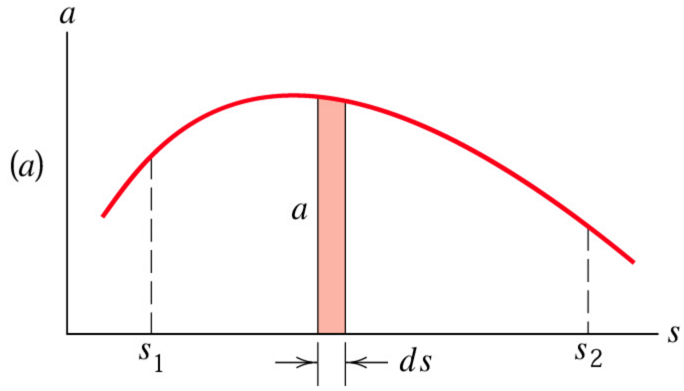
รูปที่ 4 กราฟระหว่างความเร่งและเวลา [1]

กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ a-t ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกับตัวแปร a-t จะพบว่าสมการ (2) แสดงความสัมพันธ์ ของ a-t โดยความสัมพันธ์คือ $a = \dfrac{dv}{dt}$ ซึ่งสามารถจัดรูปได้เป็น $dv = adt$ ผลคูณของ a และ dt คือพื้นที่ใต้กราฟย่อยๆ ส่วนที่แรเงาในรูป และมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว dv เมื่อคิดตลอดช่วงตั้งแต่ t1 จนถึง t2 จะได้ ผลต่างความเร็วของจุด 1 และจุด 2 ดังสมการ

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} adt = \text{Area under } a-t \text{ curve} \tag{5}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าพื้นที่ใต้กราฟในช่วง t1-t2 จะแสดงผลต่างของความเร็วตั้งแต่ที่เวลา t1-t2

4. กราฟระหว่างความเร่งกับการขจัด

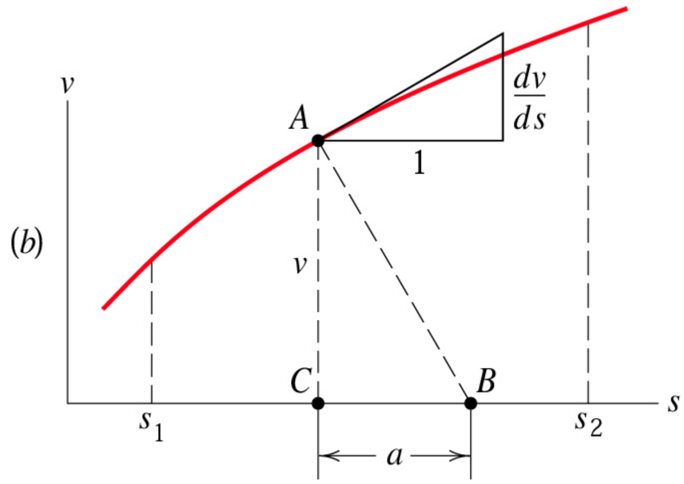


รูปที่ 5 กราฟระหว่างความเร่งและการขจัด [1]

กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ a-s ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร a-s พบว่าสมการ (3) แสดงความสัมพันธ์ของ a-s ดังนี้ $vdv = ads$ ด้านขวาของสมการ (3) แสดงถึงพื้นที่ย่อยๆ ที่แรเงาในรูปที่ 5 ดังนั้นพื้นที่ใต้กราฟทั้งหมดในช่วง s1 ถึง s2 จะแสดงค่าของ $\int_{v1}^{v2} vdv$ ความสัมพันธ์ของพื้นที่ใต้กราฟกับความเร็ว v แสดงในสมการ (6)

$$\int_{v1}^{v2} vdv = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \int_{s_1}^{s_2} ads = \text{area under } a - s \text{ curve} \qquad (6)$$

5. กราฟระหว่างความเร็วกับการขจัด



รูปที่ 6 กราฟระหว่างความเร็วและการขจัด [1]

กราฟนี้เป็นกราฟความสัมพันธ์ของ v-s ดังนั้นจึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร v-s พบว่าสมการ (3) แสดงความสัมพันธ์ของ v-s ดังนี้ $vdv = ads$ สมการนี้สามารถจัดรูปได้ดังนี้

$$\frac{dv}{ds} = \frac{a}{v} = \frac{CB}{v} \qquad (7)$$

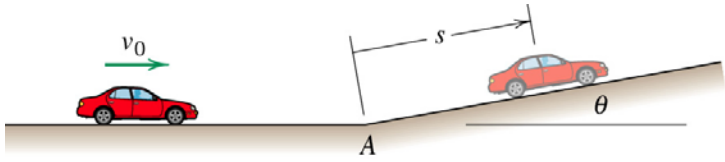
โดย $\frac{dv}{ds}$ แสดงถึงความชันของกราฟ v-s สำหรับ เส้นตรง AB เป็นเส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุด A ดังนั้นสามเหลี่ยม ABC จึงเป็นสามเหลี่ยมที่คล้ายกับสามเหลี่ยมด้านบน ซึ่งประกอบจากเส้นสัมผัสโค้ง เนื่องจากระยะ AC มีค่าเท่ากับ v ดังนั้น ระยะ CB จึงต้องมีค่าเท่ากับ a ด้วย ดังนั้นในกราฟ v-s นี้ จะหาความเร่งได้จากระยะ CB ในรูปที่ 6

หมายเหตุ การหาความเร่งด้วยวิธีนี้ หน่วยของการขจัด และความเร็ว ต้องมีความสอดคล้องกันและ หน่วยความเร่งที่ได้ก็จะสอดคล้องกับหน่วยของการขจัด และความเร็วด้วย เช่น การขจัดและความเร็วมีหน่วยเป็น m, m/s ตามลำดับ จะได้หน่วยของความเร่งเป็น m/s2

เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

2/1 The car traveling at a constant speed v_0 = 100 km/h on the level position of the road. When the 6-percent ($\tan\theta$ = 6/100) incline is encountered, the driver does not change the throttle setting and consequently the car decelerates at the constant rate $g\sin\theta$. Determine the speed of the car (a) 10 seconds after passing point A and (b) when s = 100 m. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.2/25]



วิธีทำ กำหนด $v_0 = 100\text{ km/h}$ $\theta = \arctan(\frac{6}{100})$

$$a = -g\sin\theta = -0.5875\text{ m/s}^2$$

(a) กำหนดความเร่ง และเวลาที่ต้องการ ให้หาความเร็ว
จากเงื่อนไขนี้จะทราบว่าต้องใช้สมการ $a = \frac{dv}{dt}$ ในการคำนวณ

$$[dv = adt] \qquad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t_1} adt = \int_{0}^{10} -0.5875dt$$

$$v - \frac{100\times10^3}{3600} = -0.5875(10)$$

$$v = 21.9\text{ m/s}$$ *Ans*

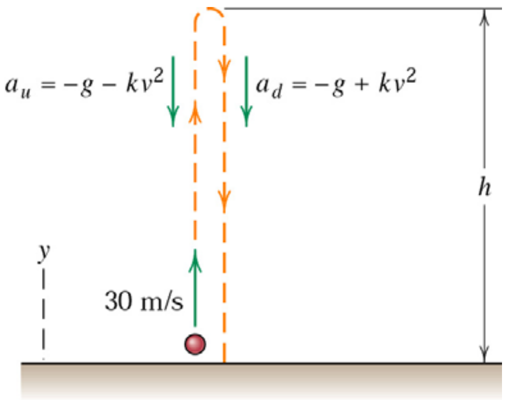
(b) กำหนดความเร่ง และระยะทางที่ต้องการ ให้หาความเร็ว
จากเงื่อนไขนี้จะทราบว่าต้องใช้สมการ $vdv = ads$ ในการคำนวณ

$$[vdv = ads] \qquad \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{s_0}^{s_1} ads = \int_{0}^{100} -0.5875ds$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - (\frac{100\times10^3}{3600})^2) = -0.5875(100)$$

$$v = 25.57\text{ m/s}$$ *Ans*

2/2 When the effect of aerodynamic drag is included, the y-acceleration of a baseball moving vertically upward is $a_u = -g - kv^2$, while the acceleration when the ball is moving downward is $a_d = -g + kv^2$, where k is a positive constant and v is the speed in meters per second. If the ball is thrown upward at 30 m/s from essentially ground level, compute its maximum height h and its speed v_f upon impact with the ground. Take k to be 0.006 m^{-1} and assume that g is constant. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.2/51]



วิธีทำ คิดช่วงที่บอลลอยขึ้นด้านบน

กำหนดความเร็วต้นของบอล 30 m/s ความเร็วที่จุดสูงสุด 0 m/s และความเร่ง ให้หาระยะทาง h

จากเงื่อนไขนี้ทำให้ทราบว่าต้องใช้สมการ $vdv = ads$

$[vdv = ads]$

$$vdv = (-g - kv^2)ds$$

$$\frac{v}{-g-kv^2}dv = ds$$

$$\int \frac{v}{-g-kv^2}dv = \int ds$$

$$\frac{-1}{2k}\ln(c\cdot(g+kv^2)) = s \qquad (1)$$

แทนค่า S = 0, v = 30: $\frac{-1}{2(0.006)}\ln(c\cdot(9.81+0.006\cdot 30^2)) = 0$

$$c = 0.0657$$

สมการ (1) กลายเป็น

$$\frac{-1}{2(0.006)}\ln(0.0657\cdot(9.81+0.006v^2)) = s$$

แทนค่าที่จุดสูงสุด v = 0, s = h

$$\frac{-1}{2(0.006)}\ln(0.0657\cdot(9.81+0.006\cdot 0^2))=h$$

$$h=36.54\ \text{m}$$ *Ans*

คิดช่วงที่บอลเคลื่อนที่ลงจนตกกระทบพื้น

ในข้อนี้ไม่สามารถจะคิดรวมตั้งแต่บอลลอยขึ้นจนตกกระทบพื้นได้ เนื่องจากความเร่งในช่วงบอลลอยขึ้น และบอลตกลงไม่เท่ากัน

กำหนดความเร็วต้นของบอล 0 m/s ทราบความเร่ง และทราบระยะทาง h ให้หาความเร็วปลายตอนบอลกระทบพื้น
จากเงื่อนไขนี้ทำให้ทราบว่าต้องใช้สมการ $vdv=ads$

$[vdv=ads]$ $$vdv=(-g+kv^2)ds$$

$$\frac{v}{-g+kv^2}dv=ds$$

$$\int\frac{v}{-g+kv^2}dv=\int ds$$

$$\frac{1}{2k}\ln(c\cdot(-g+kv^2))=s \qquad (2)$$

แทนค่า S = 36.54, v = 0: $$\frac{1}{2(0.006)}\ln(c\cdot(-9.81+0.006\cdot 0^2))=36.54$$

$$c=-0.158$$

สมการ (2) กลายเป็น

$$\frac{-1}{2(0.006)}\ln(-0.158\cdot(-9.81+0.006v^2))=s$$

หา v ตอนกระทบพื้น s = 0

$$\frac{-1}{2(0.006)}\ln(-0.158\cdot(-9.81+0.006v^2))=0$$

$$v=24.091\ \text{m/s}$$ *Ans*

แบบฝึกหัด หัวข้อ 2/1

1. A ball is thrown vertically upward with an initial speed of 25 m/s from the base *A* of a 15-m cliff. Determine the distance *h* by which the ball clears the top of the cliff and the time *t* after release for the ball to land at *B*. Also, calculate the impact velocity v_B. Neglect air resistance and the small horizontal motion of the ball. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

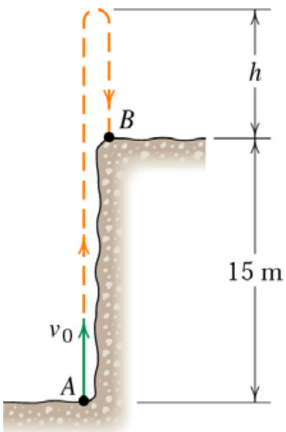
   (<u>*Ans*</u> h = 16.86 m, t = 4.40 s
   v_B = 18.19 m/s downward)

2. A motorcycle patrolman starts from rest at *A* two seconds after a car, speeding at the constant rate of 120 km/h, passes point *A*. If the patrolman accelerates at the rate of 6 m/s2 until he reaches his maximum permissible speed of 150 km/h, which he maintains, calculate the distance *s* from point *A* to the point at which he overtakes the car. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

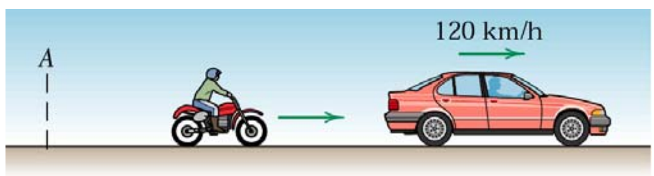
   (<u>*Ans*</u> s = 912 m)

3. A particle starts from rest at *x* = -2 m and moves along the *x*-axis with the velocity history shown. Plot the corresponding acceleration and the displacement histories for the 2 seconds. Find the time *t* when the particle crosses the origin. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

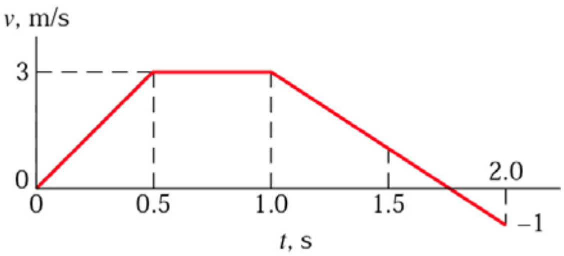
   (<u>*Ans*</u> t = 0.917 s)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2



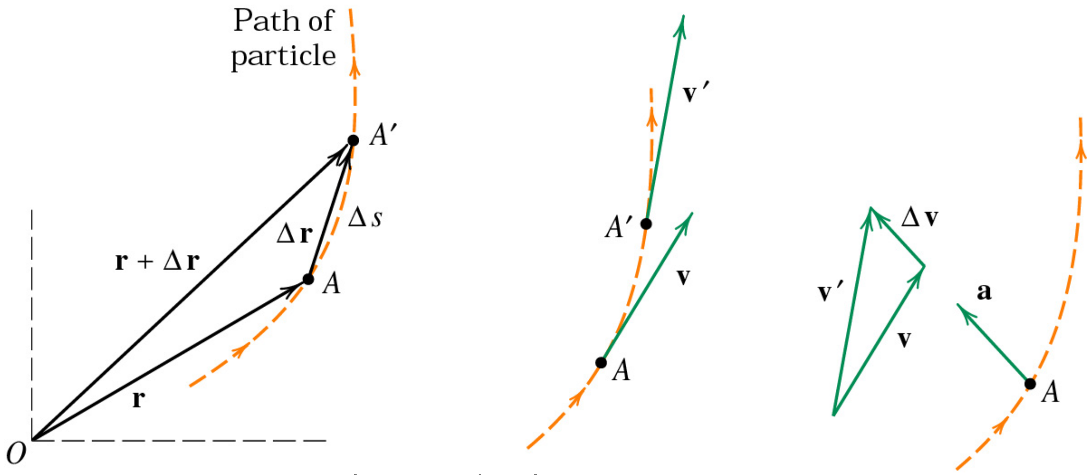
รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 3

พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 2)

2/3 การเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ

การเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ (Plane Curvilinear Motion) หมายถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุตามแนวเส้นโค้งใดๆ บนระนาบหนึ่ง ดังนั้นปัญหาการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบจึงเป็นปัญหาประเภท 2 มิติ



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ [1]

พิจารณาการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบแสดงดังรูปที่ 1 ที่เวลา t วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง A ตำแหน่งของจุด A สามารถบอกได้โดยใช้เวคเตอร์บอกตำแหน่ง $\bar{r}$ ซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดอ้างอิงใดๆ (เลือกตามความสะดวกในการพิจารณา) เมื่อเวลาเปลี่ยนไปเป็น t+Δt วัตถุนี้จะเคลื่อนที่ไปที่ตำแหน่ง A' เวคเตอร์บอกตำแหน่งจะเปลี่ยนไปเป็น $\bar{r}+\Delta\bar{r}$ การขจัดของวัตถุ (ปริมาณเวคเตอร์) ได้แก่การเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์บอกตำแหน่ง มีค่าเท่ากับ $\Delta\bar{r}$ ส่วนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ (ปริมาณสเกลาร์) ได้แก่ระยะทาง Δs ตามแนวเส้นทางการเคลื่อนที่ (เส้นสีส้ม)

ความเร็ว

ความเร็ว คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งเทียบกับเวลา ความเร็วเป็นปริมาณเวคเตอร์หาได้ดังสมการ (1)

$$\vec{v} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \qquad (1)$$

เนื่องจากเวลา t เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้นความเร็วจึงมีทิศทางเดียวกับการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ตำแหน่ง $\Delta\bar{r}$ เมื่อคิดช่วงเวลาสั้นๆ ทิศทางของ $\Delta\bar{r}$ จะเข้าใกล้กับ

เส้นสัมผัสของเส้นโค้งแนวทางการเคลื่อนที่ ดังนั้นความเร็วขณะใดๆ จะมีทิศทางเป็นทิศเดียวกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งแนวทางการเคลื่อนที่

อัตราเร็ว คือขนาดของความเร็ว อัตราเร็วเป็นปริมาณสเกลาร์ สามารถหาได้

$$v = |\bar{v}| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \tag{2}$$

ความเร่ง

ความเร่ง คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลา ความเร่งเป็นปริมาณเวคเตอร์หาได้ดังสมการ (3)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} \tag{3}$$

ถึงแม้ว่าทิศทางของความเร็วจะสัมผัสกับเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ แต่ทิศทางของความเร่งไม่มีความสัมพันธ์กับเส้นแนวทางการเคลื่อนที่เลย

การหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์

ในการศึกษาการเคลื่อนที่แนวโค้ง จำเป็นที่จะต้องใช้วิธีการเวคเตอร์ในการพิจารณา ในที่นี้จึงทบทวนการหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์สักเล็กน้อย โดยสมการการหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์ในกรณีต่างๆ แสดงในสมการที่ (4)-(7)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{P}_x\hat{i} + \dot{P}_y\hat{j} + \dot{P}_z\hat{k} \tag{4}$$

$$\frac{d\vec{P}u}{dt} = \vec{P}\dot{u} + \dot{\vec{P}}u \tag{5}$$

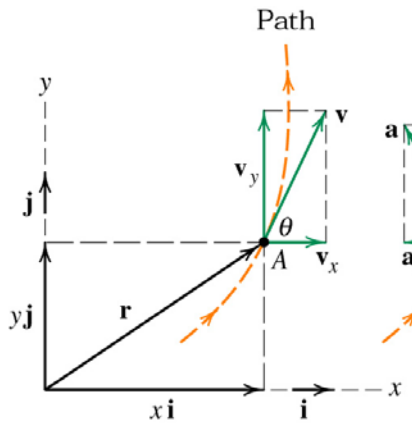
$$\frac{d(\vec{P}\cdot\vec{Q})}{dt} = \vec{P}\cdot\dot{\vec{Q}} + \dot{\vec{P}}\cdot\vec{Q} \tag{6}$$

$$\frac{d(\vec{P}\times\vec{Q})}{dt} = \vec{P}\times\dot{\vec{Q}} + \dot{\vec{P}}\times\vec{Q} \tag{7}$$

ระบบพิกัดในการพิจารณาการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ

ในการพิจารณาการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบนั้น สามารถพิจารณาได้ในระบบพิกัดต่างๆ ระบบพิกัดที่ใช้กันโดยทั่วไปมี 3 แบบ ได้แก่ 1) ระบบพิกัดแบบ x-y, 2) ระบบพิกัดแบบ n-t, และ 3) ระบบพิกัดแบบ r-θ ระบบพิกัดแต่ละแบบจะเหมาะกับรูปแบบปัญหาแตกต่างกันไป โดยจะอธิบายต่อไปดังนี้

2/4 ระบบพิกัดแบบ x-y



รูปที่ 2 การใช้ระบบพิกัดแบบ x-y กับการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ [1]

ระบบพิกัดแบบ x-y เหมาะกับปัญหาที่ตัวแปร x และ y สามารถแยกคิดได้โดยอิสระต่อกัน เช่นปัญหาการโยนลูกบอลในอากาศ ซึ่งความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกจะส่งผลในแนวดิ่ง (แนว y) เท่านั้น แต่ไม่ส่งผลกับการเคลื่อนที่ไปด้านหน้าของลูกบอล (แนว x)

รูปที่ 2 แสดงตัวอย่างการใช้ระบบพิกัด x-y กับการเคลื่อนที่แนวโค้งในระนาบ เมื่อวัตถุอยู่ที่จุด A วัตถุมีเวคเตอร์บอกตำแหน่งเป็น เวคเตอร์ $\vec{r}$ และมีความเร็วการเคลื่อนที่ $\vec{v}$ โดยมีทิศทางสัมผัสกับเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ และทำมุม θ กับแนวระดับ ความเร็วสามารถแตกออกได้เป็นส่วนประกอบย่อยๆ ในแนว x และ y ดังแสดงในรูป สำหรับความเร่งซึ่งทิศทางไม่สัมพันธ์กับเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ก็สามารถแยกออกได้เป็นส่วนประกอบย่อยในแนว x-y เช่นกัน การวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนที่โดยใช้พิกัด x-y จะใช้สมการดังต่อไปนี้

ตำแหน่งวัตถุ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ (8)

ความเร็ว $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ (9)

ความเร่ง $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ (10)

จากสมการที่ (9) และ (10) จะสามารถหาความเร็ว และความเร่งในแนวแกน x และ y ได้ ถ้าต้องการหาขนาดความเร็ว และความเร่งรวม และหาทิศทางของการเคลื่อนที่ (ทิศทางของความเร็ว) จะสามารถหาได้จากสมการ (11) ถึง (13)

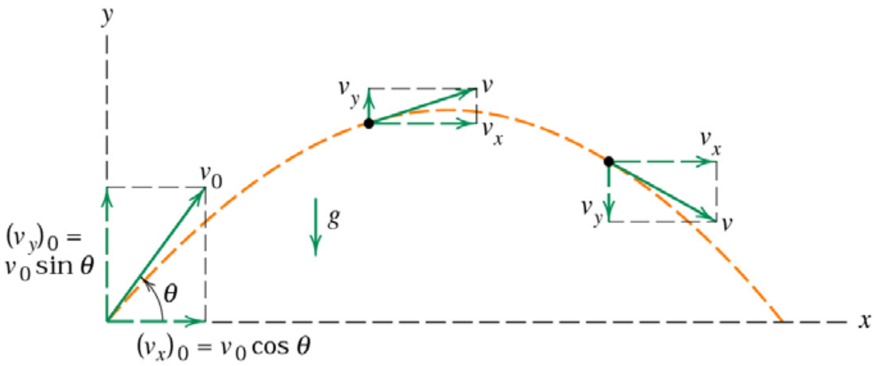
ขนาดความเร็ว $v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$ (11)

ขนาดความเร่ง $a^2 = {a_x}^2 + {a_y}^2$ (12)

ทิศทางการเคลื่อนที่ $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$ (13)

การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์

การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ เป็นการเคลื่อนที่แบบเส้นโค้งในระนาบกรณีหนึ่งที่เหมาะกับการพิจารณาปัญหาด้วยระบบพิกัด x-y การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์แสดงดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ [1]

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ หากไม่คิดถึงผลของแรงต้านอากาศ และคิดว่าการเปลี่ยนแปลงความสูงมีค่าน้อยจนไม่มีผลต่อค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g จากการพิจารณาเช่นนี้จะได้ว่า ความเร่งในแนวดิ่งมีค่าคงที่เท่ากับ g ส่วนในแนวระดับไม่มีแรงกระทำ จึงไม่เกิดความเร่งขึ้น และความเร็วในแนวระดับจะมีค่าคงที่ ความเร่งในแต่ละทิศทางเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$a_y = -g \qquad \text{และ} \qquad a_x = 0 \tag{14}$$

ในการตั้งแกนพิกัด โดยทั่วไปจะตั้งให้มีทิศทางบวกเป็นไปตามทิศทางการเคลื่อนที่ (ทิศความเร็ว) ในที่นี้ความเร่งมีค่าติดลบเนื่องจาก ความเร่งมีทิศตรงข้ามกับ แกนที่ตั้งไว้ และมีทิศทางตรงข้ามกับทิศความเร็วต้น จึงทำให้วัตถุเคลื่อนที่ช้าลงในช่วงแรก

เนื่องจากความเร่งมีค่าคงที่ดังนั้นจะสามารถหาค่าต่างๆ ได้จากสมการต่อไปนี้

แกน x $$v_x = (v_x)_0 \qquad \text{และ} \qquad x = x_0 + (v_x)_0 t \tag{15}$$

แกน y $$v_y = (v_y)_0 - gt \tag{16}$$

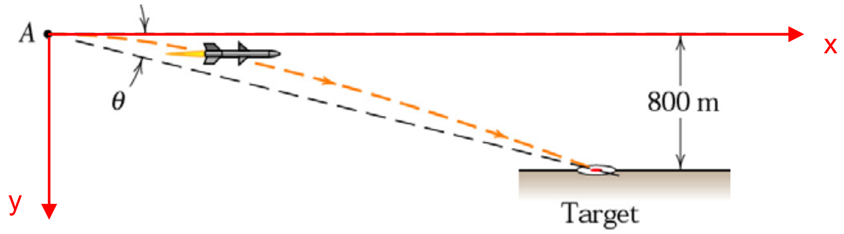
$$y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{17}$$

$$v_y^{\,2} = (v_y)_0^{\,2} - 2g(y - y_0) \tag{18}$$

การคำนวณจะสามารถคิดแยกแนวแกน x และแนวแกน y ได้โดยจุดร่วมของการคิดทั้งสองแกน ได้แก่ที่เวลาเดียวกัน ตำแหน่งบนแกน x และแกน y ต้องมีความสัมพันธ์กัน

หมายเหตุ การคำนวณโดยใช้สมการที่ (15) – (17) จะใช้ได้เมื่อความเร่งมีค่าคงที่เท่านั้น หากความเร่งไม่คงที่ เช่นกรณีการคิดแรงต้านอากาศ จะต้องพิจารณาเริ่มจากสมการการเคลื่อนที่พื้นฐาน และอินทิเกรตเพื่อหาปริมาณต่างๆ โดยตรง

2/3 A rocket is released at point *A* from a jet aircraft flying horizontally at 1000 km/h at an altitude of 800 m. If the rocket thrust remains horizontal and gives the rocket a horizontal acceleration of 0.5*g*, determine the angle θ from the horizontal to the line of sight to the target. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.2/77]



วิธีทำ จากโจทย์จะทราบค่าต่างๆ ดังนี้

$$v_{x0} = v_0 = 1000 \times \frac{10^3}{3600} = \frac{1000}{3.6} \text{ m/s}$$

$$v_{y0} = 0 \text{ m/s}$$

$$a_x = 0.5g \text{ m/s}^2 \qquad a_y = g \text{ m/s}^2$$

ตั้งแกน x และแกน y ดังแสดงในรูป

พิจารณาในแนวแกน x

$$\left[\frac{dv_x}{dt} = a_x\right] \qquad \frac{dv_x}{dt} = 0.5g$$

$$v_x = 0.5gt + C_1$$

$$t = 0, \quad v_x = \frac{1000}{3.6} \text{ m/s} \qquad \frac{1000}{3.6} = 0 + C_1 \longrightarrow C_1 = \frac{1000}{3.6}$$

$$v_x = 0.5gt + \frac{1000}{3.6}$$

$$\left[\frac{ds_x}{dt} = v_x\right] \qquad \frac{ds_x}{dt} = 0.5gt + \frac{1000}{3.6}$$

$$s_x = \frac{0.5g}{2}t^2 + \frac{1000}{3.6}t + C_2$$

$$t = 0, \quad s_x = 0 \text{ m} \qquad 0 = 0 + 0 + C_2 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$s_x = \frac{0.5g}{2}t^2 + \frac{1000}{3.6}t$$

พิจารณาในแนวแกน y

$$\left[\frac{dv_y}{dt} = a_y\right] \qquad \frac{dv_y}{dt} = g$$

$$v_x = gt + C_3$$

$$t = 0, \quad v_y = 0\text{ m/s} \qquad 0 = 0 + C_3 \longrightarrow C_3 = 0$$

$$v_y = 5gt$$

$$\left[\frac{ds_y}{dt} = v_y\right] \qquad \frac{ds_y}{dt} = gt$$

$$s_y = \frac{g}{2}t^2 + C_4$$

$$t = 0, \quad s_y = 0\text{ m} \qquad 0 = 0 + C_4 \longrightarrow C_4 = 0$$

$$s_y = \frac{g}{2}t^2$$

เมื่อจรวดตกกระทบพื้น $s_y = 800\text{ m}$

$$800 = \frac{g}{2}t^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{800\times 2}{9.81}} = 12.771\text{ s}$$

แทนใน s_x ได้ $s_x = \frac{0.5g}{2}(12.771)^2 + \frac{1000}{3.6}(12.771) = 3947.5\text{ m}$

$$\theta = \arctan\left(\frac{s_y}{s_x}\right) = \arctan\left(\frac{800}{3947.5}\right) = 11.46^\circ$$

Ans

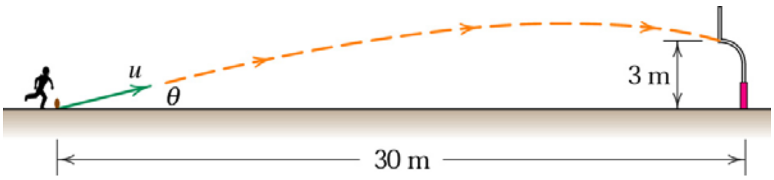
เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

แบบฝึกหัด หัวข้อ 2/4

1. A football player attempts a 30-m field goal. If he is able to impart a velocity u of 30 m/s to the ball, compute the minimum angle θ for which the ball will clear the crossbar of the goal. (Hint: Let m = tan θ.) [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

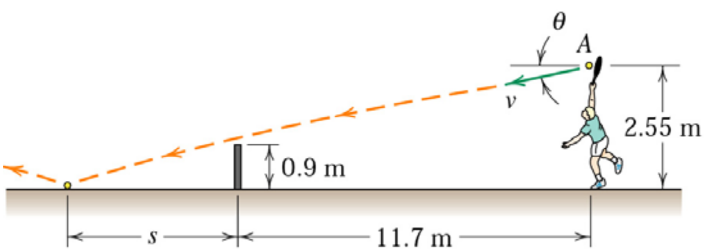
(*Ans* θ = 15.43°)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1

2. If the tennis player serves the ball horizontally (θ = 0), calculate its velocity v if the center of the ball clears the 0.9-m net by 150 mm. Also find the distance s from the net to the point where the ball hits the court surface. Neglect air resistance and the effect of ball spin. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

(*Ans* v = 21.2 m/s, s = 3.55 m)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2

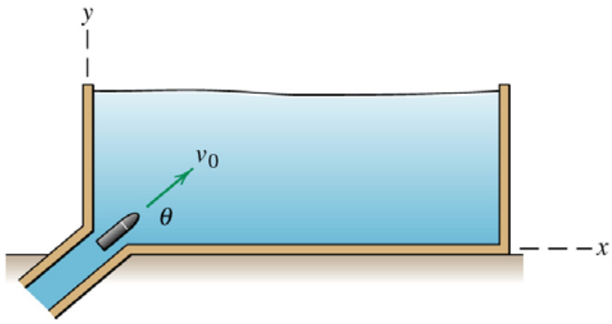
3. A projectile is ejected into an experimental fluid at time t = 0. The initial speed is v_0 and the angle to the horizontal is θ. The drag on the projectile results in an acceleration term $\mathbf{a}_D = -k\mathbf{v}$, where k is a constant and $\mathbf{v}$ is the velocity of the projectile. Determine the x- and y-components of both the velocity and displacement

as functions of time. What is the terminal velocity? Include the effects of gravitational acceleration. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

(<u>*Ans*</u> $v_x = (v_0 \cos\theta)e^{-kt}, x = \dfrac{v_0 \cos\theta}{k}(1-e^{-kt})$

$v_y = (v_0 \sin\theta + \dfrac{g}{k})e^{-kt} - \dfrac{g}{k}$

$y = \dfrac{1}{k}(v_0 \sin\theta + \dfrac{g}{k})(1-e^{-kt}) - \dfrac{g}{k}t,\ v_x \to 0, v_y \to -\dfrac{g}{k}$)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 3

พลศาสตร์ (Dynamics)

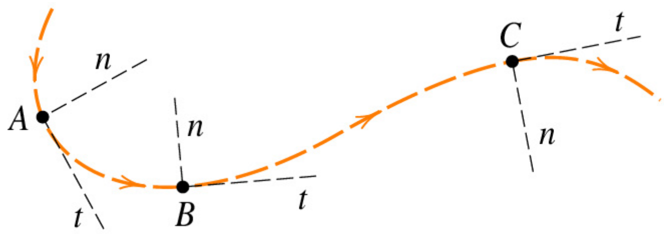
บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 3)

2/5 ระบบพิกัดแบบ n-t

พิกัดแบบ n-t (Normal and Tangential coordinate) หรือพิกัดแบบตั้งฉากแนวการเคลื่อนที่และสัมผัสแนวการเคลื่อนที่ สามารถตั้งได้ตามตัวอย่างแสดงในรูปที่ 1 โดยมีหลักการการตั้งแกนดังนี้

1. แกน t เป็นแกนสัมผัสแนวการเคลื่อนที่ และมีทิศทางบวกชี้ไปตามแนวการเคลื่อนที่
2. แกน n เป็นแกนตั้งฉากการเคลื่อนที่ และมีทิศทางบวกชี้เข้าไปหาจุดศูนย์กลางความโค้งของเส้นแนวการเคลื่อนที่
3. แกนพิกัด n-t จะเปลี่ยนตำแหน่งไปตามวัตถุที่เคลื่อนที่

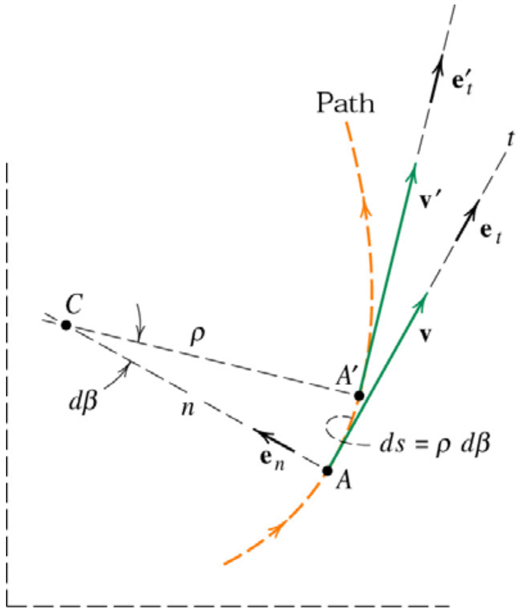
จากตัวอย่างแสดงในรูปที่ 1 จะพบว่าที่จุด A, B และ C จะมีแกนพิกัด n-t แตกต่างกัน อย่างไรก็ตามหลักเกณฑ์การตั้งแกนพิกัดจะเป็นไปตามที่กล่าวไว้ข้างต้น



รูปที่ 1 การตั้งพิกัดแบบ n-t [1]

การเคลื่อนที่บางกรณีไม่สะดวกที่จะบอกพิกัดโดยคิดเทียบกับจุดอ้างอิงแบบพิกัด x-y แต่จะเหมาะสมกว่าถ้าใช้พิกัดแบบ n-t เช่น การเคลื่อนที่ของรถยนต์บนถนนโค้ง ในกรณีเช่นนี้ถ้าบอกความเร็วเป็นพิกัด x-y จะมีความยุ่งยาก เนื่องจากความเร็วในแนว x และ y จะเป็นความเร็วเพียงส่วนหนึ่งของรถยนต์เท่านั้น ไม่ใช่ขนาดความเร็วจริงของรถยนต์ตามแนวทางการเคลื่อนที่ จำเป็นที่จะต้องคำนวณรวมความเร็วในแนว x และ y ก่อน จึงจะได้ความเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์ อย่างไรก็ตามโดยทั่วไปอัตราเร็วของรถสามารถวัดได้จากเครื่องวัดอัตราเร็วที่ติดตั้งในรถ ส่วนทิศทางของความเร็วเป็นทิศทางการเคลื่อนที่ของรถยนต์อยู่แล้ว ในกรณีนี้การบอกพิกัดแบบ n-t จะเหมาะสมกว่า

ความเร็วและความเร่งในระบบพิกัดแบบ n-t



รูปที่ 2 ความเร็วในพิกัดแบบ n-t [1]

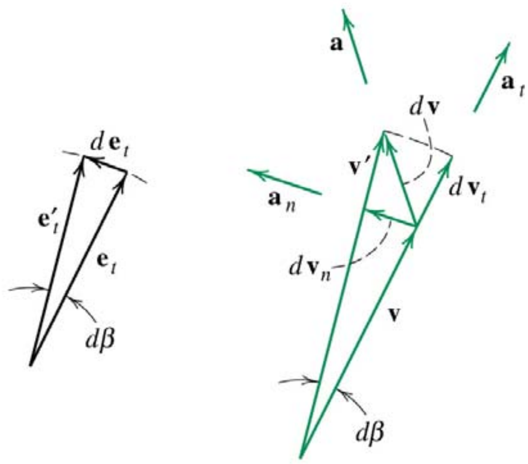
พิจารณารูปที่ 2 ซึ่งแสดงถึงการเคลื่อนที่และความเร็วของวัตถุ ในระบบพิกัด n-t เมื่อวัตถุอยู่ที่จุด A จะตั้งแกนพิกัดได้ดังแสดงด้วยแกน n และแกน t ในรูปที่ 2 โดยจุด C แสดงจุดศูนย์กลางความโค้งของเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ในขณะนั้น เวคเตอร์ $\hat{e}_n$ และ $\hat{e}_t$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง n และ t ตามลำดับ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปเล็กน้อยจนถึงจุด A’ แกนพิกัดจะเปลี่ยนไปเล็กน้อยดังแสดงในรูป เนื่องจากพิจารณาระยะการเคลื่อนที่น้อยๆ จุดศูนย์กลางความโค้งสามารถพิจารณาว่าไม่เปลี่ยนตำแหน่งได้ และรัศมีความโค้งของเส้นแนวทางการเคลื่อนที่มีค่า ρ เท่าเดิม มุมที่จุดศูนย์กลางความโค้งที่เปลี่ยนไปมีค่าเท่ากับ $d\beta$ ดังนั้นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ได้แก่ $ds = \rho d\beta$ อัตราเร็วในการเคลื่อนที่หาได้จาก $\dfrac{ds}{dt} = \rho\dfrac{d\beta}{dt}$ เนื่องจากความเร็วเป็นปริมาณเวคเตอร์ ดังนั้นจึงต้องแสดงทิศทางของความเร็วด้วย โดยความเร็วจะมีทิศทางตามแนวเส้นสัมผัส ได้แก่ แนวเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ นั่นเอง ดังนั้น ความเร็ว $\vec{v}$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\vec{v} = v\hat{e}_t = \rho\dot{\beta}\hat{e}_t \tag{1}$$

ความเร่งในระบบพิกัดแบบ n-t สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของความเร็วในสมการ (1) เทียบกับเวลา ดังนี้

$$\vec{a} = \frac{d(v\hat{e}_t)}{dt} = v\dot{\hat{e}}_t + \dot{v}\hat{e}_t \tag{2}$$

จากสมการ (2) จะเห็นว่าต้องทราบค่าอนุพันธ์ของเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ เทียบกับเวลาก่อน จึงจะหาความเร่งได้ พิจารณาการหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ ดังแสดงในรูปที่ 3 ได้ดังนี้



รูปที่ 3 การหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ [1]

รูปที่ 3 ด้านซ้ายมือวาดโดยดึงเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ และ $\hat{e}'_t$ ในรูปที่ 2 มาเขียนต่อกัน จะพบว่าการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_t$ แสดงโดยเวคเตอร์ $d\hat{e}_t$ และมีทิศทางเป็นทิศเดียวกับ $\hat{e}_n$ ขนาดของเวคเตอร์ $d\hat{e}_t$ หาได้จากรูปที่ 3 ทางด้านซ้ายมือเช่นกัน โดย $|d\hat{e}_t| = |\hat{e}_t| d\beta = d\beta$ จากความสัมพันธ์นี้จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$d\hat{e}_t = (d\beta)\hat{e}_n$$

และหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาได้ดังนี้

$$\dot{e}_t = \dot{\beta}\hat{e}_n \qquad (3)$$

แทนความสัมพันธ์ในสมการ (3) ลงในสมการ (2) จะได้

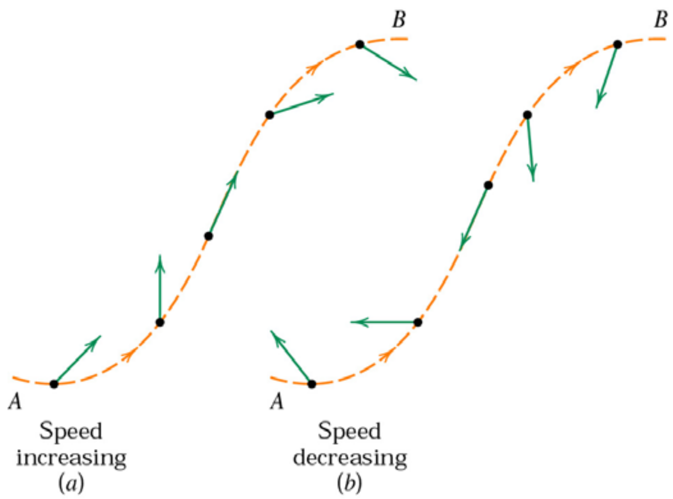
$$\bar{a} = \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n + \dot{v}\hat{e}_t \qquad (4)$$

โดย
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta}$$
$$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$$
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

รูปที่ 3 ทางด้านขวามือแสดงการเปลี่ยนแปลงของความเร็วจากความเร็ว $\bar{v}$ มาเป็น $\bar{v}'$ ซึ่งมีทิศทางต่างกันโดยทำมุมกัน $d\beta$ ทิศทางของความเร่ง $\bar{a}$ จะมีทิศทางเดียวกับทิศของ การเปลี่ยนแปลงความเร็ว $d\bar{v}$ ดังแสดงในรูป การเปลี่ยนแปลงความเร็ว $d\bar{v}$ นี้สามารถแตกออกเป็น $d\bar{v}_t$ ซึ่งเป็นส่วนประกอบในทิศทางการเคลื่อนที่ (แนว t) และ $d\bar{v}_n$ ซึ่งเป็นส่วนประกอบในทิศตั้งฉากการเคลื่อนที่ (แนว n) เมื่อพิจารณาช่วงเวลาเล็กๆ มุม $d\beta$ จะมีขนาดเล็กมาก การเปลี่ยนแปลง $d\bar{v}_t$ จึงเป็นการเปลี่ยนแปลงขนาดของเวคเตอร์ความเร็ว และการเปลี่ยนแปลง $d\bar{v}_n$ จึงเป็นการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากทิศทางของความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าความเร่งในแนวสัมผัส $\bar{a}_t$ จึงเป็นผลเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงขนาด

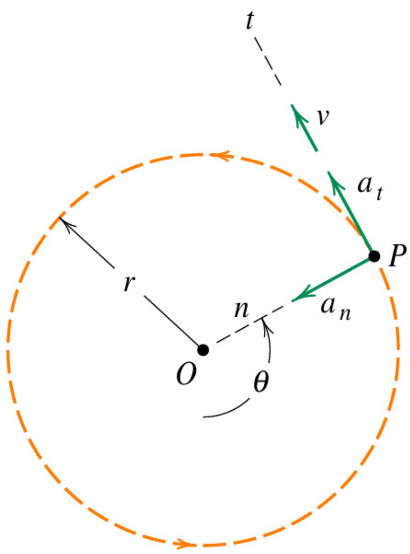
ของความเร็ว ส่วนความเร่งในแนวตั้งฉาก $\bar{a}_n$ จึงเป็นผลเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของทิศทางของความเร็ว

เมื่อพิจารณาถึงกรณีการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงซึ่งไม่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางการเคลื่อนที่ จึงมีเฉพาะความเร่งในแนว t เท่านั้น และมีค่าเท่ากับ $\dot{v}$ เราอาจจะพิจารณาหาความเร่งจากสมการที่ (4) ได้เช่นกัน เนื่องจากการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีรัศมีความโค้งการเคลื่อนที่เป็นอนันต์ (∞) ดังนั้นพจน์ $\frac{v^2}{\rho}$ ในสมการที่ (4) จึงมีค่าเป็น 0 นั่นคือไม่มีส่วนประกอบในแนว n นั่นเอง



รูปที่ 4 ทิศทางความความเร่ง [1]

การใช้พิกัดแบบ n-t จะทำให้ทราบทิศทางของความเร่งอย่างหยาบๆ ได้โดยง่าย พิจารณาการเคลื่อนที่ในรูปที่ 4(a) ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่โดยมีความเร็วเพิ่มขึ้น การเพิ่มความเร็วแสดงให้เห็นว่า ทิศทางของความเร่งในแนว t ต้องมีทิศทางตามทิศทางการเคลื่อนที่ ส่วนความเร่งในแนว n จะชี้เข้าสู่จุดศูนย์กลางของเส้นโค้งการเคลื่อนที่เสมอ ดังแสดงในรูป เมื่อวัตถุเคลื่อนที่และมีความเร็วลดลง ก็สามารถพิจารณาได้ทำนองเดียวกัน โดยทิศทางของความเร่งแสดงดังรูปที่ 4(b)



รูปที่ 5 การเคลื่อนที่แบบวงกลม [1]

การเคลื่อนที่แบบวงกลม

การเคลื่อนที่แบบวงกลม สามารถพิจารณาโดยใช้พิกัดแบบ n-t ได้ดังนี้

1. รัศมีความโค้งมีค่าคงที่ $\rho = r$
2. มุมรอบจุดศูนย์กลางความโค้ง $\beta = \theta$

จากเงื่อนไขทั้ง 2 ข้อ สามารถหาความเร็ว ความเร่งได้ดังสมการ

$$v = r\dot{\theta} \tag{5}$$

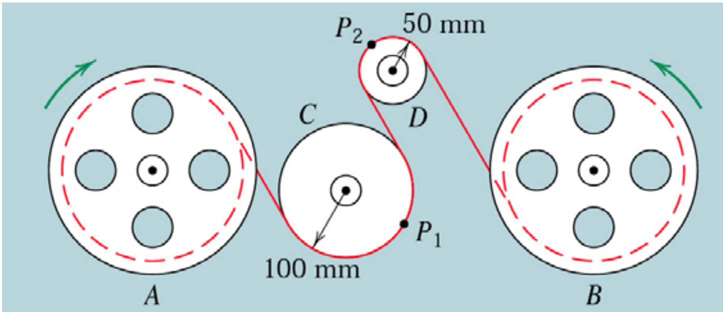
$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta} \tag{6}$$

$$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta} \tag{7}$$

เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

2/4 Magnetic tape is being transferred from reel *A* to reel *B* and passes around idler pulleys *C* and *D*. At a certain instant, point P_1 on the tape is in contact with pulley *C* and point P_2 is in contact with pulley *D*. If the normal component of acceleration of P_1 is 40 m/s^2 and the tangential component of acceleration of P_2 is 30 m/s^2 at this instant, compute the corresponding speed *v* of the tape, the magnitude of the total acceleration of P_1, and the magnitude of the total acceleration of P_2. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.2/113]



วิธีทำ จากโจทย์จะทราบค่าต่างๆ ดังนี้

จุด P_1 $a_n = 40\ \text{m/s}^2$

จุด P_2 $a_t = 30\ \text{m/s}^2$

ต้องการหา v, a_1, a_2

พิจารณาที่จุด P_1

$$\left[a_n = \frac{v^2}{\rho}\right] \qquad 40 = \frac{v^2}{0.1} \longrightarrow v = 2\ \text{m/s}$$ *Ans*

เทปทั้งเส้นจะต้องมี v และ a_t เท่ากัน ถ้าไม่เท่ากันจะทำให้เทปขาด หรือเทปย่น ทำงานไม่ได้ ด้วยเหตุผลนี้จะได้

จุด P_1 $a_t = 30\ \text{m/s}^2$

จุด P_2 $v = 2\ \text{m/s}$

เพราะฉะนั้น $a_1 = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\ \text{m/s}^2$ *Ans*

พิจารณาที่จุด P_2

$$\left[a_n = \frac{v^2}{\rho}\right] \qquad a_n = \frac{2^2}{0.05} = 80\ \text{m/s}^2$$

$$a_2 = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{80^2 + 30^2} = 85.44\ \text{m/s}^2$$ *Ans*

2/5 A particle moving in the *x-y* plane has a position vector given by $\vec{r} = \frac{3}{2}t^2\hat{i} + \frac{2}{3}t^3\hat{j}$, where $\vec{r}$ is in meters and *t* is in seconds. Calculate the radius of curvature ρ of the part for the position of the particle when $t = 2$ s. Sketch the velocity *v* and the curvature of the path for this particular instant.

[Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.2/119]

วิธีทำ จากโจทย์ต้องการหาค่า ρ ที่เวลา $t = 2$ s

เนื่องจากต้องการหาค่า ρ แต่ ρ เกี่ยวข้องกับ a_n จึงต้องหาค่า a_n ให้ได้ก่อน

$$\vec{r} = \frac{3}{2}t^2\hat{i} + \frac{2}{3}t^3\hat{j} \longrightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}} = 3t\hat{i} + 2t^2\hat{j}$$

$$\longrightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = 3\hat{i} + 4t\hat{j}$$

ที่เวลา $t = 2$ s

$$\vec{v} = 6\hat{i} + 8\hat{j} \longrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$$

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 8\hat{j} \longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \text{ m/s}^2$$

ความเร่งที่ได้นี้เป็นความเร่งรวม เมื่อต้องการจะหาส่วนประกอบในแนว n หรือ ในแนว t จะต้องแตกความเร่งเข้าแกน n-t ก่อน อย่างไรก็ตามในข้อนี้จะไม่ทราบทิศทางของแกน n-t โดยตรง แต่จะสามารถหาได้โดยใช้หลักที่ว่า ความเร็วมีทิศทางเดียวกับทิศทางการเคลื่อนที่

เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางการเคลื่อนที่ (ทิศทางความเร็ว) หาได้จาก $\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

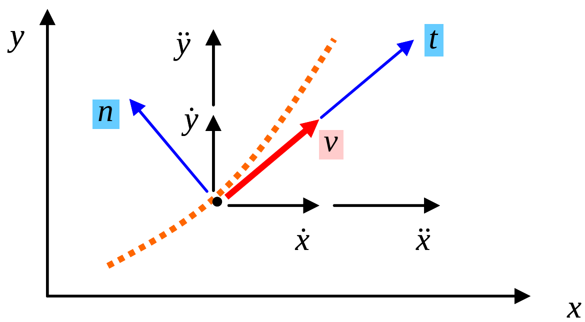
ขนาดความเร่งในแนว t หาได้จาก

$$a_t = \vec{a}\cdot\hat{e}_t = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(3\hat{i} + 8\hat{j}\right)\cdot\frac{\left(6\hat{i} + 8\hat{j}\right)}{10} = \frac{(3)(6) + (8)(8)}{10} = 8.2 \text{ m/s}^2$$

ขนาดความเร่งในแนว n หาได้จาก $a_n = \sqrt{a^2 + a_t^2} = \sqrt{73 - 8.2^2} = 2.4 \text{ m/s}^2$

$$\left[a_n = \frac{v^2}{\rho}\right] \qquad 2.4 = \frac{10^2}{\rho} \longrightarrow \rho = 41.67 \text{ m}$$

<u>*Ans*</u>



แบบฝึกหัด หัวข้อ 2/5

1. A baseball player releases a ball with the initial conditions shown in the figure. Determine the radius of curvature *r* of the path and the time rate of change of the speed at times *t* = 1 s and *t* = 2.5 s, where *t* = 0 is the time of release from the player's hand. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

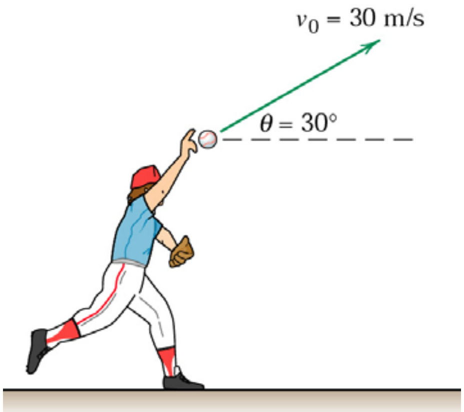
   (<u>*Ans*</u> t = 1 s, a_t = -1.922 m/s^2, ρ = 73 m
   t = 2.5 s, a_t = 3.38 m/s^2, ρ = 83.1 m)

2. At the instant represented, *A* has a velocity to the right of 0.2 m/s which is decreasing at the rate of 0.75 m/s each second. At the same time, *B* is moving down with a velocity of 0.15 m/s which is decreasing at the rate of 0.5 m/s each second. For this instant determine the radius of curvature *r* of the path followed by *P*. Is it possible to determine also the time rate of change of *r* ? [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

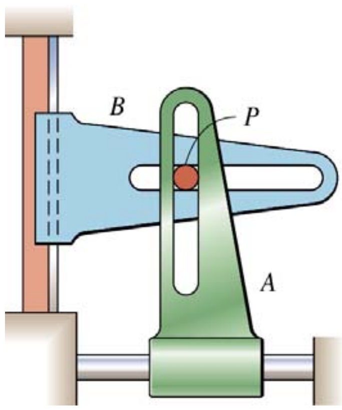
   (<u>*Ans*</u> ρ = 1.25 m)

3. When the skier reaches point A along the parabolic path, he has a speed of 6 m/s which is increasing at 2 m/s^2. Determine the direction of his velocity and the direction and magnitude of his acceleration at this instant. Neglect the size of the skier in the calculation. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

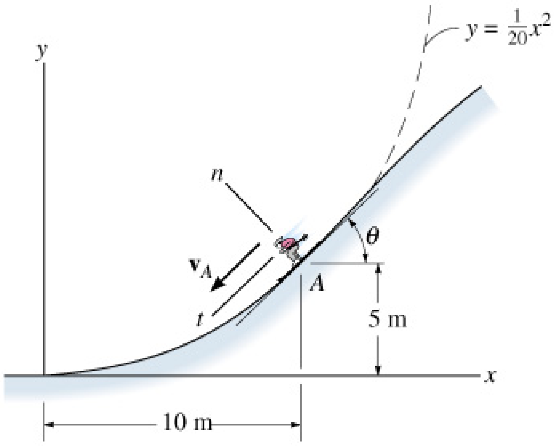
   (<u>*Ans*</u> θ = 45°
   a = 2.37 m/s^2)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 3

พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 4)

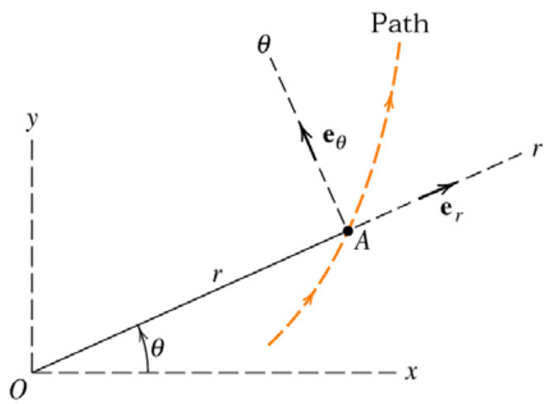
2/6 ระบบพิกัดแบบ r-θ

ในส่วนก่อนหน้ากล่าวถึงระบบพิกัดแบบต่างๆ ซึ่งเหมาะสมกับปัญหาในลักษณะแตกต่างกันไปโดย ระบบพิกัดฉากเหมาะกับปัญหาที่ผู้สังเกตอยู่นิ่ง และสามารถพิจารณาลักษณะการเคลื่อนที่เป็นระบบพิกัดฉากได้ง่าย เช่น ปัญหาการเคลื่อนที่วิถีโค้งในระนาบหรือโปรเจคไตล์ สำหรับพิกัดแบบ n-t จะเหมาะในกรณีที่ผู้สังเกตหรืออุปกรณ์ตรวจวัดการเคลื่อนที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับวัตถุ เช่น การเคลื่อนที่ของรถยนต์บนถนนโค้ง เป็นต้น

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงระบบพิกัดแบบเชิงขั้ว หรือ ระบบพิกัด r-θ ซึ่งจะเหมาะกับปัญหาที่ผู้สังเกตอยู่นิ่ง และสังเกตการณ์เคลื่อนที่ของวัตถุโดยวัดระยะทาง และมุมที่เปลี่ยนไปได้ง่าย ตัวอย่างของปัญหานี้ เช่น การทำงานของเรดาร์ติดตามการเคลื่อนที่ ซึ่งจะบอกข้อมูลเป็นระยะทางของวัตถุที่ห่างจากตัวเรดาร์ และมุมซึ่งแสดงตำแหน่งของวัตถุเทียบกับแกนอ้างอิง

พิกัดแบบ r-θ (Polar coordinate) สามารถตั้งเพื่อบอกตำแหน่งของวัตถุซึ่งอยู่ที่จุด A ในขณะนั้นได้ตามตัวอย่างแสดงในรูปที่ 1 โดยมีหลักการการตั้งแกนดังนี้

1. ตำแหน่งจุด A วัดเทียบกับจุดอ้างอิงอยู่นิ่ง O โดยจุด A อยู่ห่างจากจุด O เท่ากับ r และ เส้นตรงที่ลากเชื่อมจุด O กับ A ทำมุม θ กับแนวระดับ
2. แกน r-θ มีจุดกำเนิดอยู่ที่จุด A ซึ่งเป็นตำแหน่งของวัตถุที่สนใจในขณะนั้น
3. แกน r ตั้งอยู่ในแนวเดียวกับเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุด O กับจุด A และมีทิศทางบวกชี้ออกจากจุดอ้างอิง O (ทิศทางที่ทำให้ระยะ r มีค่าเพิ่มมากขึ้น) เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน r คือเวคเตอร์ $\hat{e}_r$
4. แกน θ อยู่ตั้งฉากกับแกน r และมีทิศทางบวกชี้ไปในทิศทางที่ทำให้มุม θ เพิ่มมากขึ้น เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของแกน θ คือเวคเตอร์ $\hat{e}_\theta$



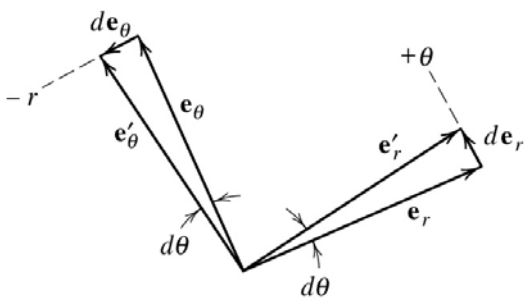
รูปที่ 1 พิกัดแบบ r-θ [1]

จากหลักเกณฑ์การตั้งแกนพิกัด และรูปที่ 1 จะได้ว่าตำแหน่งจุด A สามารถบอกได้ในรูปของเวคเตอร์บอกตำแหน่งดังนี้

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \qquad (1)$$

เมื่อได้เวคเตอร์บอกตำแหน่งแล้ว การหาความเร็วและความเร่งในระบบพิกัด r-θ ก็สามารถทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการที่ (1) เทียบกับเวลา เช่นเดียวกับระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดแบบ n-t อย่างไรก็ตามพบว่าการหาอนุพันธ์ของสมการที่ (1) จำเป็นต้องทราบค่าอนุพันธ์ของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ เทียบกับเวลาเสียก่อน และในการหาความเร่งยังต้องทราบค่าอนุพันธ์ของ $\hat{e}_\theta$ เทียบกับเวลาด้วย ดังนั้นในที่นี้จะอธิบายถึงการหาอนุพันธ์ของ $\hat{e}_r$ และ $\hat{e}_\theta$ เทียบกับเวลาก่อนดังนี้

การหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในพิกัด r-θ



รูปที่ 2 การหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในพิกัด r-θ [1]

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ และ $\hat{e}_\theta$ แสดงดังรูปที่ 2 เมื่อวัตถุเคลื่อนที่จากจุด A ไปเป็นจุด A' เวคเตอร์ $\hat{e}_r$ และเวคเตอร์ $\hat{e}_\theta$ จะเปลี่ยนไปเป็นเวคเตอร์ $\hat{e}'_r$ และเวคเตอร์ $\hat{e}'_\theta$ ตามลำดับ โดยเวคเตอร์ก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลงทำมุมกัน dθ

การเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ แสดงโดยเวคเตอร์ $d\hat{e}_r$ เวคเตอร์นี้จะชี้ไปทิศทาง +θ ดังแสดงในรูป การเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ เขียนแทนด้วยสมการได้ดังนี้

$$d\hat{e}_r = |d\hat{e}_r|\hat{e}_\theta \qquad (2)$$

เนื่องจากขนาดของเวคเตอร์ $\hat{e}_r$ มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ดังนั้นขนาดของเวคเตอร์ $d\hat{e}_r$ หาได้จาก

$$|d\hat{e}_r| = |\hat{e}_r|d\theta = d\theta \qquad (3)$$

แทนสมการ (3) ในสมการ (2) จะได้

$$d\hat{e}_r = d\theta\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad (4)$$

การเปลี่ยนแปลงของเวคเตอร์ $\hat{e}_\theta$ สามารถหาได้ทำนองเดียวกัน

โดย $$|d\hat{e}_\theta| = |\hat{e}_\theta|d\theta = d\theta$$

เนื่องจากทิศทางการการเปลี่ยนแปลงชี้ไปทาง –r ดังนั้น

$$d\hat{e}_\theta = -d\theta\hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r \qquad (5)$$

สมการที่ (4) และ (5) จะนำไปใช้ในการหาความเร็วและความเร่งในพิกัด r-θ ต่อไป

ความเร็ว

ความเร็วสามารถหาได้โดยหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์บอกตำแหน่งในสมการ (1) เทียบกับเวลาดังนี้

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad (6)$$

โดย $v_r = \dot{r}$ เกิดจากการเปลี่ยนแปลงขนาดของเวคเตอร์ $\vec{r}$

$v_\theta = r\dot{\theta}$ เนื่องจากพจน์นี้เกิดจากพจน์ $r\dot{\hat{e}}_r$ จึงแสดงถึงผลของการเปลี่ยนแปลงทิศทางของเวคเตอร์ $\vec{r}$

ขนาดของความเร็วรวมหาได้จาก $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

ความเร่ง

ความเร่งหาได้โดยหาอนุพันธ์ของความเร็วในสมการ (6) เทียบกับเวลาดังนี้

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta) + (\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{e}_r))$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \qquad (7)$$

โดย $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

ขนาดของความเร่งรวมหาได้จาก $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$

การเคลื่อนที่แบบวงกลม

การเคลื่อนที่แบบวงกลม สามารถพิจารณาโดยใช้พิกัดแบบ r-θ โดยผู้สังเกตอยู่ที่จุดกึ่งกลางวงกลม กรณีนี้รัศมีความโค้งมีค่าคงที่ ดังนั้น $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ และจะได้

$$v = v_\theta = r\dot{\theta} \qquad (8)$$

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 \qquad (9)$$

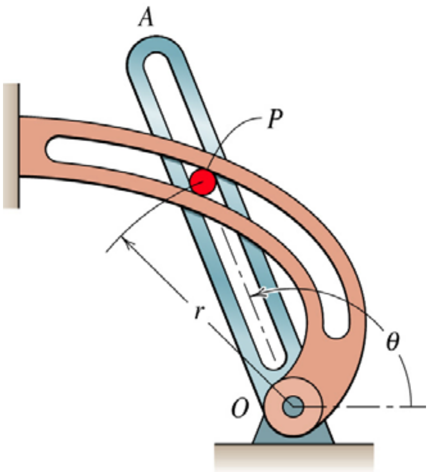
$$a_\theta = r\ddot{\theta} \qquad (10)$$

ผลที่ได้จะสอดคล้องกับการใช้พิกัด n-t ในการพิจารณา สังเกตว่า $a_r = -a_n$ ทั้งนี้เนื่องจากวิธีการตั้งแกนของพิกัดแบบ n-t ต่างกับพิกัดแบบ r-θ โดยแกน n ในพิกัดแบบ n-t จะ

ชี้เข้าหาจุดศูนย์กลางความโค้งเสมอ ส่วนแกน r ในพิกัดแบบ r-θ จะชี้ออกจากจุดอ้างอิง ซึ่งในที่นี้คือจุดศูนย์กลางของวงกลม

เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.



2/6 The slotted arm *OA* forces the small pin to move in the fixed spiral guide defined by $r = K\theta$. Arm *OA* starts from rest at $\theta = \pi/4$ and has a constant counterclockwise angular acceleration $\ddot{\theta} = \alpha$. Determine the magnitude of the acceleration of the pin *P* when $\theta = 3\pi/4$. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.2/149]

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $r = K\theta$

$$t = 0,\ \theta = \pi/4,\ v = 0 \longrightarrow \begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} = 0;\quad \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} = \alpha$$

จาก $r = K\theta \longrightarrow \dot{r} = K\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{r} = K\ddot{\theta} = K\alpha$

$\ddot{\theta} = \alpha \longrightarrow \dot{\theta} = \alpha t + C_1$ ที่ $t = 0,\ \dot{\theta} = 0$ ดังนั้น $C_1 = 0$

$$\dot{\theta} = \alpha t$$

$\dot{\theta} = \alpha t \longrightarrow \theta = \dfrac{\alpha t^2}{2} + C_2$ ที่ $t = 0,\ \theta = \pi/4$ ดังนั้น $C_2 = \pi/4$

$$\theta = \frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\pi}{4}$$

ต้องการหาที่ $\theta = 3\pi/4$, $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\alpha t^2}{2} + \dfrac{\pi}{4} \longrightarrow t = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$

$$\dot{\theta} = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\alpha\pi}$$

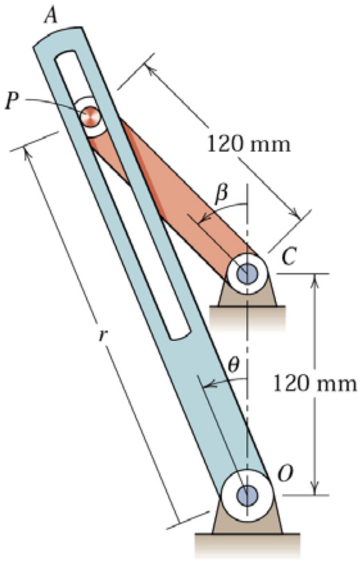
$$\dot{r} = K\dot{\theta} = K\sqrt{\alpha\pi}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = K\alpha - (K)(\frac{3\pi}{4})(\alpha\pi) = K\alpha(1 - \frac{3}{4}\pi^2) = -6.402K\alpha$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (K)(\frac{3\pi}{4})(\alpha) + 2(K\sqrt{\alpha\pi})(\sqrt{\alpha\pi})$$

$$a_\theta = K\alpha(\frac{3\pi}{4} + 2\pi) = \frac{11}{4}\pi K\alpha$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = K\alpha\left[\sqrt{(-0.642)^2 + \left(\frac{11\pi}{4}\right)^2}\right] = 10.753K\alpha$$ <u>Ans</u>



2/7 For a limited range of motion, crank *CP* causes the slotted link *OA* to rotate. If β is increasing at the constant rate of 4 rad/s when β = π/4, determine the r- and θ-components of the acceleration of pin P for this position and specify the corresponding values of $\dot{r}$ and $\ddot{r}$.

[Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.2/165]

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $\dot{\beta} = 4\ \text{rad/s}$ constant

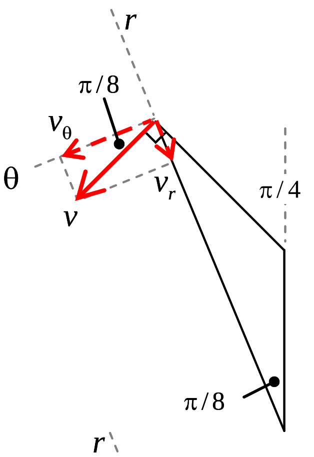
ต้องการหาค่า $a_r, a_\theta, \dot{r}, \ddot{r}$ เมื่อ β = π/4

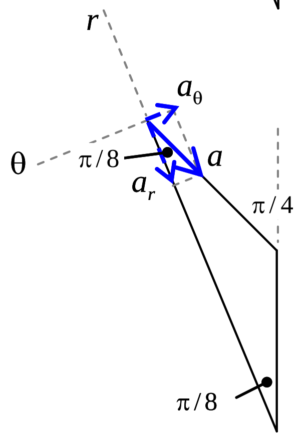
จุด P เป็นจุดบนชิ้นส่วน PC และเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด C ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ จุด P จะมีความเร็ว และความเร่งดังนี้

$$v = 0.12\dot{\beta} = (0.12)(4) = 0.48\ \text{m/s}$$

$$a = (0.12)(\dot{\beta})^2 = (0.12)(4)^2 = 1.92\ \text{m/s}^2$$

ทิศทางของความเร็วและความเร่งแสดงดังในรูป





$v_r, v_\theta, a_r, a_\theta$ สามารถหาได้โดยแตกความเร็วและความเร่งเข้าในแนวแกน *r*-θ ดังนี้

$$v_r = -v\sin\frac{\pi}{8} = -0.48\sin\frac{\pi}{8} = -0.1837\ \text{m/s}$$

$$v_\theta = v\cos\frac{\pi}{8} = 0.48\cos\frac{\pi}{8} = 0.4435\ \text{m/s}$$

$$\left.\begin{aligned} a_r &= -a\cos\frac{\pi}{8} = -1.92\cos\frac{\pi}{8} = -1.7738\ \text{m/s}^2 \\ &= -1774\ \text{mm/s}^2 \\ a_\theta &= -a\sin\frac{\pi}{8} = -1.92\sin\frac{\pi}{8} = -0.7348\ \text{m/s}^2 \\ &= -734.8\ \text{mm/s}^2 \end{aligned}\right\}$$

<u>*Ans*</u>

$$\dot{r} = v_r = -0.1837\ \text{m/s} = -183.7\ \text{mm/s}$$ <u>*Ans*</u>

$$r = 2(120)\cos\frac{\pi}{8} = 221.7311\ \text{mm}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} = \frac{0.4435}{0.2217} = 2 \text{ rad/s}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 = -1.7738 + (0.2217)(2^2)$$

$$\ddot{r} = -0.887 \text{ m/s}^2 = -887 \text{ mm/s}^2$$ ***Ans***

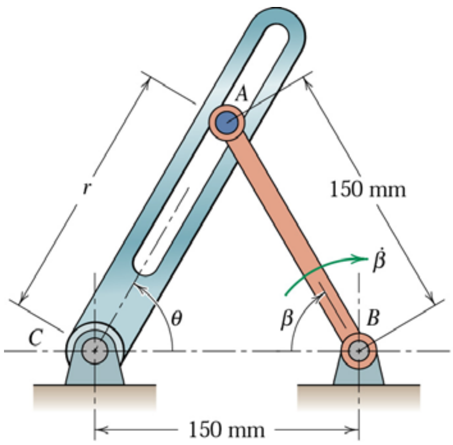
แบบฝึกหัด หัวข้อ 2/6

1. Link *AB* rotates through a limited range of angle β, and its end *A* causes the slotted link *AC* to rotate also. For the instant represented where $\beta = 60°$ and $\dot{\beta} = 0.6$ rad/s constant, determine the corresponding value of $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, and $\ddot{\theta}$. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

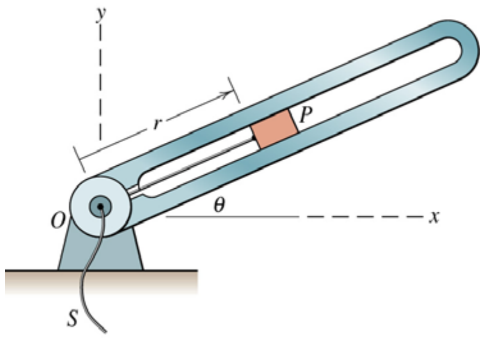
   (*Ans* $\dot{r}$ = 77.9 mm/s, $\ddot{r}$ = -13.5 mm/s^2
   $\dot{\theta}$ = -0.3 rad/s, $\ddot{\theta}$ = 0)

2. The slider *P* can be moved inward by means of the string *S*, while the slotted arm rotates about point *O*. The angular position of the arm is given by $\theta = 0.8t - \frac{t^2}{20}$, where θ is in radians and *t* is in seconds. The slider is at *r* = 1.6 m when *t* = 0 and thereafter is drawn inward at the constant rate of 0.2 m/s. Determine the magnitude and direction (expressed by the angle a relative to the *x*-axis) of the velocity and acceleration of the slider when *t* = 4 s. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

   (*Ans* v = 0.377 m/s at α = 260°
   a = 0.272 m/s2 at α = 19.44°)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2

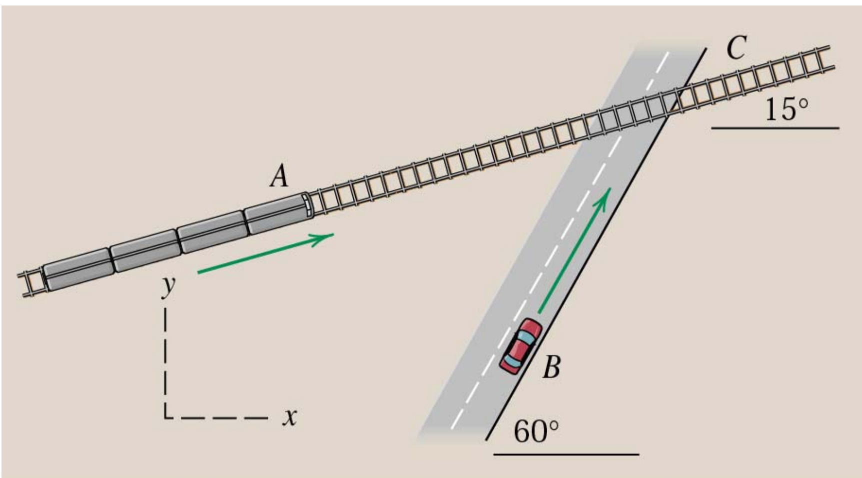
พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 2 การเคลื่อนที่ของอนุภาค (ส่วนที่ 5)

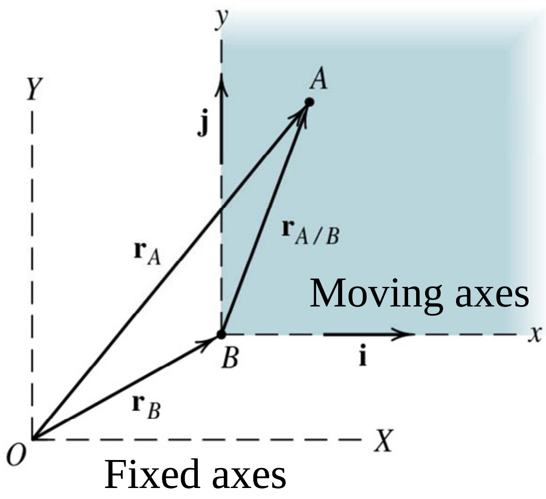
2/8 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (Translating axes)

ในหัวข้อก่อนๆ การสังเกตการณ์เคลื่อนที่ของวัตถุจะเป็นการสังเกตโดย (เทียบกับ) ผู้สังเกตที่อยู่กับที่ การเคลื่อนที่ของวัตถุที่สังเกตได้จากผู้สังเกตที่อยู่นิ่งนั้นจะเรียกว่า "การเคลื่อนที่สัมบูรณ์ (Absolute motion)" อย่างไรก็ตามหากผู้สังเกตไม่ได้อยู่นิ่งกับที่แต่เคลื่อนที่อยู่ การเคลื่อนที่ของวัตถุที่สังเกตได้จะไม่ใช่ค่าที่แท้จริง เรียกการเคลื่อนที่ของวัตถุที่สังเกตจากผู้สังเกตที่เคลื่อนที่ว่า "การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (Relative motion)" รูปที่ 1 แสดงตัวอย่างการสังเกตการเคลื่อนที่ หากต้องการสังเกตการเคลื่อนที่ของรถไฟ A เมื่อผู้สังเกตยืนอยู่กับที่ จะสังเกตการเคลื่อนที่ของรถไฟและบอกการเคลื่อนที่สัมบูรณ์ของรถไฟได้ อย่างไรก็ตามหากผู้สังเกตนั่งอยู่ในรถยนต์ B และทำการสังเกตการเคลื่อนที่ของรถไฟ A ค่าที่ผู้สังเกตสังเกตได้จะไม่ใช่ค่าสัมบูรณ์ แต่จะเป็นค่าการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ที่เทียบกับรถยนต์ B ในกรณีนี้การเคลื่อนที่สัมบูรณ์ของรถไฟ A ก็ยังสามารถหาได้ หากทราบการเคลื่อนที่ของผู้สังเกต ซึ่งในที่นี้คือรถยนต์ B

<u>Note</u> ในความเป็นจริงวัตถุใดๆ มีการเคลื่อนที่ โลกก็มีการเคลื่อนที่เช่นกัน ดังนั้นการเคลื่อนที่ที่สังเกตได้จึงควรเป็นการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ทุกๆ กรณี อย่างไรก็ตามในปัญหาทั่วๆ จะถือว่าหากผู้สังเกตอยู่นิ่งบนพื้นโลก การเคลื่อนที่ที่ผู้สังเกตสังเกตได้จะเป็นการเคลื่อนที่สัมบูรณ์ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า แกนพิกัดที่ตั้งให้หยุดนิ่งเทียบกับโลกจะถือเป็นแกนที่หยุดนิ่ง



รูปที่ 1 ตัวอย่างการสังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุจากผู้สังเกตที่เคลื่อนที่ [1]



รูปที่ 2 การเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์ [1]

รูปที่ 2 แสดงวิธีการพิจารณาการเคลื่อนที่โดยใช้วิธีการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ โดย วัตถุ A เป็นวัตถุที่ต้องการสังเกต ผู้สังเกต B เป็นผู้สังเกตที่เคลื่อนที่ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาผู้สังเกตที่เคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ (Translation) เท่านั้น ไม่รวมผู้สังเกตที่เคลื่อนที่แบบหมุน (Rotation) ซึ่งต้องอาศัยการพิจารณาที่แตกต่างกันไป แกนพิกัด X-Y เป็นแกนพิกัดที่อยู่นิ่งบนพื้นโลก ส่วนแกนพิกัด x-y เป็นแกนพิกัดที่เคลื่อนที่ไปพร้อมกับผู้สังเกต B

จากรูปที่ 2 จะได้ว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุ A เทียบกับแกนหยุดนิ่ง X-Y จะเป็นค่าสัมบูรณ์ ส่วนการเคลื่อนที่ของวัตถุ A เมื่อสังเกตโดยผู้สังเกต B จะเป็นค่าสัมพัทธ์ ซึ่งไม่เท่ากับค่าสัมบูรณ์

การเคลื่อนที่ของวัตถุ A เมื่อเทียบกับแกนหยุดนิ่งแสดงได้โดยเวคเตอร์ $\vec{r}_A$ การเคลื่อนที่ของผู้สังเกต B เมื่อเทียบกับแกนหยุดนิ่งแสดงได้โดยเวคเตอร์ $\vec{r}_B$ ส่วนการเคลื่อนที่ของวัตถุ A เมื่อเทียบกับผู้สังเกต B (สังเกตโดยผู้สังเกต B) แสดงโดยเวคเตอร์ $\vec{r}_{A/B}$ (A/B อักษรตัวแรกแสดงวัตถุที่สังเกต อักษรตัวหลังแสดงผู้สังเกต) จากรูปจะได้ความสัมพันธ์ของเวคเตอร์ทั้ง 3 ดังนี้

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \tag{1}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (1) เทียบกับเวลา จะได้ความสัมพันธ์แสดงความเร็วและความเร่งของวัตถุ A ดังนี้

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{A/B} \quad \text{หรือ} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \tag{2}$$

$$\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}}_B + \ddot{\vec{r}}_{A/B} \quad \text{หรือ} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \tag{3}$$

โดย ความเร็วและความเร่งที่ห้อยด้วยตัวอักษร A, B จะแสดงความเร็วและความเร่งสัมบูรณ์ (เทียบกับแกนหยุดนิ่ง) ส่วนความเร็วและความเร่งที่ห้อยด้วยอักษร A/B จะแสดงความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์ ของวัตถุ A เทียบกับผู้สังเกต B

เมื่อผู้สังเกต B ใช้ระบบพิกัดฉากในการบอกตำแหน่งวัตถุ A จะสามารถเขียนเวคเตอร์ $\vec{r}_{A/B}$ ซึ่งแสดงตำแหน่งของ A เมื่อเทียบกับผู้สังเกต B ได้ดังนี้

$$\vec{r}_{A/B} = x\hat{i} + y\hat{j} \tag{4}$$

โดย $\hat{i}$, $\hat{j}$ คือเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน x และ y ตามลำดับ

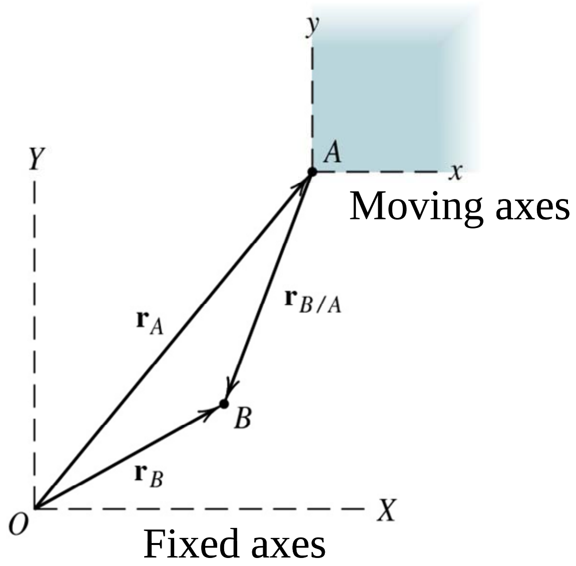
x , y คือพิกัดของวัตถุ A เมื่อวัดโดยแกน x-y

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (4) เทียบกับเวลา จะได้ความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์ดังนี้

$$\vec{v}_{A/B} = \dot{\vec{r}}_{A/B} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \tag{5}$$

$$\vec{a}_{A/B} = \ddot{\vec{r}}_{A/B} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \tag{6}$$

Note ผู้สังเกต B สามารถใช้ระบบพิกัดแบบอื่นๆ เช่น พิกัดแบบ n-t หรือพิกัดแบบ r-θ เพื่อบอกตำแหน่งของวัตถุ A ได้เช่นเดียวกัน ในกรณีนี้สมการ (4)-(6) จะเปลี่ยนไปตามระบบพิกัดที่ใช้



รูปที่ 3 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (ผู้สังเกตอยู่ที่จุด A) [1]

รูปที่ 3 แสดงการเคลื่อนที่สัมพัทธ์เช่นเดียวกับรูปที่ 2 แต่ต่างกันที่ ในกรณีนี้ผู้สังเกตอยู่ที่จุด A และตั้งแกนพิกัด x-y โดยเคลื่อนที่ไปพร้อมกับจุด A ส่วนวัตถุที่ต้องการสังเกตอยู่ที่จุด B จากรูปจะได้ว่า

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \tag{7}$$

ทำนองเดียวกันจะได้

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \tag{8}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \tag{9}$$

เมื่อเทียบสมการ (1) – (3) กับสมการ (7) – (9) จะได้ว่า

$$\vec{r}_{A/B} = -\vec{r}_{B/A} \tag{10}$$

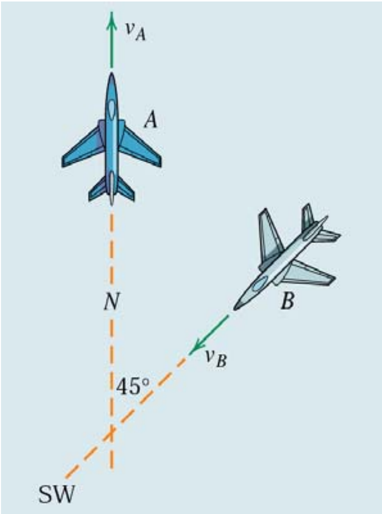
$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} \tag{11}$$

$$\vec{a}_{A/B} = -\vec{a}_{B/A} \tag{12}$$

นั่นคือ ถ้าเลือกวัตถุที่สังเกต และผู้สังเกตกลับกัน จะได้ว่าตำแหน่งสัมพัทธ์ ความเร็วสัมพัทธ์ และความเร่งสัมพัทธ์ จะมีค่าเท่ากันแต่เครื่องหมายตรงกันข้าม ซึ่งหมายถึงมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกันนั่นเอง

เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.



2/8 Airplane *A* is flying north with a constant horizontal velocity of 500 km/h. Airplane *B* is flying south-west at the same altitude with a velocity of 500 km/h. From the frame of reference of *A* determine the magnitude v_r of the apparent or relative velocity of *B*. Also find the magnitude of the apparent velocity v_n with which *B* appears to be moving sideways or normal to its centerline. Would the results be different if the two airplanes were flying at different but constant altitudes? [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.2/201]

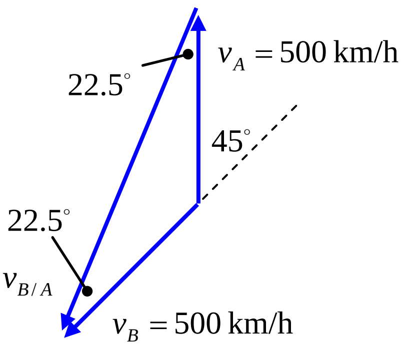
วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $v_A = v_B = 500$ km/h

ต้องการหาค่า 1. v_r ซึ่งเป็น v ของเครื่องบิน B เมื่อเทียบกับผู้สังเกต A ซึ่งก็คือ $v_{A/B}$ นั่นเอง

2. v_n หรือส่วนประกอบของ $v_{A/B}$ ในทิศทางตั้งฉากกับ v_A

ในกรณีนี้ผู้สังเกตอยู่ที่ A พิจารณาความสัมพันธ์ $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

ความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนเป็นแผนภาพเวคเตอร์ได้ดังนี้

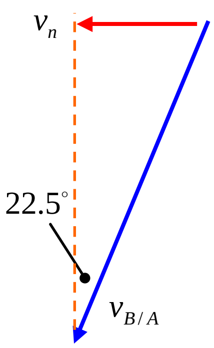


จากรูป และกฎของ cosine

$$v_{A/B}^2 = v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos 135^\circ$$

$$v_{A/B}^2 = 500^2 + 500^2 - 2(500)(500)\cos 135^\circ$$

$$v_{A/B} = 923.88 \text{ km/h}$$ *Ans*



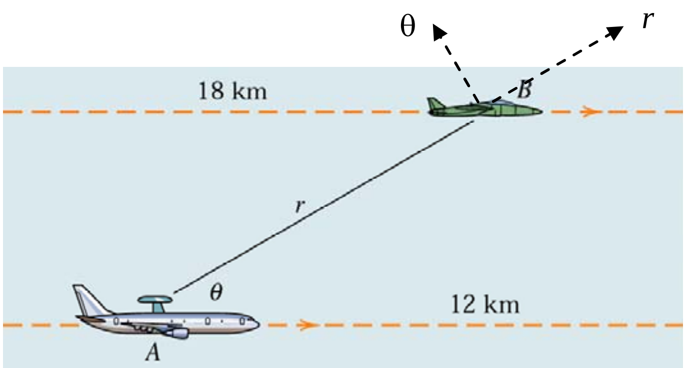
v_n คือส่วนประกอบของ $v_{A/B}$ ในทิศทางตั้งฉากกับ v_A

จากรูปจะได้

$$v_n = v_{B/A} \sin 22.5^\circ$$

$$v_n = 923.88 \sin 22.5^\circ = 353.55 \text{ km/h}$$ *Ans*

2/9 The aircraft *A* with radar detection equipment is flying horizontally at an altitude of 12 km and is increasing its speed at the rate of 1.2 m/s each second. Its radar locks onto an aircraft *B* flying in the same direction and in the same vertical plane at an altitude of 18 km. If *A* has a speed of 1000 km/h at the instant when $\theta = 30^\circ$, determine the values of $\ddot{r}$ and $\ddot{\theta}$ at this same instant if *B* has a constant speed of 1500 km/h. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.2/204]



วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $v_A = 1000 \text{ km/h}, \quad a_A = 1.2 \text{ m/s}^2$

$$v_B = 1500 \text{ km/h}, \quad \text{constant}$$

$$\theta = 30^\circ$$

พิจารณาสูตร r-θ

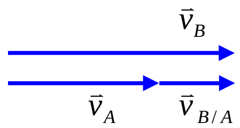
$$\left.\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned}\right\}$$

ต้องการหา $\ddot{r}$ และ $\ddot{\theta}$ จำเป็นต้องรู้ a ในทิศทาง r-θ ก่อน
สำหรับ a_r และ a_θ นั้นเป็นความเร่งที่สังเกตได้จากเครื่องบิน A จึงเป็นความเร่งสัมพัทธ์นั่นเอง

พิจารณาความเร็ว $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

$$1500 = 100 + v_{B/A}$$

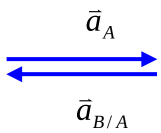
$$v_{B/A} = 500 \text{ km/h}$$

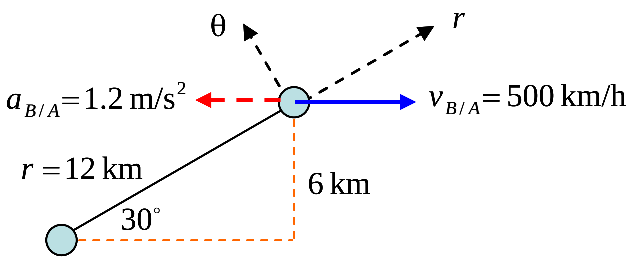


พิจารณาความเร่ง $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$

$$0 = 1.2 + a_{B/A}$$

$$a_{B/A} = -1.2 \text{ m/s}^2$$





จากรูป $v_r = 500\cos 30^\circ = 433.0127$ km/h

$v_\theta = -500\sin 30^\circ = -250$ km/h

$v_r = \dot{r} \longrightarrow \dot{r} = 433.0127 \text{ km/h} = 120.2813 \text{ m/s}$

$v_\theta = r\dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = \dfrac{-250}{3.6}\left(\dfrac{1}{12000}\right) = \text{-}0.00579 \text{ m/s}$

$a_r = -1.2\cos 30^\circ = -1.0392 \text{ m/s}^2$

$a_\theta = 1.2\sin 30^\circ = 0.6 \text{ m/s}^2$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \longrightarrow -1.0392 = \ddot{r} - (12\times 10^3)(-0.00579)^2$

$\ddot{r} = -0.6369 \text{ m/s}^2$ *Ans*

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \longrightarrow 0.6 = (12\times 10^3)\ddot{\theta} + 2(120.2813)(-0.00579)$

$\ddot{\theta} = 1.6607\times 10^{-4} \text{ rad/s}^2$ *Ans*

แบบฝึกหัด หัวข้อ 2/8

1. A drop of water falls with no initial speed from point *A* of a highway overpass. After dropping 6 m, it strikes the windshield at point *B* of a car which is traveling at a speed of 100 km/h on the horizontal road. If the windshield is inclined 50 from the vertical as shown, determine the angle θ relative to the normal *n* to the windshield at which the water drop strikes. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

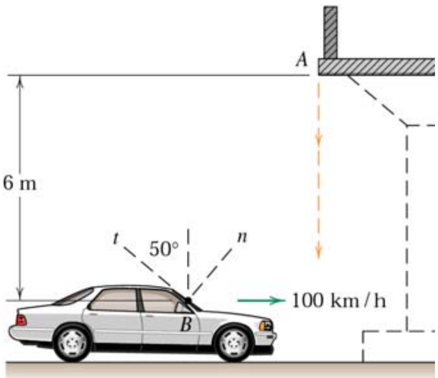
(*Ans* $\theta = 28.7°$ below normal)

2. After starting from the position marked with the "x", a football receiver *B* runs the slant-in pattern shown, making a cut at *P* and thereafter running with a constant speed v_b = 7 m/s in the direction shown. The quarterback releases the ball with a horizontal velocity of 30 m/s at the instant the receiver passes point *P*. Determine the angle *a* at which the quarterback must throw the ball, and the velocity of the ball relative to the receiver when the ball is caught. Neglect any vertical motion of the ball. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

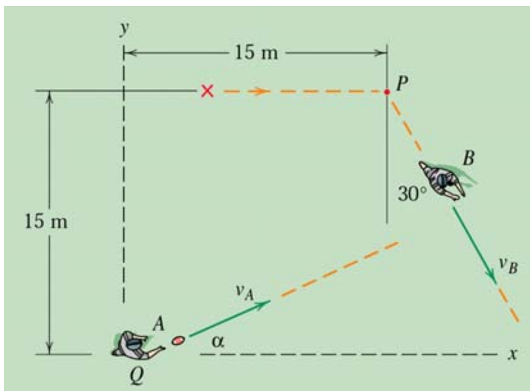
(*Ans* $\alpha = 32.0°$, $\mathbf{v}_{A/B} = 21.9\mathbf{i} + 21.9\mathbf{j}$ m/s)

3. A batter hits the ball A with an initial velocity of v_0 = 30 m/s directly toward fielder *B* at an angle of 30° to the horizontal; the initial position of the ball is 0.9 m above ground level. Fielder *B* requires 0.25 s to judge where the ball should be caught and begins moving to that position with constant speed. Because of great experience, fielder *B* chooses his running speed so that he arrives at the "catch position" simultaneously with the ball. The catch position is the field location with the ball altitude 2.1 m. Determine the velocity of the ball relative to the fielder at the instant the catch is made. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

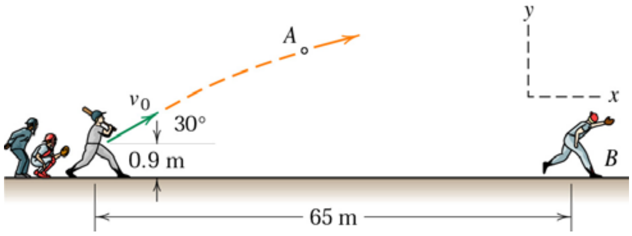
(*Ans* $\mathbf{v}_{A/B} = 21.5\mathbf{i} - 14.19\mathbf{j}$ m/s)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 3

พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 3 จลน์ศาสตร์ของอนุภาค

3/1 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

จลน์ศาสตร์เป็นการศึกษาผลของแรงที่ไม่สมดุลส่งผลให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ ปัญหาทางจลน์ศาสตร์นั้นสามารถแก้ได้ 3 วิธี ได้แก่ 1) การพิจารณาความสัมพันธ์ของมวล-แรง-ความเร่ง 2) การใช้วิธีงานและพลังงาน และ 3) การใช้วิธีอิมพัลส์และโมเมนตัม ในที่นี้จะกล่าวถึงเพียงวิธีแรกคือการใช้ความสัมพันธ์ของมวล-แรง-ความเร่ง ตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตันเท่านั้น กฎข้อที่ 2 ของนิวตันแสดงได้โดยสมการที่ (1)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

โดย $\sum \vec{F}$ คือแรงลัพธ์ที่กระทำกับวัตถุ มีหน่วยเป็นนิวตัน N, m คือมวลของวัตถุ มีหน่วยเป็น kg, และ $\vec{a}$ คือความเร่งของวัตถุ มีหน่วยเป็น m/s^2

ปัญหาจลน์ศาสตร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท

1. ปัญหาที่สามารถหาความเร่งได้จากการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ และนำความเร่งที่ได้ไปคำนวณแรง
2. ปัญหาที่ทราบแรง โดยแรงจะเป็นแรงคงที่หรือเป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรการเคลื่อนที่อื่น ก็ได้ และนำแรงที่ได้ไปคำนวณหาค่าความเร่ง

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุสามารถใช้วิธีการที่เรียนมาแล้วในบทที่ 2 มาคำนวณหาการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นได้ โดยการเคลื่อนที่อาจเป็นการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง หรือการเคลื่อนที่แนวโค้งก็ได้ เนื่องจากการวิเคราะห์ในบทนี้จำเป็นต้องทราบแรงทั้งหมดที่กระทำกับวัตถุ ดังนั้นจึงต้องวาด Free body diagram ก่อนการวิเคราะห์เสมอ

3/2 จลน์ศาสตร์กรณีการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

ในกรณีนี้จะสามารถเลือกตั้งแกนพิกัดให้ตรงกับทิศทางการเคลื่อนที่ได้ ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่จะเป็นดังแสดงในสมการ (2) ทิศทางอื่นซึ่งไม่มีการเคลื่อนที่จะอยู่ในสภาวะสมดุล

$$\sum F_x = ma_x\,, \qquad \sum F_y = 0\,, \qquad \sum F_z = 0 \tag{2}$$

อย่างไรก็ตามอาจไม่จำเป็นที่จะต้องตั้งแกนพิกัดให้ตรงกับทิศทางการเคลื่อนที่ก็ได้ ในกรณีนี้จะมีแรงและความเร่งทั้ง 3 ทิศทาง ดังแสดงในสมการ (3)

$$\sum F_x = ma_x\,, \qquad \sum F_y = ma_y\,, \qquad \sum F_z = ma_z \tag{3}$$

แรงและความเร่งลัพธ์สามารถหาได้จากสมการ (4) และ (5) ดังนี้

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\,, \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{4}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}\,, \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{5}$$

3/3 จลน์ศาสตร์กรณีการเคลื่อนที่ในแนวโค้ง

เนื่องจากเป็นการเคลื่อนที่แนวโค้ง วิธีการพิจารณาจึงใช้ระบบพิกัดต่างๆ ตามที่เรียนมาในบทที่ 2 ดังนี้

1. ระบบพิกัดฉาก $\sum F_x = ma_x$, $\sum F_y = ma_y$ (6)

   โดย $a_x = \ddot{x}$ และ $a_y = \ddot{y}$

2. พิกัด n-t $\sum F_n = ma_n$, $\sum F_t = ma_t$ (7)

   โดย $a_n = \rho\dot{\beta}^2 = v^2/\rho$ และ $a_t = \dot{v}$

3. พิกัด r-θ $\sum F_r = ma_r$, $\sum F_\theta = ma_\theta$ (8)

   โดย $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ และ $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

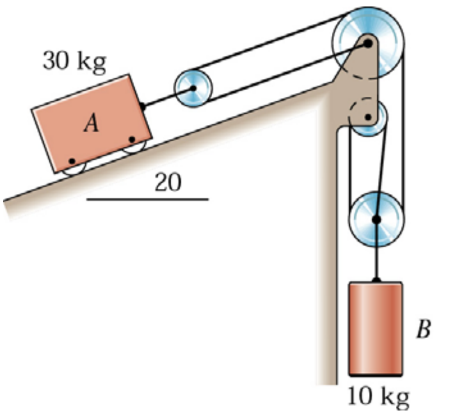
3/4 แนวทางการคำนวณปัญหาจลศาสตร์ของอนุภาค

ปัญหาจลศาสตร์ส่วนใหญ่มีแนวทางการคำนวณเป็นลำดับขั้นดังต่อไปนี้

1. เขียน FBD ของวัตถุที่สนใจทุกชิ้น และเขียนแกนพิกัดที่เหมาะสม
2. เขียนสมการการเคลื่อนที่ $\sum F = ma$ โดยใช้สมการความเร่งที่เหมาะสมกับระบบพิกัดที่เลือก
3. ในกรณีปัญหาที่ทราบแรงทั้งหมดจากสมการในขั้นที่ 2 จะสามารถหาค่าความเร่งได้ และจากความเร่งจะสามารถหาค่า ความเร็ว และการขจัดต่อไปตามสมการการเคลื่อนที่ที่ได้เรียนมาแล้วในบทที่ 2
4. ในกรณีที่ทราบข้อมูลการเคลื่อนที่ เช่นการขจัด หรือความเร็ว จะสามารถหาความเร่งในจุดที่ต้องการคำนวณได้ตามวิธีการที่ได้เรียนมาแล้วในบทที่ 2 เมื่อได้ความเร่งจึงนำไปหาแรงได้จากสมการในขั้นที่ 2
5. ในกรณีที่มีวัตถุหลายชิ้นแต่ถูกบังคับให้เคลื่อนที่สัมพันธ์กัน ต้องหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุให้ได้ก่อน ใช้ความสัมพันธ์นี้ร่วมกับสมการการเคลื่อนที่ในขั้นที่ 2 จะสามารถหาค่าที่ต้องการทราบ (แรง ความเร่ง ฯลฯ) ได้
6. กรณีมีแรงเสียดทาน และมีวัตถุที่จะพิจารณามากกว่า 1 ก้อน ให้สมมุติก่อนว่าวัตถุจะติดกันไป หรือวัตถุเกิดการไถลไม่ติดกัน 1) ถ้าวัตถุติดกันไป-วัตถุทุกชิ้นต้องมีความเร่งเท่ากัน และมีแรงเสียดทานแต่ละพื้นผิวน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด 2) ถ้าวัตถุไม่ติดกัน-วัตถุแต่ละชิ้นจะมีความเร่งต่างกัน และแรงเสียดทานจะมีค่าเท่ากับแรงเสียดทานจลน์

เอกสารอ้างอิง

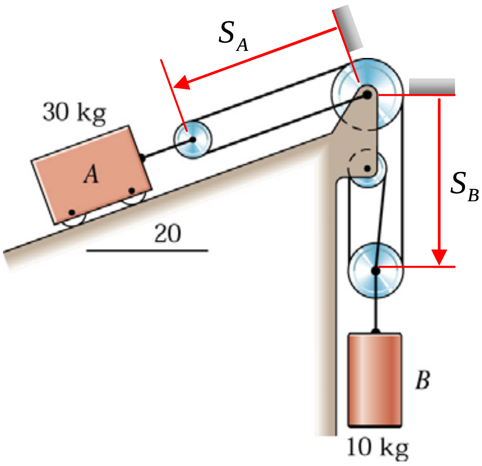
[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.



3/1 From the figure, neglect all friction and the mass of the pulleys and determine the accelerations of bodies A and B upon release from rest .

[Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.3/27]

วิธีทำ เนื่องจากมวล A และมวล B ไม่ได้ต่อกันแบบยึดแน่น เมื่อเคลื่อนที่ไปมวลทั้งสองก้อนจึงอาจเคลื่อนที่ด้วยความเร่งที่ไม่เท่ากันได้ ดังนั้นจึงต้องหาความสัมพันธ์ของความเร่งของมวลทั้งสองก้อนเสียก่อน



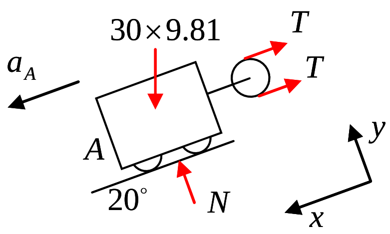
พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของมวล A และมวล B จะพบว่าการเคลื่อนที่ของมวล A และมวล B สามารถแทนได้ด้วยระยะ S_A และ S_B ซึ่งวัดจากจุดศูนย์กลางของรอก ดังแสดงในรูป <u>จุดที่ใช้อ้างอิงในการวัดระยะ ต้องเป็นจุดที่หยุดนิ่งไม่เคลื่อนที่เท่านั้น</u>

เนื่องจากความยาวของเชือก L ต้องมีค่าคงที่ ดังนั้น

$$2S_A + 3S_B + \text{Constant} = L$$

$$2\dot{S}_A + 3\dot{S}_B = 0$$

$$2\ddot{S}_A + 3\ddot{S}_B = 0 \longrightarrow 2a_A + 3a_B = 0 \qquad (1)$$



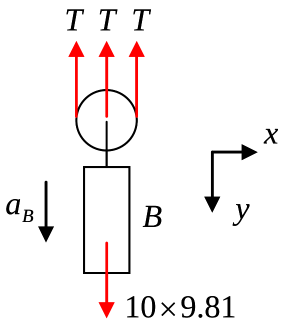
พิจารณา FBD ของวัตถุ A

$$[\sum F_y = 0] \qquad N - 30(9.81)\cos 20^\circ = 0$$

$$N = 276.5515 \text{ N}$$

$$[\sum F_x = ma_x]$$

$$30(9.81)\sin 20^\circ - 2T = 30a_A \qquad (2)$$



พิจารณา FBD ของวัตถุ B

$$[\sum F_y = ma_y]$$

$$10(9.81) - 3T = 10a_B \qquad (3)$$

ระบบสมการ (1)-(3) มีตัวแปร 3 ตัวคือ a_A, a_B, T

แก้ระบบสมการ (1)-(3) จะได้

$$a_A = 1.024 \text{ m/s}^2 \swarrow$$

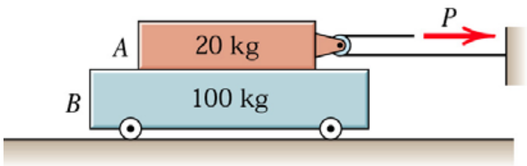
$$a_B = -0.6824 \text{ m/s}^2 \downarrow \qquad \therefore a_B = 0.6824 \text{ m/s}^2 \uparrow$$

$$T = 34.97 \text{ N}$$

Ans

Note การตั้งแกน x-y และกำหนดทิศทาง+ ของความเร่ง a_A และ a_B ต้องสอดคล้องกับการกำหนดทิศทางบวกของ S_A และ S_B ไม่เช่นนั้นความสัมพันธ์ในสมการที่ (1) จะไม่สอดคล้องกับสมการที่ (2) และ (3)

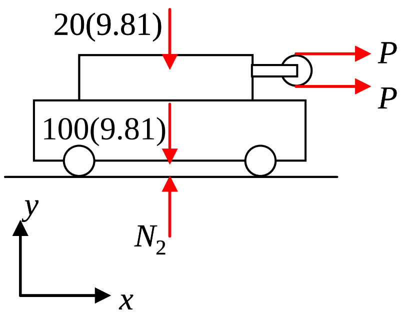
3/2 If the coefficients of static and kinetic friction between the 20-kg block *A* and the 100-kg cart *B* are both essentially the same value of 0.5, determine the acceleration of each part for (*a*) *P* = 60 N and (*b*) *P* = 40 N . [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.3/23]



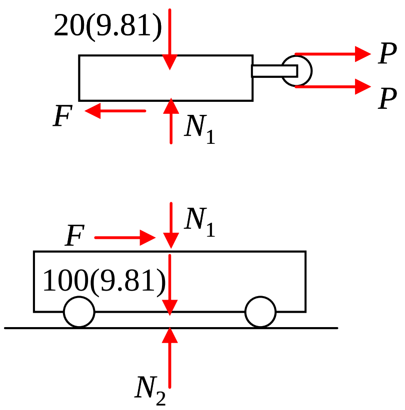
วิธีทำ จากรูปเมื่อดึงเชือกด้วยแรก P จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่ที่เป็นไปได้กรณีใดกรณีหนึ่ง ดังต่อไปนี้

1. มวล A และ B ติดกัน จึงเคลื่อนที่ไปด้วยกันด้วยความเร่งเท่ากัน และเมื่อพิจารณาถึงแรงเสียดทานระหว่าง A และ B จะพบว่าแรงเสียดทานระหว่างมวลทั้งสองก้อนต้องมีค่าน้อยกว่าค่าแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด
2. มวล A และ B เกิดการไถลไม่ติดกัน กรณีนี้ความเร่งของมวลก้อน A และก้อน B จะไม่เท่ากัน และขนาดแรงเสียดทานระหว่างมวลทั้งสองก้อนจะมีค่าเท่ากับแรงเสียดทานจลน์

FBD รวม 2 ก้อน



FBD แยกก้อน



(a) <u>P = 60 N</u>

สมมุติให้มวลทั้งสองก้อนติดกันไป ตามกรณีที่ 1 คิด FBD รวมทั้ง 2 ก้อน

$$\left[\sum F_y = 0\right] \quad N_2 - 20(9.81) - 100(9.81) = 0$$

$$N_2 = 1177.2\ \text{N}$$

$$\left[\sum F_x = ma_x\right] \quad 2P = (m_A + m_B)a$$

$$2(60) = (20+100)a$$

$$a = 1\ \text{m/s}^2$$

ตรวจว่าความเร่งที่ได้มาเป็นไปได้หรือไม่ โดยคำนวณแยกทีละก้อน

<u>มวล A</u>

$$\left[\sum F_y = 0\right] \quad N_1 - 20(9.81) = 0$$

$$N_1 = 196.2\ \text{N}$$

$$\left[\sum F_x = ma_x\right] \quad 2P - F = m_A a$$

$$2(60) - F = 20(1)$$

$F = 100\ \text{N}$

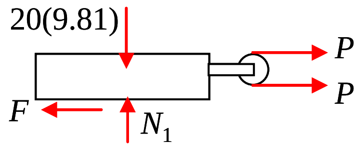
ตรวจสอบกับค่าแรงเสียดทานสถิตสูงสุดที่เป็นไปได้

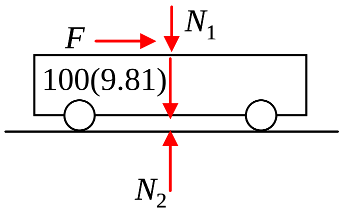
$F_{\max} = \mu_s N_1 = 0.5(196.2) = 98.1\ \text{N}$

$F = 100\ \text{N} > F_{\max} \longrightarrow$ เป็นไปไม่ได้ แสดงว่าออกแรง 60 N มวลทั้งสองต้องเกิดการไถล (ไม่ได้เคลื่อนที่ติดกันเป็นชิ้นเดียว) ดังนั้นไม่สามารถคิดรวมเป็นก้อนเดียวได้ เพราะความเร่งแต่ละก้อนไม่เท่ากัน

เนื่องจากมวลทั้งสองก้อนเกิดการไถล แรงเสียดทานระหว่างมวลทั้งสองก้อนจะมีค่าเท่ากับแรงเสียดทานจลน์

FBD แยกก้อน





$F = \mu_k N_1 = 0.5(196.2) = 98.1\ \text{N}$

มวล A

$\left[\sum F_x = ma_x\right]$ $2P - F = m_A a_A$

$2(60) - 98.1 = 20a_A$

$a_A = 1.095\ \text{m/s}^2$ Ans

มวล B

$\left[\sum F_y = 0\right]$ $N_2 - N_1 - 100(9.81) = 0$

$N_2 = 1177.2\ \text{N}$

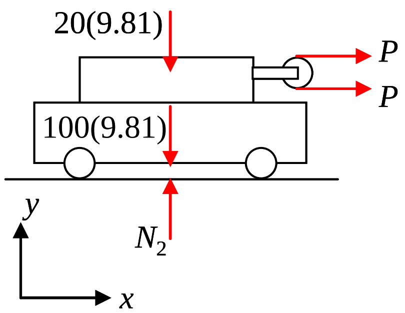
$\left[\sum F_x = ma_x\right]$ $F = m_B a_B$

$98.1 = 100a_B \longrightarrow a_B = 0.981\ \text{m/s}^2$ Ans

---

(a) P = 40 N

FBD รวม 2 ก้อน



มวล A

สมมุติให้มวลทั้งสองก้อนติดกันไป คิด FBD รวมทั้ง 2 ก้อน

$\left[\sum F_x = ma_x\right]$ $2P = (m_A + m_B)a$

$2(40) = (20 + 100)a$

$a = 0.6667\ \text{m/s}^2$

ตรวจว่าความเร่งที่ได้มาเป็นไปได้หรือไม่ โดยคำนวณแยกทีละก้อน (ความเร่งแต่ละก้อนต้องเท่ากัน และแรงเสียดทานระหว่างกัน ต้องน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด)

มวล A

$\left[\sum F_x = ma_x\right]$ $\quad 2P - F = m_A a$

$$2(40) - F = 20(0.6667)$$

$$F = 66.6667 \text{ N} < F_{\max}$$

เนื่องจากค่าแรงเสียดทานที่คำนวณมาได้ มีค่าน้อยกว่าความแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด ดังนั้นการสมมุติถูกต้องแล้ว

มวล B

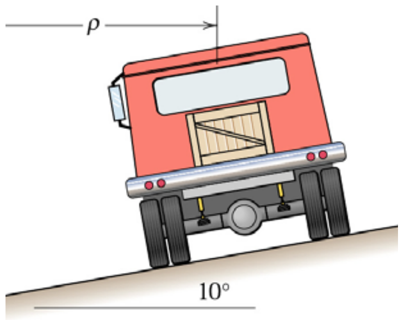
ตรวจสอบความเร่งของมวล B

$\left[\sum F_x = ma_x\right]$ $\quad F = m_B a_B$

$$66.6667 = 100a_B \longrightarrow a_B = 0.6667\text{m/s}^2$$

ความเร่งรวม เท่ากับความเร่งของมวล A และความเร่งของมวล B จริง
ดังนั้น ความเร่งในกรณีนี้

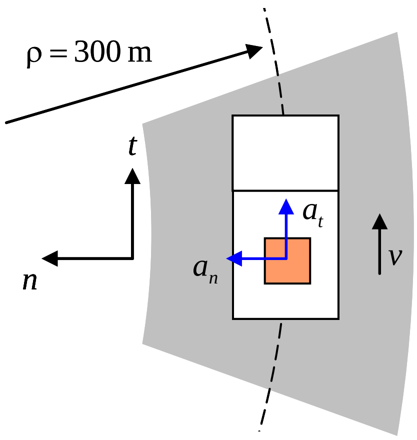
$$a_A = a_B = 0.6667\text{m/s}^2$$ Ans

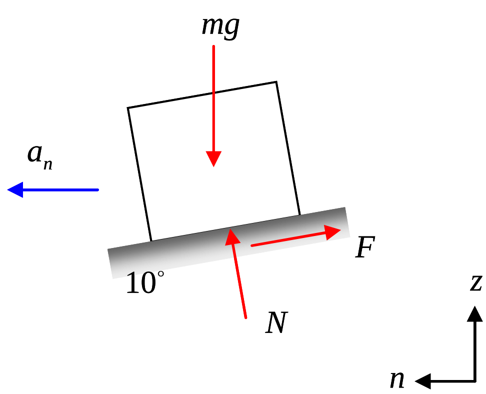


3/3 A flatbed truck going 100 km/h rounds a horizontal curve of 300-m radius inwardly banked at 10º. The coefficient of static friction between the truck bed and the 200-kg crate it carries is 0.70. Calculate the friction force F acting on the crate.

[Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.3/69]

วิธีทำ เขียน FBD ของกล่องบนรถ





รถวิ่งด้วยความเร็วคงที่ $a_t = 0$

ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \left(\dfrac{100}{3.6}\right)^2 \dfrac{1}{300}\ \text{m/s}^2$

$\left[\sum F_z = 0\right]$ $\quad N\cos 10^\circ + F\sin 10^\circ - 200(9.81) = 0$ (1)

$\left[\sum F_n = ma_n\right]$ $\quad N\sin 10^\circ - F\cos 10^\circ = 200\left(\dfrac{100}{3.6}\right)^2 \dfrac{1}{300}$ (2)

แก้สมการ (1) และ (2) ได้ $N = 2021.518\ \text{N}$

$F = -165.891\ \text{N}$

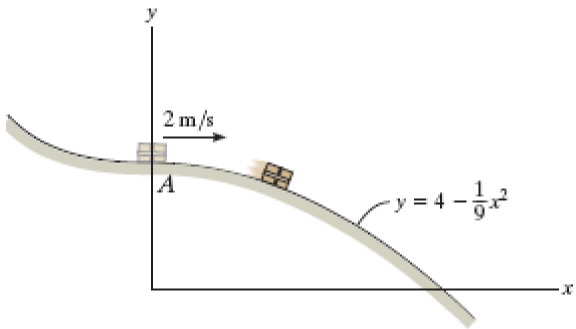
$F = 165.891\ \text{N} \swarrow$ Ans

Note สามารถตรวจสอบค่าแรงเสียดทานสถิตมากที่สุดได้จาก

$F_{\max} = \mu_s N = 0.7(2021.518) = 1415.06\ \text{N}$

จะพบว่าแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิตที่มากที่สุด จึงไม่เกิดการไถล ดังนั้นความเร่งของกล่องจึงเท่ากับความเร่งของตัวรถ

3/4 The 35-kg box has a speed of 2 m/s when it is at *A* on the smooth ramp. If the surface is in the shape of a parabola, determine the normal force on the box at the instant x = 3 m. Also, what is the rate of increase in its speed at this instant. [Engineering Mechanics Dynamics 11th edition, R.C.Hibbeler, prob.13-77]



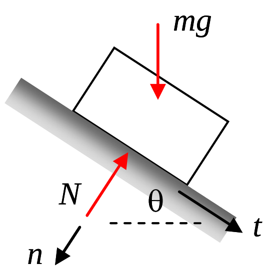
วิธีทำ ในข้อนี้กำหนดการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อเริ่มเคลื่อนที่ (วัตถุอยู่ที่ A) และให้หาแรงเมื่อวัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง x = 3 ขั้นตอนการทำจะคล้ายกับตัวอย่างก่อนหน้า คือต้องใช้สมการการเคลื่อนที่หาความเร่งที่ตำแหน่งที่ต้องการให้ได้ก่อน เนื่องจากในข้อนี้ลักษณะเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นสมการคณิตศาสตร์ จึงสามารถใช้สมการนี้หาความสัมพันธ์ของความเร็ว และความเร่งโดยทำได้ดังนี้

จาก $y = 4 - \frac{1}{9}x^2$

Diff. เทียบเวลา $\dot{y} = -\frac{2}{9}x\dot{x} \longrightarrow v_y = -\frac{2}{9}xv_x$

Diff. เทียบเวลา $\ddot{y} = -\frac{2}{9}\dot{x}^2 - \frac{2}{9}x\ddot{x} = -\frac{2}{9}(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) \longrightarrow a_y = -\frac{2}{9}(v_x{}^2 + xa_x)$ (1)

และ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9}x$

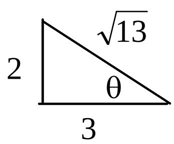


พิจารณาที่จุด x = 3

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9}x\Big|_{x=3} = -\frac{2}{3}$$

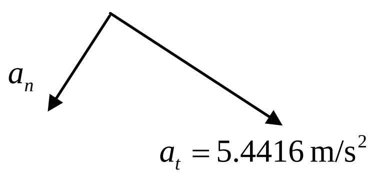
$$\left[\sum F_t = ma_t\right] \qquad mg\sin\theta = ma_t$$

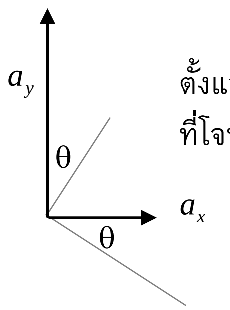
$$a_t = g\sin\theta = 9.81\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 5.4416\ \text{m/s}^2$$ <u>Ans</u>



$$\left[\sum F_n = ma_n\right] \qquad mg\cos\theta - N = ma_n \qquad (2)$$

ในขณะนี้ทราบความสัมพันธ์ความเร่ง a_x และ a_y และค่า a_t จะสามารถหาค่า a_n ได้ดังนี้





ตั้งแกนตามแกน + ที่โจทย์กำหนด

ความเร่งที่แสดงในรูปเป็นความเร่งที่ตำแหน่ง x = 3 ทั้งคู่ ความเร่งทั้งสองจึงต้องมีขนาดเท่ากัน ในรูปเพียงแต่แสดงค่าโดยพิกัดต่างกันเท่านั้น

จากรูปจะได้

$$a_x \cos\theta - a_y \sin\theta = a_t \longrightarrow a_x \frac{3}{\sqrt{13}} - a_y \frac{2}{\sqrt{13}} = 5.4416 \text{ m/s}^2 \qquad (3)$$

$$-a_x \sin\theta - a_y \cos\theta = a_n \longrightarrow -a_x \frac{2}{\sqrt{13}} - a_y \frac{3}{\sqrt{13}} = a_n \qquad (4)$$

จาก (1) จะพบว่าหากทราบค่าความเร็วที่จุด x = 3 แล้วจะสามารถหาความสัมพันธ์ของ a_x และ a_y ซึ่งเมื่อนำไปแทนในสมการ (3) และ (4) จะสามารถหาค่า a_n ได้

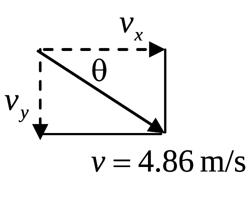
$$a_y = -\frac{2}{9}(v_x{}^2 + x a_x) \qquad (1)$$

หาความเร็วจุด x = 3 เนื่องจากระบบนี้ไม่มีแรงเสียดทาน จึงไม่มีการสูญเสียพลังงาน

$$E_A = E_{x=3}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}2^2 + 9.81(4-3) = \frac{1}{2}v^2 \longrightarrow v = 4.86 \text{ m/s}$$



จากรูปจะได้ $v_x = v\cos\theta = 4.86 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 4.0438 \text{ m/s}$

แทนค่า vx ในสมการ (1) และแทนค่า x = 3 จะได้

$$a_y = -\frac{2}{9}(4.0438^2 + 3a_x) \qquad (5)$$

แก้สมการ (3) และ (5) จะได้ $a_x = 2.8505 \text{ m/s}^2$

$$a_y = -5.5342 \text{ m/s}^2$$

แทนค่า a_x และ a_y ลงในสมการ (4) จะหา a_n ได้โดย

$$a_n = 3.0235 \text{ m/s}^2$$

แทนค่า a_n ลงในสมการ (2)

$$35(9.81)\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} - N = 35(3.0235)$$

$$N = 179.86 \text{ N}$$ Ans

หมายเหตุ ข้อนี้สามารถหาค่า a_n ได้อีกวิธี โดยการหารัศมีความโค้งของเส้นทางการเคลื่อนที่ดังนี้

รัศมีความโค้งของเส้นโค้งหาจาก

$$\rho_{xy} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

สมการเส้นโค้ง

$$\left.\begin{aligned} y &= 4-\frac{1}{9}x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{2}{9}x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{2}{9} \end{aligned}\right\}$$

ที่ x = 3

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9}\cdot 3 = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}$$

แทนค่าในสมการหารัศมีความโค้ง

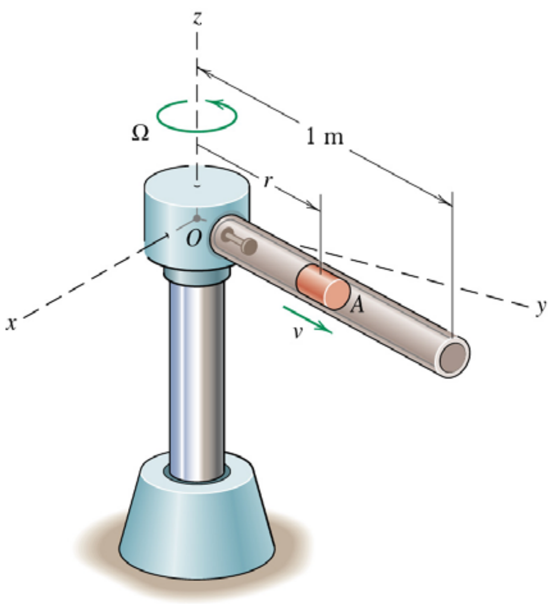
$$\rho_{xy} = \frac{\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|-\frac{2}{9}\right|} = 7.812$$

หา a_n จาก

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4.86^2}{7.812} = 3.0235 \text{ m/s}^2$$

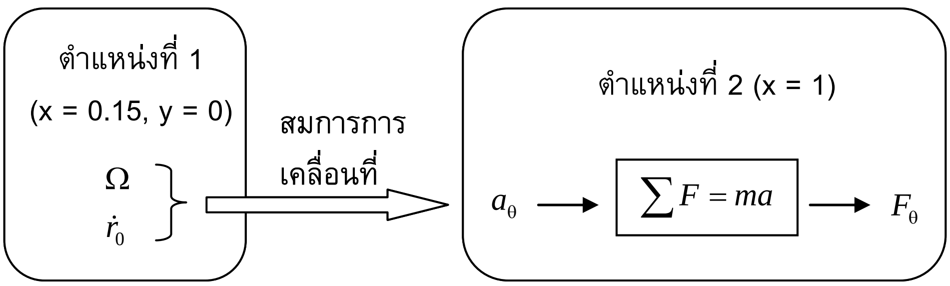
จะพบว่า a_n มีค่าเท่ากับการหาจากวิธีแรก

3/5 A small 180-g slider *A* moves without appreciable friction in the hollow tube, which rotates in a horizontal plane with a constant speed Ω = 7 rad/s. The slider is launched with an initial speed $\dot{r}_0$ = 20 m/s relative to the tube at the inertial coordinate x = 150 mm and y = 0. Determine the magnitude P of the horizontal force exerted on the slider by the tube just before the slider exits the tube. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.3/83]

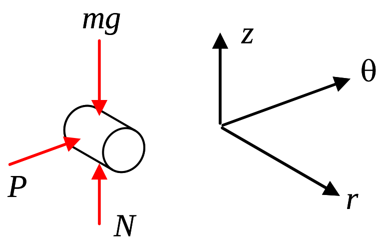


วิธีทำ ในข้อนี้กำหนดการเคลื่อนที่ของวัตถุที่สภาวะเริ่มต้นเคลื่อนที่ (วัตถุอยู่ที่ x = 0.15, y = 0) และให้หาแรงที่สภาวะก่อนวัตถุ A จะหลุดออกจากท่อ (x = 1) เพื่อหาแรงที่สภาวะก่อนออกจากท่อ จึงต้องทราบความเร่งก่อนออกจากท่อก่อน โดยความเร่งก่อนออกจากท่อหาได้โดยสมการการเคลื่อนที่ โดยใช้ข้อมูลจากการเคลื่อนที่ที่โจทย์กำหนดให้

ขั้นตอนการทำแสดงดังแผนภาพดังนี้



FBD



เนื่องจากจำเป็นต้องหาค่า a_θ ที่ตำแหน่งก่อนวัตถุออกจากท่อ ดังนั้นจึงพิจารณาสมการความเร่งในทิศทาง r-θ ก่อน

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\Omega^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\dot{r}\Omega \qquad (\dot{\theta} = \Omega = \text{const.})$$

จากสมการจะได้ว่า ถ้าทราบค่า $\dot{r}$ ที่ตำแหน่งก่อนวัตถุถูกปล่อยจากท่อจะสามารถหาค่า a_θ ได้

$$\left[\sum F_r = ma_r\right] \qquad 0 = m(\ddot{r} - r\Omega^2)$$

$$\ddot{r} = r\Omega^2 \qquad (1)$$

จากกฎลูกโซ่จะได้ $\ddot{r} = \dfrac{d\dot{r}}{dt} = \dfrac{d\dot{r}}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dt} = \dot{r}\cdot\dfrac{d\dot{r}}{dr}$

แทนความสัมพันธ์นี้ลงในสมการ (1)

$$\ddot{r} = \dot{r}\cdot\frac{d\dot{r}}{dr} = r\Omega^2 \longrightarrow \dot{r}d\dot{r} = r\Omega^2 dr$$

จากความสัมพันธ์นี้จะสามารถหาค่า $\dot{r}$ ที่ตำแหน่งก่อนวัตถุออกจากท่อได้

$$\int_{20}^{\dot{r}} \dot{r}d\dot{r} = \int_{0.15}^{1} r\Omega^2 dr$$

$$\left.\frac{\dot{r}^2}{2}\right|_{20}^{\dot{r}} = \Omega^2 \left.\frac{r^2}{2}\right|_{0.15}^{1}$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{20^2}{2} = 7^2\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0.15^2}{2}\right)$$

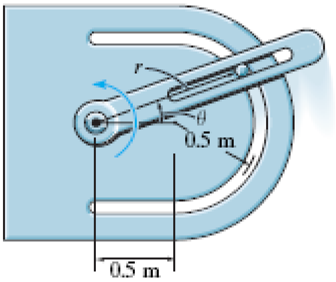
$$\dot{r} = 21.1636 \text{ m/s}$$

จะได้ $a_\theta = 2\dot{r}\Omega = 2(21.1636)(7)$

$$\left[\sum F_\theta = ma_\theta\right] \qquad P = ma_\theta = 0.18(2)(21.1636)(7) = 53.3 \text{ N}$$ Ans

ข้อสังเกต 1. ในข้อนี้แม้จะไม่มีแรงกระทำในแนว r และ a_r = 0 แต่ก็ยังมีค่า $\ddot{r}$ ซึ่งแสดงว่าผู้สังเกตที่หมุนไปกับท่อจะมองเห็นวัตถุเคลื่อนที่ออกจากท่อด้วยความเร่ง $\ddot{r}$

2. สมการ $\dot{r}d\dot{r} = \ddot{r}dr$ เทียบได้กับสมการ $vdv = ads$



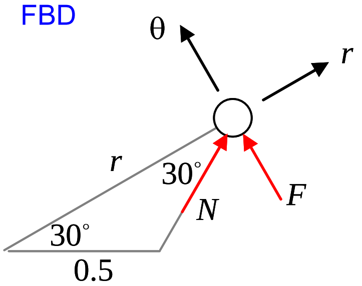
3/6 The 5-N (≈0.5-kg) particle is guided along the circular path using the slotted arm guide. If the arm has an angular velocity $\dot{\theta} = 4$ rad/s and an angular acceleration $\ddot{\theta} = 8$ rad/s^2 at the instant $\theta = 30^\circ$, determine the force of the guide on the particle. Motion occurs in the *horizontal plane*.

[Engineering Mechanics Dynamics 11th edition, R.C.Hibbeler, prob.13-90]

วิธีทำ ค่าต่างๆ ที่โจทย์กำหนดมีดังนี้

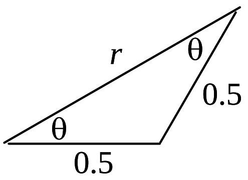
$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$$
$$\ddot{\theta} = 8 \text{ rad/s}^2$$
$$\theta = 30^\circ$$

FBD



$$\left[\sum F_r = ma_r\right] \quad N\cos 30^\circ = \frac{5}{9.81}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (1)$$

$$\left[\sum F_\theta = ma_\theta\right] \quad N\sin 30^\circ + F = \frac{5}{9.81}(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (2)$$



จากสมการ (1) และ (2) ต้องหาค่า $\dot{r}, \ddot{r}$ ให้ได้เสียก่อน จึงจะหาแรง N และ แรง F ได้

จากรูปจะได้ ที่ θ = 30°

$$\left.\begin{aligned} r &= 2(0.5)\cos\theta = \cos\theta \\ \dot{r} &= (-\sin\theta)\dot{\theta} \\ \ddot{r} &= (-\cos\theta)\dot{\theta}^2 - (\sin\theta)\ddot{\theta} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} r &= \cos 30^\circ = 0.866 \\ \dot{r} &= (-\sin 30)4 = -2 \\ \ddot{r} &= (-\cos 30)4^2 - (\sin 30)8 = -17.8564 \end{aligned}$$

แทนในสมการ (1) และ (2)

$$N\cos 30^\circ = \frac{5}{9.81}(-17.8564 - 0.866(16)) \longrightarrow N = -18.6638 \text{ N}$$

$$N = 18.6638 \text{ N} \swarrow$$

$$(-18.6638)\sin 30^\circ + F = \frac{5}{9.81}(0.866(8) + 2(-2)(4))$$

$$F = 4.708 \text{ N}$$ <u>Ans</u>

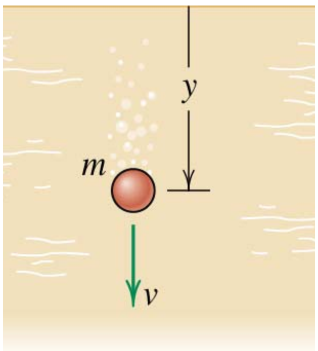
แบบฝึกหัด

1. In a test of resistance to motion in an oil bath, a small steel ball of mass *m* is released from rest at the surface ($y = 0$). If the resistance to motion is given by $R = kv$ where *k* is a constant, derive an expression for depth *h* required for the ball to reach a velocity *v*. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

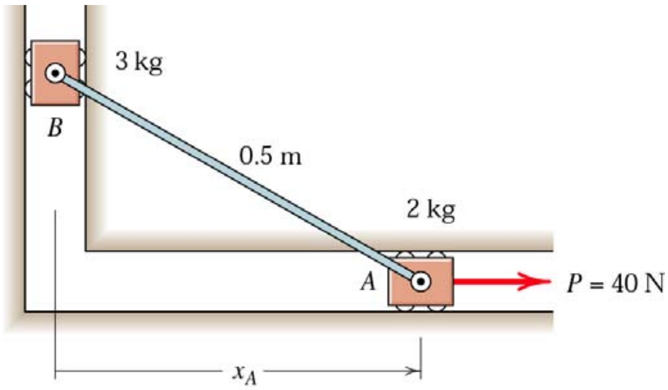
   (Ans $h = \frac{m^2 g}{k^2}\ln\left(\frac{1}{1 - kv/(mg)}\right) - \frac{mv}{k}$)

2. The sliders *A* and *B* are connected by a light rigid bar of length $l = 0.5$ m and move with negligible friction in the horizontal slots shown. For the position where $x_A = 0.4$ m, the velocity of *A* is $v_A = 0.9$ m/s to the right. Determine the acceleration of each slider and the force in the bar at this instant. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

   (Ans $a_A = 1.364$ m/s^2 right
   $a_B = 9.32$ m/s^2 down
   T = 46.6 N)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



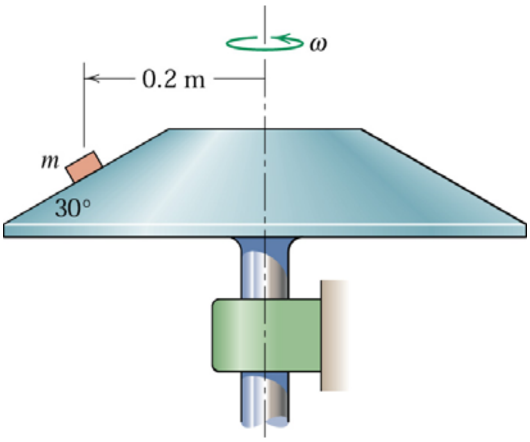
รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2

3. The small object of mass *m* is placed on the rotating conical surface at the radius shown. If the coefficient of static friction between the object and the rotating surface is 0.8, calculate the maximum angular velocity ω of the cone about the vertical axis for which the object will not slip. Assume very gradual angular velocity changes. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

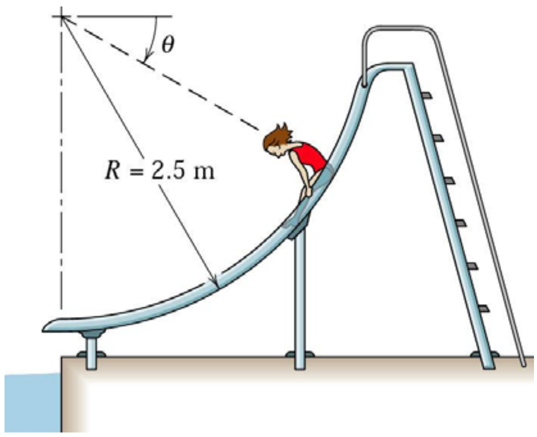
   (Ans $\omega = 2.73$ rad/s)

4. Beginning from rest when $\theta = 20°$, a 35-kg child slides with negligible friction down the sliding board which is in the shape of a 2.5-m circular arc. Determine the tangential acceleration and speed of the child, and the normal force exerted on her (*a*) when $\theta = 30°$ and (*b*) when $\theta = 90°$. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

(<u>*Ans*</u> (a) a_t = 8.50 m/s^2, v = 2.78 m/s
N = 280 N
(b) a_t = 0 m/s^2, v = 5.68 m/s
N = 795 N)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 3



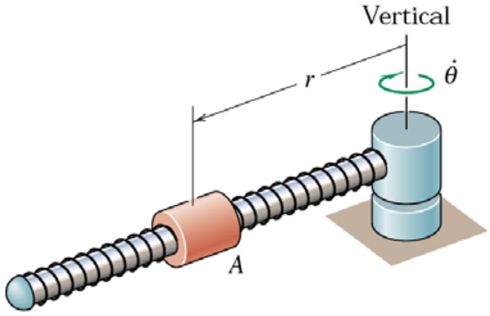
รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 4

5. The spring-mounted 0.8-kg collar *A* oscillates along the horizontal rod, which is rotating at the constant angular rate $\dot{\theta}$ = 6 rad/s. At a certain instant, *r* is increasing at the rate of 800 mm/s. If the coefficient of kinetic friction between the collar and the rod is 0.40, calculate the friction force *F* exerted by the rod on the collar at this instant. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

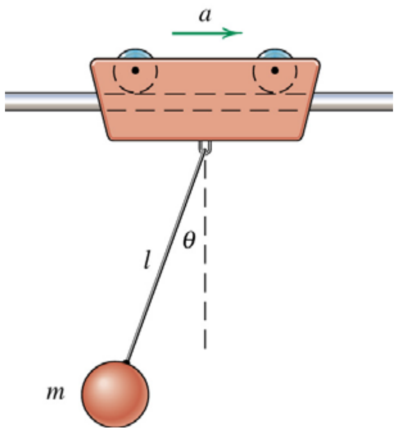
(<u>*Ans*</u> F = 4.39 N)

6. The small pendulum of mass m is suspended from a trolley which runs on a horizontal rail. The trolley and pendulum are initially at rest with θ = 0. If the trolley is given a constant acceleration *a* = *g*, determine the maximum angle θ_{max} through which the pendulum swings. Also find the tension *T* in the cord in terms of θ. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

(<u>*Ans*</u> $\theta_{max} = \pi/2, \quad T = mg(3\sin\theta + 3\cos\theta - 2)$)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 5



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 6

พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 5 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

5/1 บทนำ

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของอนุภาค และได้ทราบถึงระบบพิกัด และสมการที่ใช้วิเคราะห์การเคลื่อนที่แต่ละรูปแบบมาแล้ว สำหรับการเคลื่อนที่ของอนุภาค หรือวัตถุอื่นใดที่ถูกพิจารณาเป็นอนุภาค การเคลื่อนที่ของตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งของอนุภาคก็เพียงพอที่จะบอกการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งก้อน สำหรับในบทนี้วัตถุที่เราพิจารณาจะมีขนาดใหญ่ขึ้นเทียบกับเส้นทางการเคลื่อนที่ ในกรณีนี้การเคลื่อนที่ของจุดแต่ละจุดในวัตถุอาจจะไม่เท่ากันเนื่องจากเกิดการหมุนของวัตถุขึ้น ดังนั้นในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งจึงจำเป็นที่จะต้องพิจารณาการเคลื่อนที่ทั้งแบบเชิงเส้น และแบบเชิงมุม

การศึกษาในบทนี้สามารถนำไปใช้วิเคราะห์การทำงานของชิ้นส่วนกลต่างๆ เช่น เฟืองลูกเบี้ยว หรือกลไกข้อต่อต่างๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญของการศึกษาจลศาสตร์ของวัตถุแข็งเกร็งซึ่งจะพิจารณาผลของแรงและการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งต่อไป

วัตถุแข็งเกร็ง

วัตถุแข็งเกร็งคือวัตถุที่ระยะห่างระหว่าง 2 จุดใดๆ ในวัตถุมีค่าคงที่เสมอ นั่นคือ วัตถุแข็งเกร็งคือวัตถุที่ไม่มีการเสียรูปเมื่อมีแรงมากระทำนั่นเอง แต่ในความเป็นจริงวัตถุทุกชนิดจะต้องมีการเสียรูปเสมอเมื่อมีแรงมากระทำ หากการเสียรูปนั้นมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับการเคลื่อนที่อื่นของวัตถุ เราอาจจะสมมุติให้วัตถุนั้นเป็นวัตถุแข็งเกร็งได้

การเคลื่อนที่ในระนาบ

การเคลื่อนที่ในระนาบเกิดขึ้นเมื่อทุกๆ ส่วนของวัตถุเคลื่อนที่ในระนาบที่ขนานกัน หรืออาจกล่าวว่าปัญหาการเคลื่อนที่ในระนาบ เป็นการเคลื่อนที่ในสองมิตินั่นเอง การเคลื่อนที่ในระนาบสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 รูปแบบดังแสดงในรูปที่ 1

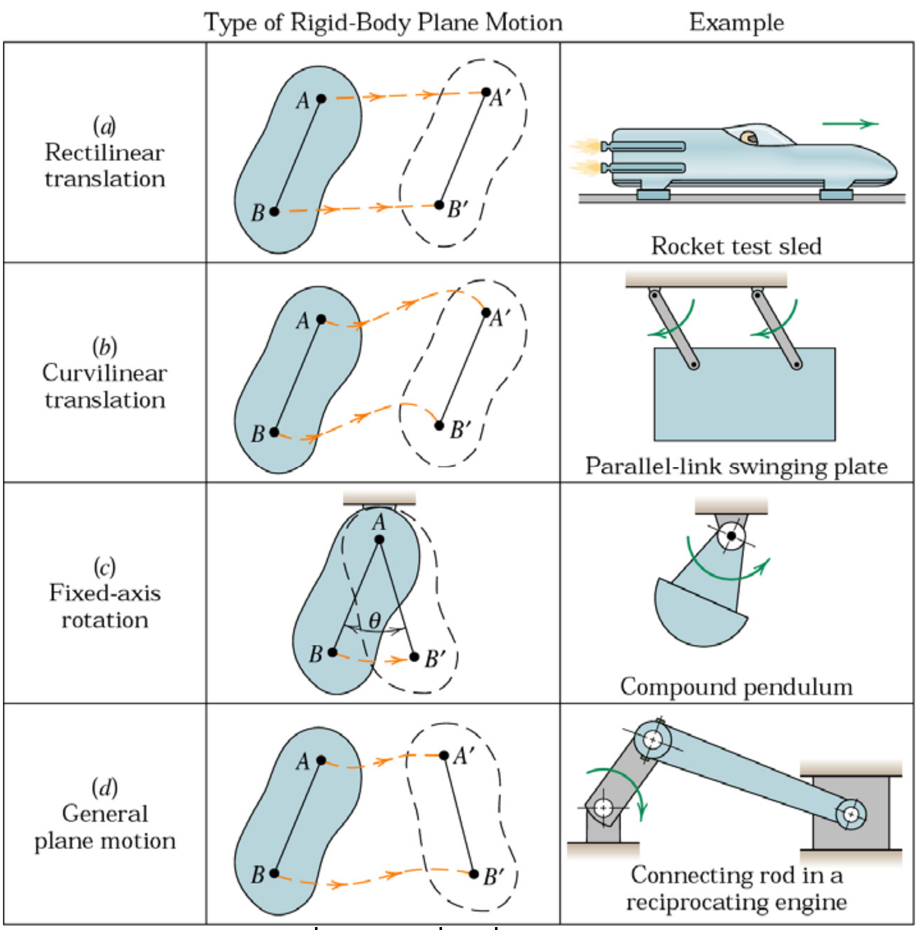
1. <u>การเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ (Translation)</u>

การเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ เป็นการเคลื่อนที่ซึ่งทุกๆ เส้นใดๆ ในวัตถุ จะเคลื่อนที่ขนานกับตำแหน่งเริ่มแรกของเส้นนั้นเสมอ การเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่จึงเป็นการเคลื่อนที่ที่ไม่มีการหมุน ตัวอย่างการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ในแนวเส้นตรง (Rectilinear translation) แสดงดังรูปที่ 1(a) ส่วนการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ในแนวเส้นโค้ง (Curvilinear translation) แสดงดังรูปที่ 1(b) ตัวอย่างด้านขวามือในรูปที่ 1(b) แสดงการเคลื่อนที่ของแผ่นกระดานที่ถูกห้อยด้วยข้อต่อขนานกัน 2 ข้อ ซึ่งการเคลื่อนที่ของแผ่นกระดานจัดเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ในแนวโค้ง เนื่องจากทุกๆ เส้นบนแผ่นกระดาน (เช่นเส้นขอบทั้งสองข้าง) วางตัวขนานกับเส้นตอนเริ่มเคลื่อนที่

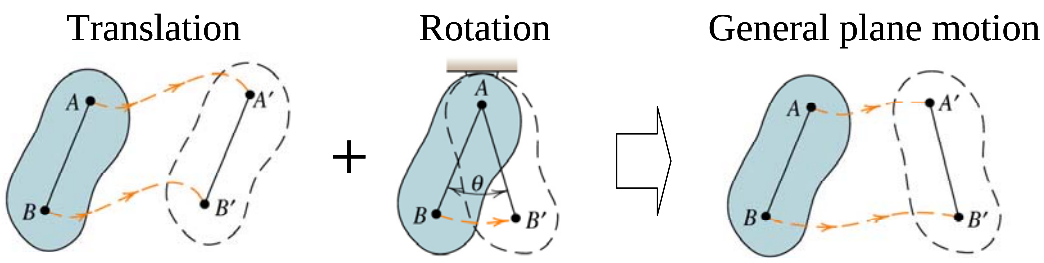
ตลอดเวลาที่ เนื่องจากการเคลื่อนที่ของจุดใดๆ ในวัตถุที่เคลื่อนที่แบบเลื่อนที่จะเหมือนกัน ดังนั้นการจึงสามารถพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรณีนี้ เป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคได้

2. <u>การเคลื่อนที่แบบหมุนรอบจุดยึด (Fixed-axis rotation)</u>

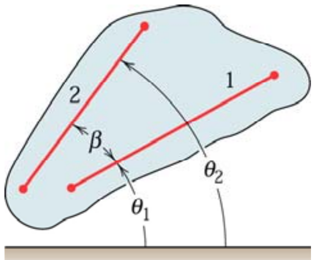
การหมุนรอบจุดยึดแสดงดังรูปที่ 1(c) จะพบว่าจุดใดๆ ในวัตถุจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบแกนหมุน และหมุนด้วยมุมที่เท่าๆ กันที่เวลาเดียวกัน



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่ในระนาบ [1]



รูปที่ 2 การเคลื่อนที่ในระนาบแบบทั่วไป [1]



รูปที่ 3 การหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง [1]

3. <u>การเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ (General plane motion)</u>

การเคลื่อนที่แบบนี้เป็นการเคลื่อนที่ที่ผสมกันระหว่างการเลื่อนที่และการหมุน ดังแสดงในรูปที่ 1(d) และรูปที่ 2 ซึ่งการเคลื่อนที่ของวัตถุสามารถแบ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ในช่วงแรก และค่อยเคลื่อนที่แบบหมุนในช่วงต่อมา ตัวอย่างด้านขวามือ ในรูปที่ 1(d) แสดงการเคลื่อนที่กลไกลูกสูบ โดยการเคลื่อนที่ของข้อต่อสีฟ้าเป็นการเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ สำหรับข้อเหวี่ยงจะเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุน ส่วนกระบอกสูบจะเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่

5/2 การหมุน

พิจารณาการหมุนของวัตถุแข็งเกร็งแสดงดังรูปที่ 3 การเคลื่อนที่ของเส้น 1 และเส้น 2 วัดจากจุดอ้างอิงแสดงด้วยมุม θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ โดยเส้นทั้งสองเส้นวางตัวทำมุมกัน β ความสัมพันธ์ของมุม θ_1 และ θ_2 เป็นดังนี้

$$\theta_2 = \theta_1 + \beta \tag{1}$$

เนื่องจากเป็นวัตถุแข็งเกร็งไม่มีการเสียรูป มุม β จึงมีค่าคงที่ตลอด จากสมการ (1) จะได้

$$\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1, \qquad \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1, \qquad \ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1 \tag{2}$$

ซึ่งหมายความว่าเส้นใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็งจะหมุนด้วยการขจัดเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม และความเร่งเชิงมุมเท่ากัน เมื่อกำหนดให้วัตถุหมุนโดยมีการขจัดเชิงมุมเป็น θ จะสามารถหาความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมได้จาก

ความเร็วเชิงมุม $$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \tag{3}$$

ความเร่งเชิงมุม $$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \tag{4}$$

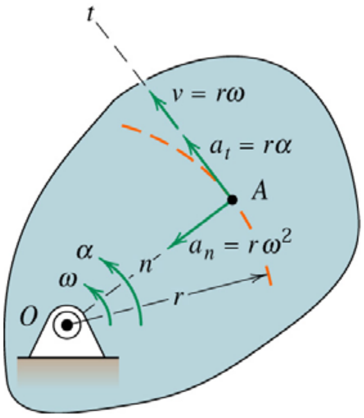
ความสัมพันธ์อื่นๆ สามารถหาได้ทำนองเดียวกับการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ดังนี้

$$vdv = ads \quad \Rightarrow \quad \omega d\omega = \alpha d\theta \text{ หรือ } \dot{\theta} d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta \tag{5}$$

<u>ข้อสังเกต</u> รูปแบบสมการที่ (3) (4) และ (5) เป็นเช่นเดียวกับการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ เพียงแต่เปลี่ยน x เป็น θ, v เป็น ω และเปลี่ยน a เป็น α

การหมุนรอบจุดยึด

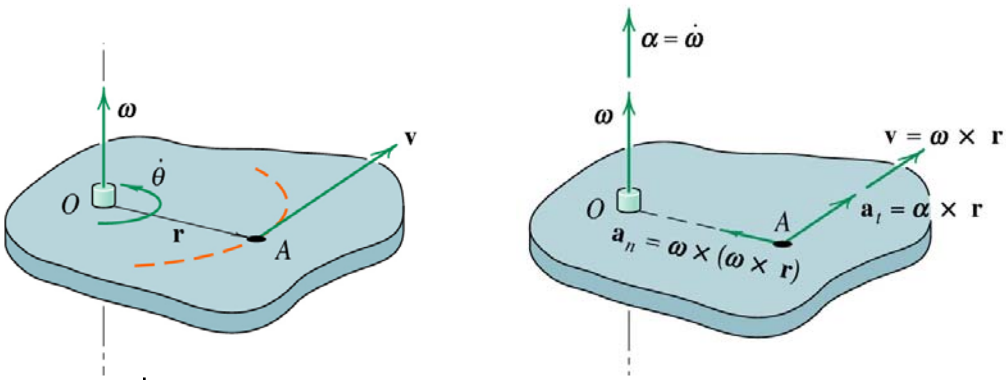
การหมุนรอบจุดยึดแสดงดังรูปที่ 4 การพิจารณาสามารถทำได้โดยใช้พิกัดแบบ n-t โดยแกน n ตั้งให้ทิศทางบวกชี้เข้าสู่จุดศูนย์กลางส่วนโค้ง ซึ่งในที่นี้คือจุดที่ยึดแน่น ส่วนแกน t ตั้งให้มีทิศทางบวก ตามทิศทางการหมุน โดยใช้สมการในระบบพิกัด n-t ที่ได้ศึกษามาแล้วในบทที่ 2 จะสามารถหาความเร็ว และความเร่งได้ดังนี้



รูปที่ 4 การหมุนรอบจุดยึด [1]

ความเร็วจุด A	$v = \omega r$	(6)
ความเร่งในแนว n	$a_n = r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r} = v\omega$	(7)
ความเร่งในแนว t	$a_t = r\alpha$	(8)

<u>การพิจารณาในแบบเวคเตอร์</u>



รูปที่ 5 การพิจารณาความเร็วและความเร่งของการหมุนแบบเวคเตอร์ [1]

ความเร็วเชิงมุม ϖ เป็นปริมาณเวคเตอร์ หาทิศทางได้จากกฎมือขวา โดยวางมือให้นิ้วทั้ง 4 วนตามทิศทางการหมุน จะได้ว่าทิศทางของ ϖ จะเป็นทิศทางตามการชี้ของนิ้วโป้ง ใน

รูปที่ 5(ซ้าย) แสดงทิศทางการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้น $\vec{\omega}$ จึงมีทิศพุ่งขึ้นด้านบน ความเร็วเชิงเส้น $\vec{v}$ ที่จุด A สามารถหาได้ดังนี้

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (9)$$

สำหรับความเร่งสามารถหาได้โดยหาอนุพันธ์ของความเร็วในสมการ (9) ดังนี้

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad (10)$$

เมื่อพิจารณาทิศทางของความเร่งจากรูปที่ 5(ขวา) จะได้ว่า

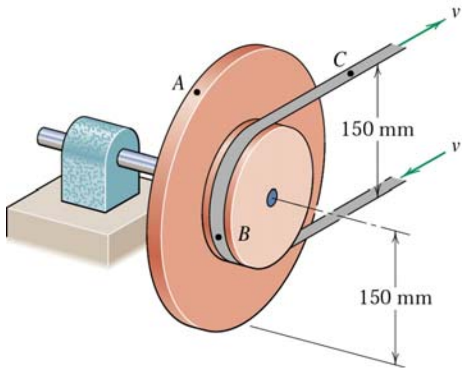
$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (11)$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad (12)$$

เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

5/1 The belt-driven pulley and attached disk are rotating with increasing angular velocity. At a certain instant the speed *v* of the belt is 1.5 m/s, and the total acceleration of point *A* is 75 m/s^2. For this instant determine (*a*) the angular acceleration α of the pulley and disk, (*b*) the total acceleration of point *B*, and (*c*) the acceleration of point *C* on the belt. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/15]



วิธีทำ โจทย์กำหนดความเร็ว ความเร่งที่จุดต่างๆ ดังนี้

$$v_C = 1.5 \text{ m/s} \qquad a_A = 75 \text{ m/s}^2$$

ความเร็ว v_C ของสายพานที่จุด C มีค่าเท่ากับความเร็วของสายพานที่สัมผัสกับพูลเล่ย์ และความเร็วของพูลเล่ย์ที่จุดสัมผัสนั้น จากความเร็วของพูลเล่ย์จะหาความเร็วรอบหมุนของพูลเล่ย์ได้

$$[v = \omega r] \qquad 1.5 = \omega(0.15/2) \longrightarrow \omega = 20 \text{ rad/s}$$

เนื่องจากพูลเล่ย์ถือเป็นวัตถุแข็งเกร็ง ดังนั้นความเร็วเชิงมุมของพูลเล่ย์ที่ตำแหน่งใดๆ ต้องมีค่าเท่ากัน และเท่ากับ 20 rad/s

<u>พิจารณาความเร่งที่จุด A</u>

$$[a_n = \omega^2 r] \qquad a_n = \omega^2 r_A = 20^2(0.15) = 60 \text{ m/s}^2$$

$$\left[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\right] \qquad a_t = \sqrt{a^2 - a_n^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45 \text{ m/s}^2$$

$$[a_t = \alpha r] \qquad \alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{45}{0.15} = 300 \text{ rad/s}^2$$

<u>Ans</u>

ทำนองเดียวกับความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุมของพูลเล่ย์ที่ตำแหน่งใดๆ ต้องมีค่าเท่ากันเช่นกัน และมีค่าเท่ากับ 300 rad/s^2

<u>พิจารณาความเร่งที่จุด B</u>

$[a_t = \alpha r]$ $a_t = 300(0.15/2) = 22.5\ \mathrm{m/s^2}$

$[a_n = \omega^2 r]$ $a_n = 20^2(0.15/2) = 60\ \mathrm{m/s^2}$

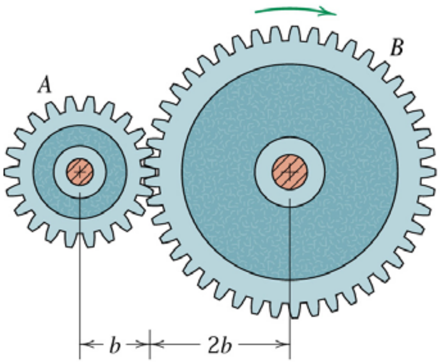
$\left[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\right]$ $a_B = \sqrt{22.5^2 + 30^2} = 37.5\ \mathrm{m/s^2}$ <u>Ans</u>

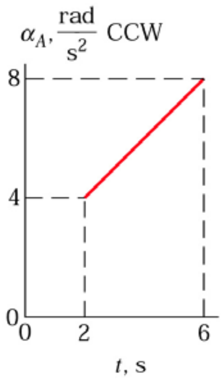
<u>พิจารณาความเร่งที่จุด C</u>

จุด C เป็นจุดบนสายพานซึ่งเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ ดังนั้นความเร่งจึงอยู่ในทิศทางของการเคลื่อนที่เท่านั้น ความเร่งนี้ต้องมีค่าเท่ากับความเร่งในแนวสัมผัส a_t ที่จุด B เพราะถ้าความเร่งในแนวสัมผัสที่ 2 จุดบนสายพานไม่เท่ากันแล้ว เมื่อเวลาผ่านไปจะทำให้ความเร็วทั้ง 2 จุดนั้นไม่เท่ากัน สายพานจะหย่อน หรือขาดได้ ด้วยเหตุผลนี้

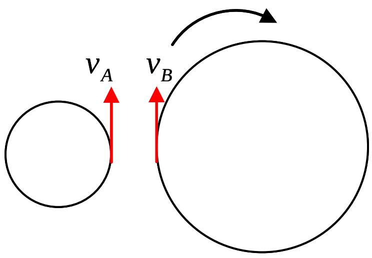
$$a_C = (a_t)_B = 22.5\ \mathrm{m/s^2}$$ <u>Ans</u>

5/2 The design characteristics of a gear-reduction unit are under review. Gear *B* is rotating clockwise with a speed of 300 rev/min when a torque is applied to gear *A* at time t = 2 s to give gear *A* a counterclockwise acceleration α which varies with the time for a duration of 4 seconds as shown. Determine the speed N_B of gear *B* when t = 6 s. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/23]





วิธีทำ ในโจทย์ข้อนี้บอกข้อมูลของเฟือง A และให้หาข้อมูลของเฟือง B ดังนั้นจึงจำเป็นจะต้องทราบความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของเฟือง A กับเฟือง B เสียก่อน



เฟืองขบกัน ตำแหน่งที่เฟืองขบกันต้องมีความเร็วเท่ากัน

$$v_A = v_B$$

$$\omega_A r_A = \omega_B r_B$$

$$\omega_A b = \omega_B (2b) \longrightarrow \omega_A = 2\omega_B$$

เมื่อเฟือง B หมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 300 rev/min เฟือง A จึงหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม 600 rev/min $= 600(\frac{2\pi}{60}) = 20\pi$ rad/s

พิจารณาเฟือง A

$$\left[\alpha = \frac{d\omega}{dt}\right]$$

$$\int_{20\pi}^{\omega_A} d\omega = \int_2^6 \alpha dt$$ = พื้นที่ใต้กราฟ a-t ในช่วง 2-6 วินาที

$$\omega_A - 20\pi = \frac{1}{2}(4)(4+8)$$

$$\omega_A = 20\pi + 24$$

$$\omega_B = \frac{\omega_A}{2} = 10\pi + 12 = 43.4159 \text{ rad/s} \longrightarrow \omega_B = 414.59 \text{ rev/min}$$ Ans

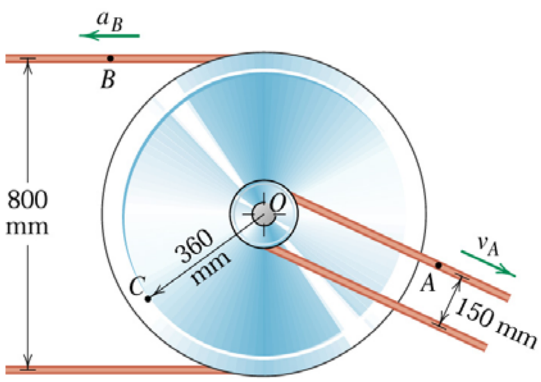
แบบฝึกหัดหัวข้อ 5/2

1. The two V-belt pulleys form an integral unit and rotate about the fixed axis at *O*. At a certain instant, point *A* on the belt of the smaller pulley has a velocity v_A = 1.5 m/s, and point *B* on the belt of the larger pulley has an acceleration a_B = 45 m/s^2 as shown. For this instant determine the magnitude of the acceleration a_C of point *C* and sketch the vector in your solution. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

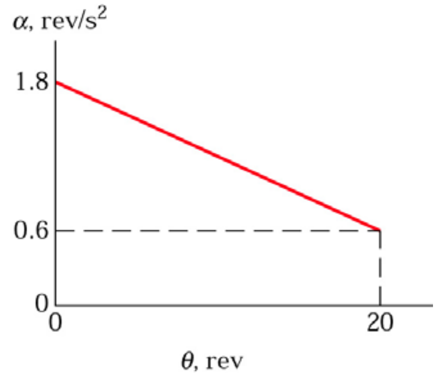
(<u>*Ans*</u> a_C = 149.6 m/s^2)

2. A clockwise variable torque is applied to a flywheel at time *t* = 0 causing its clockwise angular acceleration to decrease linearly with angular displacement θ during 20 revolutions of the wheel as shown. If the clockwise speed of the flywheel was 300 rev/min at *t* = 0, determine its speed *N* after turning the 20 revolutions. (*Suggestion*: Use units of revolution instead of radians.) [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

(<u>*Ans*</u> ω = 512.64 rev/min)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



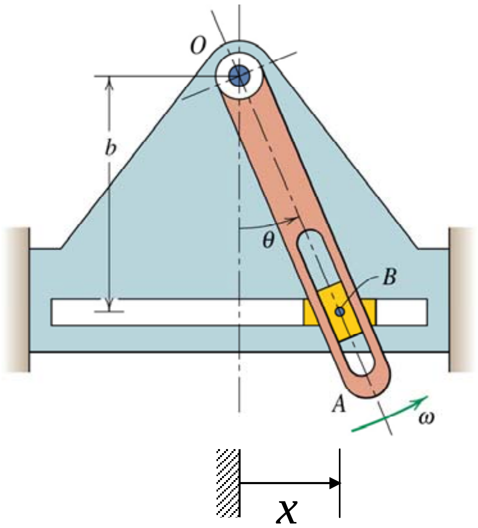
รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2

5/3 Absolute Motion

วิธีการ Absolute Motion เป็นวิธีการหาค่าการขจัด ความเร็วและความเร่ง ของจุด หรือชิ้นส่วนโดยอาศัยการสร้างความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ และการหาอนุพันธ์ของความสัมพันธ์นั้นเทียบกับเวลา พิจารณาตัวอย่างด้านล่าง

ตัวอย่างการคำนวณ Absolute Motion

หากกำหนดให้ชิ้นส่วน OA ในกลไกที่แสดงในรูปที่ 6 มีความเร็วเชิงมุมคงที่ ω ให้คำนวณหาความเร็วและความเร่งของหมุน B



รูปที่ 6 การเคลื่อนที่ของหมุด B ในสล๊อต [1]

เนื่องจากต้องการหาความเร็วเชิงเส้นของหมุด B โดยทราบความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วน OA ดังนั้นจึงต้องหาความพันธ์ระหว่างมุม θ และระยะ x จากรูปจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = b\tan\theta$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา $v_B = \dot{x} = b\dot{\theta}\sec^2\theta = b\omega\sec^2\theta$ Ans

$$a_B = \ddot{x} = b\ddot{\theta}\sec^2\theta + 2b\dot{\theta}^2\sec^2\theta\tan\theta$$

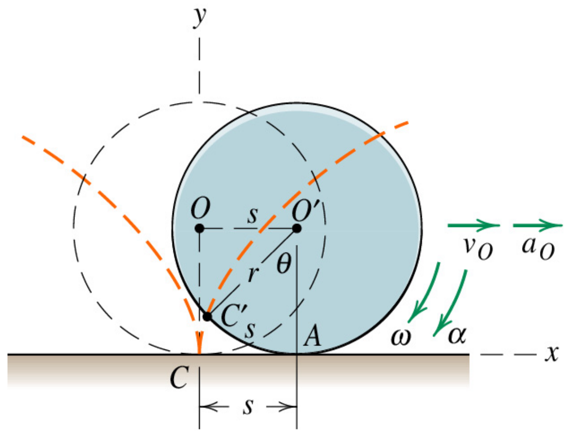
$\ddot{\theta} = 0$ เนื่องจากชิ้นส่วนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ ดังนั้น

$$a_B = 2b\dot{\theta}^2\sec^2\theta\tan\theta = 2b\omega^2\sec^2\theta\tan\theta$$ Ans

เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

5/3 A wheel of radius r rolls on a flat surface without slipping. Determine the angular motion of the wheel in terms of the linear motion of its center *O*. Also determine the acceleration of a point on the rim of the wheel as the point come into contact with the surface on which the wheel rolls. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, sample prob.5/4]



วิธีทำ รูปโจทย์แสดงการกลิ้งของล้อโดยไม่ไถล เริ่มแรกจุดศูนย์กลางล้ออยู่ที่จุด *O* และล้อสัมผัสพื้นที่จุด *C* เมื่อล้อหมุนไป จุดศูนย์กลางจะเคลื่อนไปที่ตำแหน่ง *O′* และจุดสัมผัสพื้นเปลี่ยนไปเป็นจุด *A* ส่วนจุดสัมผัสเดิม *C* เคลื่อนที่ไปที่ตำแหน่ง *C′* โดยล้อหมุนไปได้ θ

เมื่อพิจารณาระยะการเคลื่อนที่ จะพบว่าระยะที่จุดศูนย์กลางเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ *s* ซึ่งจะเท่ากับระยะจากจุด *C* ไปยังจุด *A* ด้วย ซึ่งถ้าล้อกลิ้งโดยไม่ไถลจะได้ว่าระยะจากจุด *C* ไปยังจุด *A* จะเท่ากับระยะจากจุด *C′* ไปยังจุด *A* ซึ่งเป็นความยาวส่วนโค้ง ซึ่งมีมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับมุมที่ล้อหมุนไปได้ θ ดังนั้น

$$s = \mathrm{arc}(C'A) = r\theta \qquad \text{Ans}$$

หาความเร็วและความเร่งที่จุดศูนย์กลางได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} v_O &= \dot{s} = r\dot{\theta} = r\omega \\ a_O &= \ddot{s} = r\ddot{\theta} = r\alpha \end{aligned}\right\} \qquad \text{Ans}$$

โดย ω และ α เป็นความเร็วและความเร่งเชิงมุมของการหมุนของล้อ

<u>พิจารณาความเร็วและความเร่งของจุด *C* ที่อยู่ขอบของล้อ</u>

ตั้งแกนพิกัด *x*-*y* โดยให้จุด *C* เป็นจุดกำเนิดดังแสดงในรูป การเคลื่อนที่ของจุด *C* แสดงโดยแนวเส้นประสีส้ม ขนาดการเคลื่อนที่ในทิศทาง *x* และ *y* ของจุด *C* แสดงดังสมการได้ดังนี้

$$x = s - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$
$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1-\cos\theta) = v_O(1-\cos\theta)$$
$$\ddot{x} = \dot{v}_O(1-\cos\theta) + v_O\dot{\theta}\sin\theta$$
$$= a_O(1-\cos\theta) + r\omega^2\sin\theta$$

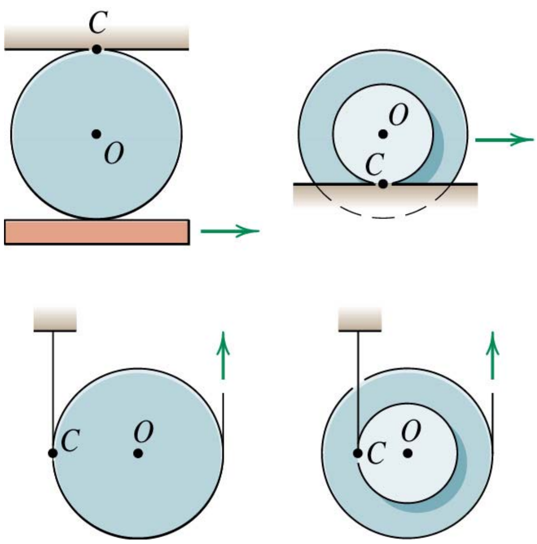
$$y = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta)$$
$$\dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta = v_O\sin\theta$$
$$\ddot{y} = \dot{v}_O\sin\theta + v_O\dot{\theta}\cos\theta$$
$$= a_O\sin\theta + r\omega^2\cos\theta$$

ที่ตำแหน่งสัมผัสพื้น $\theta = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{x} = 0 & \dot{y} = 0 \\ \ddot{x} = 0 & \ddot{y} = r\omega^2 \end{array}\right\} \quad \underline{\text{Ans}}$$

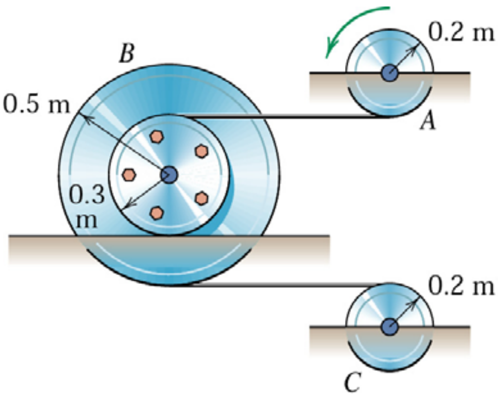
Note

1. ผลในข้อนี้ จะนำไปใช้ต่อไปในการพิจารณาความเร็วและความเร่งของกลไกที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น
2. ผลในข้อนี้อยู่ในเงื่อนไขที่ว่า ล้อกลิ้งโดยไม่ไถล ถ้ามีการไถลเกิดขึ้นความเร็วและความเร่งจะไม่เป็นไปตามนี้
3. ที่จุดสัมผัสพื้น จะมีความเร็วในขณะนั้นเท่ากับศูนย์ ทำนองเดียวกับปัญหาในข้อนี้ จุด C ในรูปต่างๆ ต่อไปนี้ จะมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากเป็นจุดที่สัมผัสกับชิ้นส่วนที่หยุดนิ่ง (ล้อกลิ้งโดยไม่ไถล)



5/4 The cable from drum *A* turns the double wheel *B*, which rolls on its hubs without slipping. Determine the angular velocity ω and angular acceleration α of drum *C* for the instant when the angular velocity and angular acceleration of *A* are 4 rad/s and 3 rad/s^2, respectively, both in the counterclockwise direction.

[Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/40]

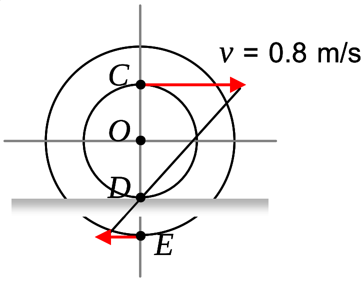


วิธีทำ โจทย์กำหนด ω_A และ α_A มาให้ ทำให้ความความเร็วและความเร่ง (ในแนวสัมผัส) ที่จุด *A* ได้ดังนี้

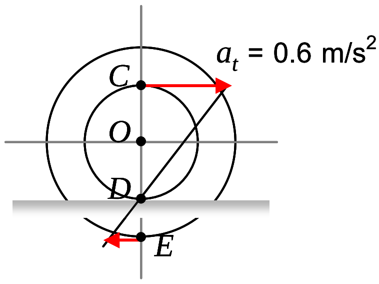
$$v_A = \omega_A r_A = 4(0.2) = 0.8\text{ m/s} \qquad \text{ทิศทาง} \longrightarrow$$

$$(a_A)_t = \alpha_A r_A = 3(0.2) = 0.6\text{ m/s}^2 \qquad \text{ทิศทาง} \longrightarrow$$

ความเร็วและความเร่ง (ในแนวสัมผัส) ที่จุด *A* จะต้องเท่ากับความเร็วและความเร่ง (ในแนวสัมผัส)ของเคเบิลที่สัมผัสกับล้อ *B* (จุด *C*) ถ้าไม่เท่ากันเคเบิลอาจจะหย่อนหรือขาดได้



ความเร็ว



ความเร่ง

จุดที่ทราบความเร็วและความเร่งอีกจุดหนึ่งได้แก่จุด *D* ซึ่งเป็นจุดที่ล้อ *B* สัมผัสกับพื้น เนื่องจากเป็นการกลิ้งโดยไม่ไถล ความเร็วและความเร่ง (ในแนวสัมผัส) ที่จุดนี้จึงเป็นศูนย์ ในขณะนี้ จึงเปรียบเสมือนว่าเส้นตรง *EDOC* กำลังหมุนรอบจุด *D* อยู่ ดังนั้นจะหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ที่จุด *D* และจุด *E* ได้ดังนี้

$$ds_C = \overline{DC}\cdot d\theta \qquad v_C = \overline{DC}\cdot\omega_B \qquad (a_C)_t = \overline{DC}\cdot\alpha_B$$

$$ds_E = \overline{DE}\cdot d\theta \qquad v_E = \overline{DE}\cdot\omega_B \qquad (a_E)_t = \overline{DE}\cdot\alpha_B$$

หาค่า ω_B และ α_B ของล้อ *B*

$$v_C = \overline{DC}\cdot\omega_B \longrightarrow 0.8 = 0.6\cdot\omega_B \longrightarrow \omega_B = 4/3\ \text{rad/s}$$

$$(a_C)_t = \overline{DC}\cdot\alpha_B \longrightarrow 0.6 = 0.6\cdot\alpha_B \longrightarrow \alpha_B = 1\ \text{rad/s}^2$$

หาค่า v_E และ a_E ของจุด *E*

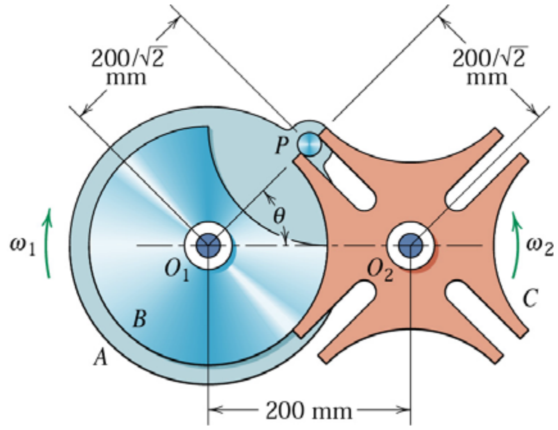
$$v_E = \overline{DE}\cdot\omega_B \longrightarrow v_E = (0.5-0.3)\cdot 4/3 \longrightarrow v_E = 0.2667\ \text{m/s}$$

$$(a_E)_t = \overline{DE}\cdot\alpha_B \longrightarrow (a_E)_t = (0.5-0.3)\cdot 1 \longrightarrow (a_E)_t = 0.2\ \text{m/s}^2$$

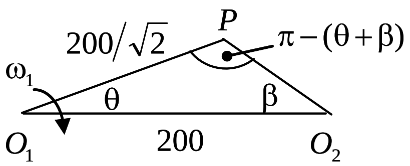
ค่า v_E และ a_E ของจุด *E* จะเท่ากับความเร็วและความเร่งของจุดที่เคเบิลสัมผัสกับล้อ *C* ดังนั้นจะหาค่า ω และ α ของล้อ *C* ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} v_E = \omega_C r_C &\longrightarrow 0.2667 = \omega_C(0.2) \longrightarrow \omega_C = 1.333\ \text{rad/s} \\ (a_E)_t = \alpha_C r_C &\longrightarrow 0.2 = \alpha_C(0.2) \longrightarrow \alpha_C = 1\ \text{rad/s}^2 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{Ans}}$$

5/5 The Geneva wheel is a mechanism for producing intermittent rotation. Pin *P* in the integral unit of wheel *A* and locking plate *B* engages the radial slots in wheel *C* thus turning wheel *C* one-fourth of a revolution for each revolution of the pin. At the engagement position shown, θ = 45º. For a constant clockwise angular velocity ω_1 = 2 rad/s of wheel *A*, determine the corresponding counterclockwise angular velocity ω_2 of wheel *C* for θ = 20º. (Note that the motion during engagement is governed by the geometry of triangle O_1O_2P with changing θ.) [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/53]



วิธีทำ พิจารณาสามเหลี่ยม O_1O_2P ดังแสดงในรูปด้านล่าง



จากกฎของ sine

$$\frac{200}{\sqrt{2}\sin\beta} = \frac{200}{\sin(\pi-(\theta+\beta))}$$

$$\sin(\pi-(\theta+\beta)) = \sqrt{2}\sin\beta$$

$$\sin(\theta+\beta) = \sqrt{2}\sin\beta$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา $(\dot\theta+\dot\beta)\cos(\theta+\beta) = \sqrt{2}\dot\beta\cos\beta$

$$\dot\theta\cos(\theta+\beta) = \dot\beta(\sqrt{2}\cos\beta - \cos(\theta+\beta)) \qquad (1)$$

ที่ θ = 20º

จากกฎของ cosine

$$(O_2P)^2 = \left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + 200^2 - 2\left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)(200)\cos 20^\circ$$

$O_2P = 82.7222$

จากกฎของ sine $\dfrac{200}{\sqrt{2}\sin\beta} = \dfrac{82.7222}{\sin 20^\circ}$

$$\sin\beta = 0.5847 \longrightarrow \beta = 35.7829^\circ$$

แทนค่า θ, β, $\dot{\theta}$ ในสมการ (1)

$$(2)\cos(20^\circ + 35.7829^\circ) = \dot{\beta}\left[\sqrt{2}\cos 35.7829^\circ - \cos(20^\circ + 35.7829^\circ)\right]$$

$$\dot{\beta} = \omega_2 = 1.9227 \text{ rad/s}$$ Ans

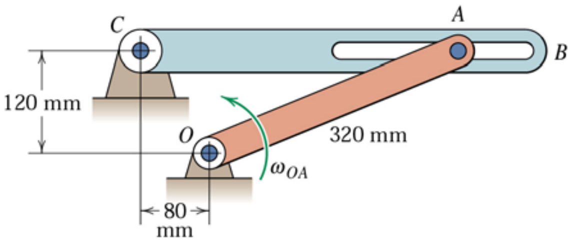
แบบฝึกหัดหัวข้อ 5/3

1. Link *OA* has an angular velocity ω_{OA} = 8 rad/s as it passes the position shown. Determine the corresponding angular velocity ω_{CB} of the slotted link *CB*. Solve by considering the relation between the infinitesimal displacements involved. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

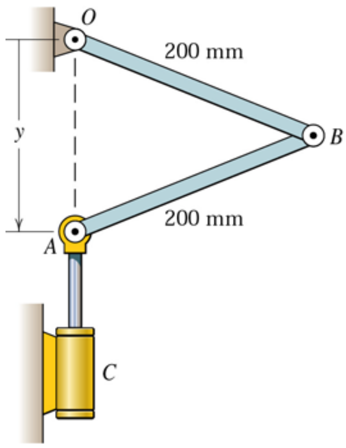
(*Ans* ω_{CB} = 6.30 rad/s)

2. For the instant when y = 200 mm, the piston rod of the hydraulic cylinder *C* imparts a vertical motion to the pin *A* of $\dot{y}$ = 400 mm/s and $\ddot{y}$ = -100 mm/s^2. For this instant determine the angular velocity ω and the angular acceleration α of link *AB*. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

(*Ans* ω = 1.155 rad/s CCW
α = 0.481 rad/s^2 CCW)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2

พลศาสตร์ (Dynamics)

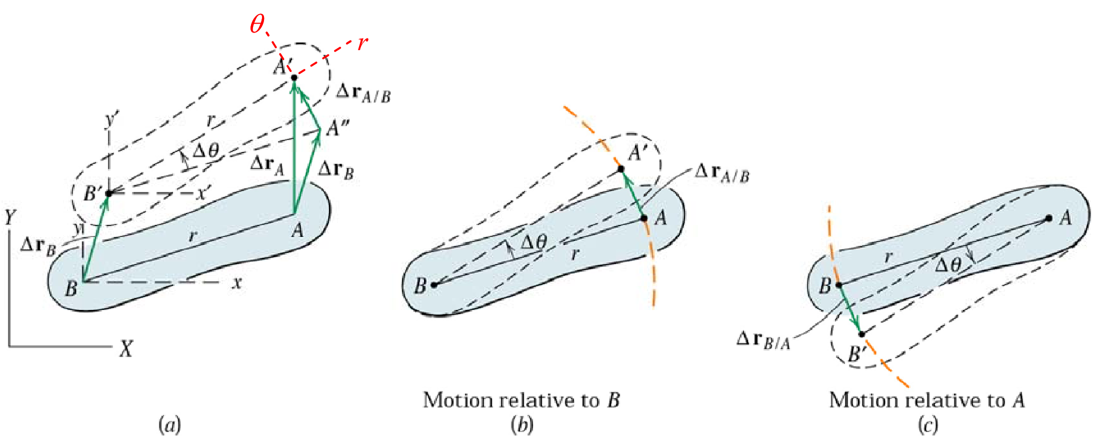
บทที่ 5 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง (ส่วนที่ 2)

5/4 ความเร็วสัมพัทธ์

ตามที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่ 5/1 แล้วว่าการเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ (General plane motion) เป็นการเคลื่อนที่ที่ผสมกันระหว่างการเลื่อนที่และการหมุน ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการใช้วิธีการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์เพื่อหาความเร็วของตำแหน่งใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็งที่เคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ พื้นฐานของการพิจารณาโดยใช้การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ จะเป็นการแยกการเคลื่อนที่ออกเป็นสองส่วน คือการเคลื่อนที่ส่วนของผู้สังเกตซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ และการเคลื่อนที่ของจุดที่ถูกสังเกตซึ่งจะเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบผู้สังเกต เนื้อหาในหัวข้อนี้เป็นพื้นฐานสำคัญในการพิจารณาหาความเร่งที่ตำแหน่งต่างๆ ในวัตถุแข็งเกร็งซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อๆ ไป

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุในรูปที่ 1(a) ผู้สังเกตซึ่งอยู่บนแกนหยุดนิ่ง (X-Y) จะมองเห็นวัตถุเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ หากพิจารณาการเคลื่อนที่ของเส้น BA ซึ่งเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งบนวัตถุแข็งเกร็ง จะพบว่าการเคลื่อนที่แบ่งได้เป็นสองขั้นตอน ขั้นตอนแรกจะเป็นการเคลื่อนที่จากจุด BA ไปยังจุด $B'A''$ โดยการเคลื่อนที่ในส่วนนี้จะเป็นการเลื่อนที่ ขั้นตอนที่ 2 จะเป็นการเคลื่อนที่จากจุด $B'A''$ ไปยังจุด $B'A'$ ซึ่งเป็นการหมุนรอบจุด B'

หากผู้สังเกตอยู่ที่จุด B ในช่วงการเคลื่อนที่จากจุด BA ไปยังจุด $B'A''$ ผู้สังเกตที่ B จะไม่พบว่าจุด A เคลื่อนที่สัมพัทธ์เทียบกับจุด B หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ผู้สังเกตที่ B จะเห็นจุด A หยุดนิ่งนั่นเอง แต่ในช่วงการเคลื่อนที่จากจุด $B'A''$ ไปยังจุด $B'A'$ ผู้สังเกตที่จุด B จะเห็นจุด A หมุนรอบจุด B



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ [1]

การพิจารณาการเคลื่อนที่ของจุด A โดยผู้สังเกตที่จุด B อาจจะพิจารณาได้โดยใช้ระบบพิกัดแบบ r-θ โดยตั้งแกนพิกัดดังแสดงในรูปที่ 1(a) เนื่องจากเส้น AB เป็นเส้นตรงบนวัตถุแข็งเกร็ง ดังนั้นความยาว r ระหว่างจุด A ไปยังจุด B จะมีค่าคงที่เสมอ ความเร็วในทิศทาง r หรือ $\dot{r}$ จึงมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นความเร็วของจุด A ที่ปรากฏกับผู้สังเกตที่จุด B จะมีความเร็วในทิศทาง θ เพียงอย่างเดียว หรืออาจไม่มีความเร็วเลย <u>นั่นคือผู้สังเกตที่ B จะเห็นจุด A ไม่เคลื่อนที่</u> ($v_r = 0; v_\theta = 0$) <u>หรือเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด B</u> ($v_r = 0; v_\theta \neq 0$) <u>เพียงสองกรณีเท่านั้น</u> การเคลื่อนที่ในรูป 1(a) หากผู้สังเกตอยู่ที่จุด B จะเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบตัวมันดังแสดงในรูปที่ 1(b)

ในทางกลับกันถ้าให้ผู้สังเกตอยู่ที่จุด A และสังเกตการณ์เคลื่อนที่ของจุด B ดังแสดงในรูปที่ 1(c) ผู้สังเกตจะพบว่าจุด B จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด A เช่นกัน แต่จะเห็น B หมุนรอบ A ในทิศทางตรงข้ามกับที่ผู้สังเกตที่ B มองเห็นจุด A หมุนรอบจุด B

เมื่อพิจารณาถึงเวคเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ จากรูปที่ 1(a) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B + \Delta\vec{r}_{A/B} \quad (1)$$

โดย $\Delta\vec{r}_{A/B}$ หมายถึงการเคลื่อนที่ของจุด A เมื่อเทียบกับผู้สังเกตที่จุด B

จากรูปจะพบอีกว่า $$\Delta\vec{r}_{A/B} = r\Delta\theta \quad (2)$$

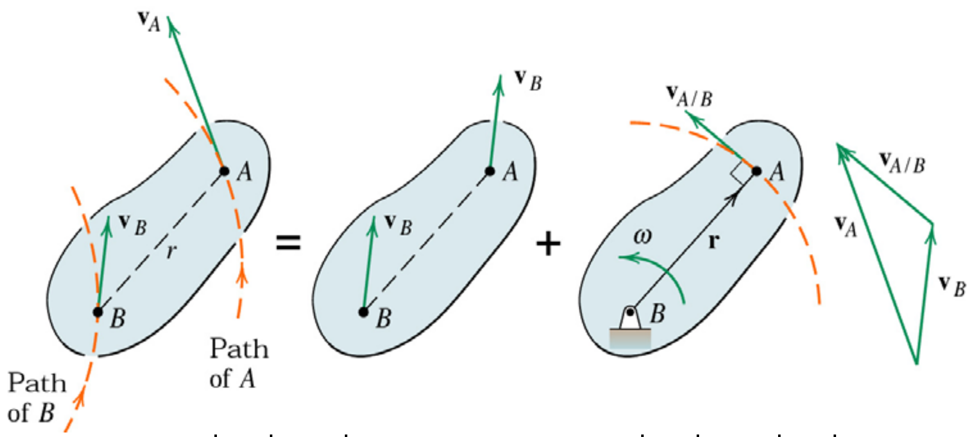
หาอนุพันธ์ของสมการ (1) เทียบกับเวลาจะได้ความสัมพันธ์ของความเร็วดังนี้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \quad (3)$$

โดย $\vec{v}_{A/B}$ คือความเร็วสัมพัทธ์ของจุด A เมื่อเทียบกับผู้สังเกตที่จุด B

จากสมการ (2) จะได้ว่า $$\vec{v}_{A/B} = r\omega \quad (4)$$

หรือเขียนในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้ $$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega}\times\vec{r} \quad (5)$$



รูปที่ 2 การแยกการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่และการหมุน [1]

รูปที่ 2 แสดงการแบ่งการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบออกเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่และการเคลื่อนที่แบบหมุน เนื่องจากผู้สังเกตที่ B จะมองเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด B ดังนั้นทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์ $\vec{v}_{A/B}$ จะตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{BA}$ ซึ่งลากจากจุด B ไปจุด A เสมอ

แนวทางการแก้ปัญหาโจทย์

แนวทางการแก้ปัญหาโจทย์สามารถสรุปเป็นหลักการและขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ดังนี้

หลักการ

1. จุดที่ผู้สังเกตอยู่ และจุดที่ต้องการสังเกตอยู่บนวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกัน
2. ผู้สังเกตที่ B จะเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบผู้สังเกต
3. $\vec{v}_{A/B} = r\omega$ และมีทิศทางตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{BA}$ เสมอ

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

1. เขียนสมการ $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$ เพื่อหาความเร็วที่จุดที่ต้องการ เนื่องจากสมการนี้เป็นสมการเวคเตอร์ ในปัญหาการเคลื่อนที่ในระนาบ (2 มิติ) สมการนี้ประกอบด้วยสมการย่อย 2 สมการ ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ในแนว x และ y ดังนั้นจะแก้สมการนี้ได้จะต้องมีตัวแปรไม่ทราบค่าไม่เกิน 2 ตัว
2. ตรวจสอบว่าตัวแปรอะไรบ้างที่ทราบค่าและตัวแปรอะไรบ้างที่ไม่ทราบค่า โดยเขียนตาราง แยกเป็นขนาด (Magnitude) และทิศทาง (Direction) ของตัวแปรแต่ละตัว ดังแสดงด้านล่าง ปัญหาโดยส่วนใหญ่จะแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1

	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_{A/B}$
Mag.	×	○	$r\omega$
Dir.	×	○	$\perp \overline{AB}$

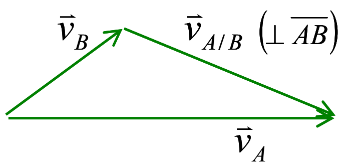
กรณีที่ 2

	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_{A/B}$
Mag.	×	○	×
Dir.	○	○	$\perp \overline{AB}$

กรณีที่ 1 ทราบข้อมูล $\vec{v}_B$ และ $\vec{v}_{A/B}$ ทั้งหมด แต่ไม่ทราบขนาดและทิศทางของ $\vec{v}_A$

กรณีที่ 2 ไม่ทราบขนาดของ $\vec{v}_{A/B}$ เนื่องจากไม่ทราบค่า ω แต่ทราบทิศทางของ $\vec{v}_A$

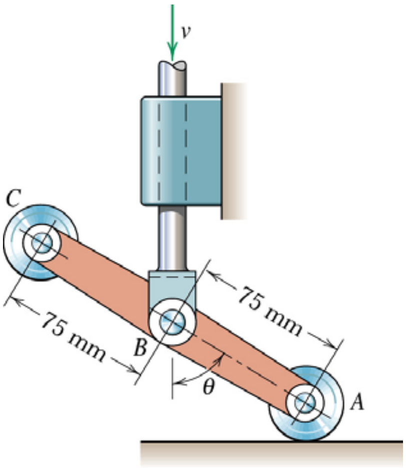
3. คำนวณค่าของความเร็วที่ทราบค่า และหาค่ามุม และทิศทางต่างๆ
4. เขียนแผนภาพเวคเตอร์ตามสมการ $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$ ดังรูปตัวอย่างด้านล่าง โดยเริ่มเขียนจากเวคเตอร์ที่รู้ขนาดและทิศทางเสียก่อน เวคเตอร์ของความเร็วที่ไม่ทราบค่าจะเขียนได้ภายหลังเพื่อให้แผนภาพเวคเตอร์ปิดได้



5. คำนวณหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า โดยพิจารณาแผนภาพเวคเตอร์ที่สร้างขึ้น โดยใช้กฎของ sine และ cosine ประกอบ หรืออาจทำโดยรวมส่วนประกอบของเวคเตอร์ในแนวดิ่งและในแนวระดับให้เท่ากับเวคเตอร์ลัพธ์ $\vec{v}_A$ ก็ได้

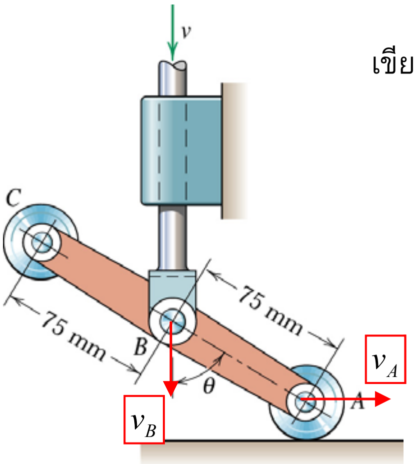
เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.



5/6 The elements of a switching device are shown. If the vertical control rod has a downward velocity v of 0.9 m/s when θ = 60º and if roller A is in continuous contact with the horizontal surface, determine the magnitude of the velocity of C for this instant. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/78]

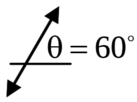
วิธีทำ ในข้อนี้รู้ข้อมูลความเร็วจุด B ทั้งขนาดและทิศทาง (ชี้ลง) และรู้ทิศทางความเร็วจุด A ว่าต้องอยู่ในแนวระดับ (ไปทางขวา) ส่วนจุด C ที่โจทย์ถามนั้นไม่รู้ทั้งขนาดและทิศทาง ดังนั้นจะพิจารณาส่วน AB ก่อน



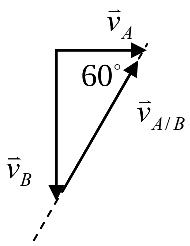
เขียนสมการความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างจุด A และ B

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_{A/B}$
ขนาด	X	0.9	X
ทิศทาง	→	↓	$\perp \overline{AB}$



จากสมการจะพบว่ามีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวเท่านั้น ดังนั้นจึงหาคำตอบได้ นำเวคเตอร์ในตารางมาเขียนต่อเป็นรูปปิดได้ดังนี้



จะเห็นว่าทิศทางของ $\vec{v}_{A/B}$ จะต้องเฉียงขึ้น 60 เท่านั้นจึงจะทำให้สมการ $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$ เป็นจริงได้

จากรูป

$$v_{A/B}\sin 60^\circ = v_B = 0.9$$

$$v_{A/B} = 1.0392 \text{ m/s}$$

$$\left[v_{A/B} = \omega_{AB}\overline{AB}\right] \qquad 1.0392 = \omega_{AB} \cdot 0.075$$

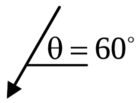
$$\omega_{AB} = 13.856 \text{ rad/s}$$ CCW

เนื่องจากชิ้นส่วน ABC เป็นวัตถุแข็งเกร็ง ดังนั้น ω_{AB} จึงมีค่าเท่ากันตลอดทั้งชิ้นส่วน

พิจารณาส่วน BC เพื่อหาความเร็วที่จุด C ในขณะนั้น

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B}$$

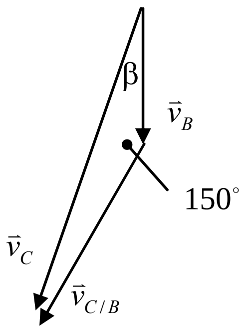
ขนาด	X	0.9	$\omega_{AB}\overline{CB}$
ทิศทาง	X	$\downarrow$	$\perp \overline{AB}$



จากตาราง พบว่าในตอนนี้จะรู้ขนาดและทิศทางของ $\vec{v}_{C/B}$ แน่นอนแล้ว เนื่องจากรู้ทิศทางของ ω_{AB}

$$v_{C/B} = \omega_{AB}\overline{CB} = 13.856 \cdot 0.075 = 1.0392 \text{ m/s}$$

จากสมการจะพบว่ามีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวเท่านั้น ดังนั้นจึงหาคำตอบได้ นำเวคเตอร์ในตารางมาเขียนต่อเป็นรูปปิดได้ดังนี้



กฎของ cosine

$$v_C^2 = v_B^2 + v_{C/B}^2 - 2v_B v_{C/B}\cos 150^\circ$$

$$v_C^2 = 0.9^2 + 1.0392^2 - 2(0.9)(1.0392)\cos 150^\circ$$

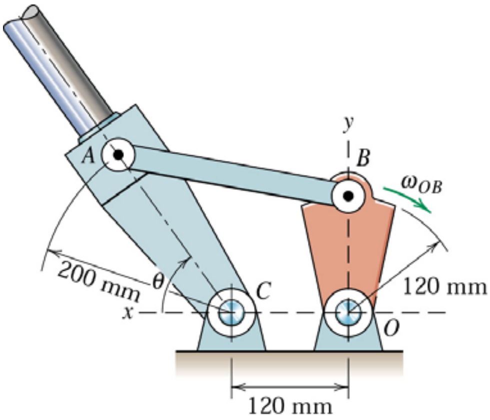
$$v_C = 1.8735 \text{ m/s}$$

Ans

หมายเหตุ ทิศทางของ $\vec{v}_C$ หาได้ดังนี้

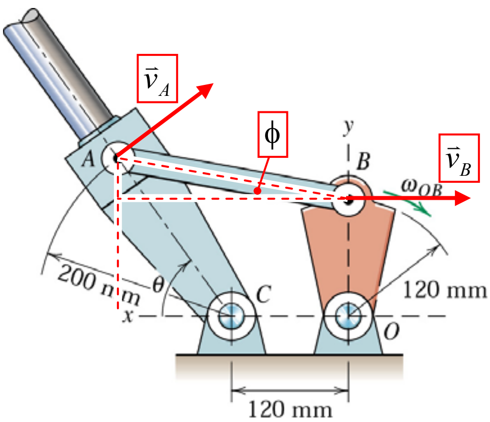
กฎของ sine
$$\frac{v_{C/B}}{\sin\beta} = \frac{v_C}{\sin 150^\circ}$$

$$\frac{1.0392}{\sin\beta} = \frac{1.8735}{\sin 150^\circ} \longrightarrow \beta = 16.1016^\circ$$



5/7 The elements of the mechanism for deployment of a spacecraft magnetometer boom are shown. Determine the angular velocity of the boom when the driving link *OB* crosses the y-axis with an angular velocity ω_{OB} = 0.5 rad/s if tanθ = 4/3 at this instant. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/81]

วิธีทำ โจทย์กำหนด ω_{OB} ทำให้รู้อัตราเร็วจุด B และทิศทางซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง BO โดยชี้ไปทางด้านขวา และรู้ทิศทางความเร็วจุด A เนื่องจากจุด A ต้องหมุนเป็นวงกลมรอบจุด C ทิศทางความเร็วของแต่ละจุดแสดงในรูปด้านล่าง



เขียนสมการความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างจุด A และ B

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

ขนาด	X	O	X
ทิศทาง	$\perp \overline{AC}$	$\longrightarrow$	$\perp \overline{AB}$

จากสมการจะพบว่ามีตัวแปรไม่ทราบค่า 2 ตัวเท่านั้น ดังนั้นจึงหาคำตอบได้

หาอัตราเร็ว และมุมต่างๆ

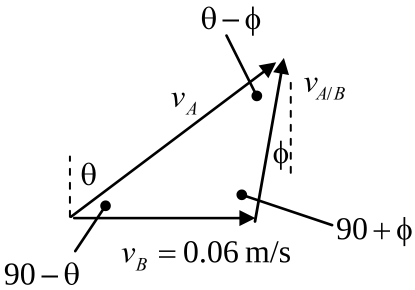
$$\left[v_B = \omega_{OB}\overline{OB}\right] \qquad v_B = 0.5(0.12) = 0.06 \text{ m/s}$$

$$\tan\theta = 4/3 \longrightarrow \theta = 53.1301^\circ$$

$$\tan\phi = \frac{0.2\sin\theta - 0.12}{0.2\cos\theta + 0.12} = \frac{0.2\sin 53.1301^\circ - 0.12}{0.2\cos 53.1301^\circ + 0.12}$$

$$\phi = 9.4623^\circ$$

นำเวคเตอร์ในตารางมาเขียนแผนภาพได้ดังนี้



กฎของ sine

$$\frac{v_A}{\sin(90+\phi)} = \frac{v_B}{\sin(\theta-\phi)}$$

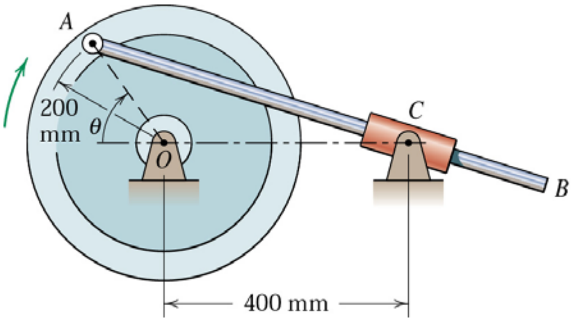
$$\frac{v_A}{\sin(90^\circ + 9.4623^\circ)} = \frac{0.06}{\sin(53.13^\circ - 9.4623^\circ)}$$

$$v_A = 0.0857 \text{ m/s}$$

พิจารณาชิ้นส่วน CA

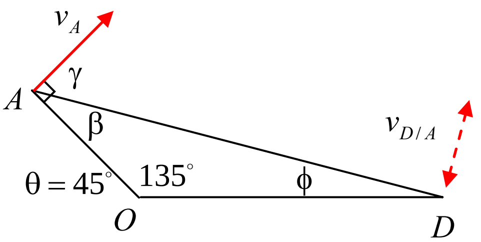
$\left[\omega_{CA} = v_A / \overline{CA}\right]$ $\omega_{CA} = 0.0857/0.2 = 0.429$ rad/s CW <u>Ans</u>

5/8 The flywheel turns clockwise with a constant speed of 600 rev/min, and the connecting rod AB slides through the pivoted collar at C. For the position $\theta = 45^{o}$, determine the angular velocity ω_{AB} of AB by using the relative-velocity relation. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/77]



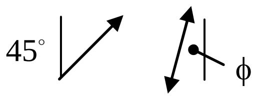
วิธีทำ การหาค่า ω_{AB} จำเป็นต้องทราบความเร็ว 2 จุดบนชิ้นส่วน AB จุด A เป็นจุดที่รู้ความเร็ว เนื่องจากรู้ความเร็วรอบหมุนของ flywheel และรู้ทิศทางของความเร็วซึ่งตั้งฉากกับเส้น OA อย่างไรก็ตามยังไม่มีจุดอื่นบนชิ้นส่วน AB ที่รู้ความเร็ว

สมมุติให้จุด D เป็นจุดบนชิ้นส่วน AB ซึ่งในขณะนั้นอยู่ตำแหน่งเดียวกับจุด C
พิจารณาสมการความเร็วสัมพัทธ์



$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{D/A}$$

	$\vec{v}_D$	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_{D/A}$
ขนาด	X	O	X
ทิศทาง	X	$\perp \overline{OA}$	$\perp \overline{AD}$



จะพบว่ามีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว ดังนั้นยังไม่สามารถจะหาค่าอะไรได้

พิจารณาจุด C และ D

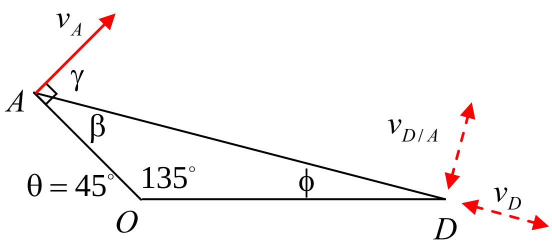
$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{D/C}$$

เนื่องจากจุด C เป็นจุดยึดแน่นไม่เคลื่อนที่ $\vec{v}_C = 0 \longrightarrow \vec{v}_D = \vec{v}_{D/C}$

ในข้อนี้จุด C และจุด D เป็นจุดซึ่งอยู่คนละชิ้นส่วน จึงไม่สามารถคิดเหมือนกรณีที่จุด C และจุด D อยู่บนวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกันได้ (ไม่สามารถคิดว่า C มองเห็น D เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบตัวมันได้)
เนื่องจากจุด C เป็นจุดบน Slot และจุด D เป็นจุดบนชิ้นส่วน AB ซึ่งเคลื่อนที่ผ่าน Slot ดังนั้นจุด C จะเห็นจุด D เคลื่อนที่ไปมาตามแนว Slot เข้าหาตัวมัน หรือออกจากตัวมันเท่านั้น

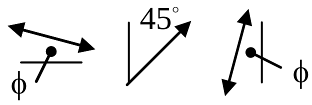
$\vec{v}_D = \vec{v}_{D/C}$ จึงมีทิศทางไปตามแนว Slot

นำข้อมูลนี้ไปเพิ่มในตารางได้ดังนี้

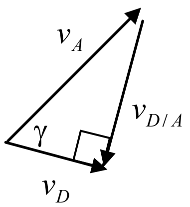


$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{D/A}$$

	$\vec{v}_D$	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_{D/A}$
ขนาด	X	O	X
ทิศทาง	$// \overline{AD}$	$\perp \overline{OA}$	$\perp \overline{AD}$



มีตัวไม่ทราบค่าในสมการ 2 ตัว จึงหาค่าได้
นำเวคเตอร์ในตารางมาเขียนแผนภาพได้ดังนี้



หาค่ามุม และอัตราเร็วที่รู้ค่า

$$AD^2 = 200^2 + 400^2 - 2(200)(400)\cos 135^\circ$$

$$AD = 559.5865 \text{ mm}$$

หามุม β จากกฎของ sine ได้ดังนี้

$$\frac{AD}{\sin 135^\circ} = \frac{OD}{\sin\beta} \longrightarrow \frac{559.5865}{\sin 135^\circ} = \frac{400}{\sin\beta}$$

$$\beta = 30.3612^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 30.3612^\circ = 59.6388^\circ$$

หาอัตราเร็ว v_A

$$v_A = \omega \cdot \overline{OA} = 600 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot 0.2 = 4\pi \text{ m/s}$$

จากแผนภาพเวคเตอร์

$$v_{D/A} = v_A \sin\gamma = 4\pi \sin 59.6388^\circ \longrightarrow v_{D/A} = 10.843 \text{ m/s}$$

$$\omega_{D/A} = \omega_{AB} = v_{D/A} / \overline{AD}$$

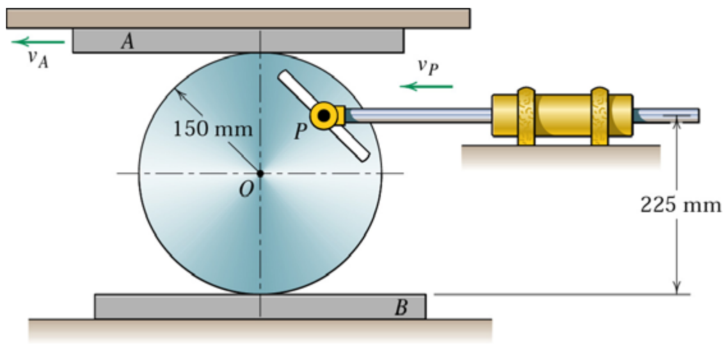
$$\omega_{AB} = \frac{10.843 \times 1000}{559.5865} = 19.38 \text{ rad/s}$$ CW

Ans

แบบฝึกหัด หัวข้อ 5/4

1. Pin *P* on the end of the horizontal rod slides freely in the slotted gear. The gear engages the moving rack *A* and the fixed rack *B* (teeth not shown) so it rolls without slipping. If *A* has a velocity of 120 mm/s to the left for the instant shown, determine the velocity v_P of the rod for this position. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

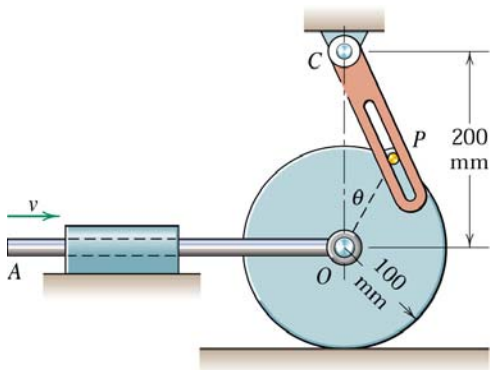
(Ans v_P = 60 mm/s)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1

2. The wheel rolls without slipping. For the instant portrayed, when *O* is directly under point *C*, link *OA* has a velocity *v* = 1.5 m/s to the right and $\theta = 30^{\circ}$. Determine the angular velocity ω of the slotted link. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

(Ans ω = 18.22 rad/s CCW)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2

5/5 Instantaneous Center of Zero Velocity

ในหัวข้อ 5/4 ได้กล่าวถึงการหาความเร็วของจุดใดๆ บนวัตถุแข็งเกร็งโดยใช้วิธีการของความเร็วสัมพัทธ์ จากสมการที่ (3) และ (5) จะได้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (6)$$

จากสมการที่ (6) พบว่าหากสามารถเลือกตำแหน่งที่มีความเร็วเป็นศูนย์ ให้เป็นตำแหน่งที่ผู้สังเกตทำการสังเกตได้แล้ว สมการที่ (6) จะสามารถลดรูปลงได้เป็นสมการที่ (7)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (7)$$

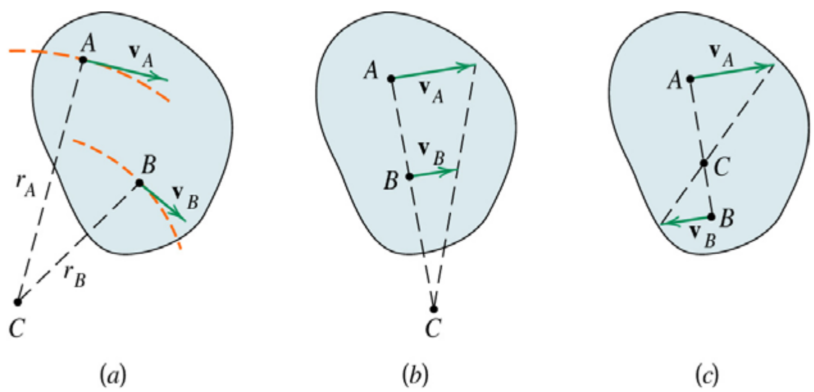
เขียนในรูปสเกลาร์ได้ดังนี้

$$v_A = \omega \cdot r_A \qquad (8)$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่าความเร็วที่จุดใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็ง สามารถหาได้โดยคิดเสมือนว่าจุดเหล่านั้นกำลังหมุนรอบจุดศูนย์กลางการหมุน (จุดที่ผู้สังเกตอยู่) ซึ่งมีความเร็วเป็นศูนย์อยู่ จุดศูนย์กลางการหมุนซึ่งมีความเร็วเป็นศูนย์ในขณะนั้นเรียกว่า “จุดหมุนเฉพาะกาล หรือ Instantaneous Center of Zero Velocity: I.C.Z.V.” หากทราบตำแหน่งจุด I.C.Z.V แล้วจะสามารถหาความเร็วจุดอื่นได้โดยง่ายโดยสมการ (8)

การหาตำแหน่งจุด I.C.Z.V

รูปที่ 3 แสดงการหาตำแหน่งของจุด I.C.Z.V. ในกรณีต่างๆ จากสมการที่ (7) จะพบว่าทิศทางของความเร็ว $\vec{v}$ จะต้องตั้งฉากกับเวคเตอร์ $\vec{r}$ ที่ลากจากจุด I.C.Z.V. ไปยังจุดที่ต้องการหาความเร็วเสมอ ในกรณีที่ทิศทางความเร็วของจุด A และจุด B ไม่เหมือนกัน ดังรูปที่ 3(a) ตำแหน่งจุด I.C.Z.V. สามารถหาได้โดยลากเส้นตั้งฉากกับทิศทางความเร็วทั้ง 2 จุด จุดตัดกันของเส้นตั้งฉากจะเป็นตำแหน่งจุด I.C.Z.V.



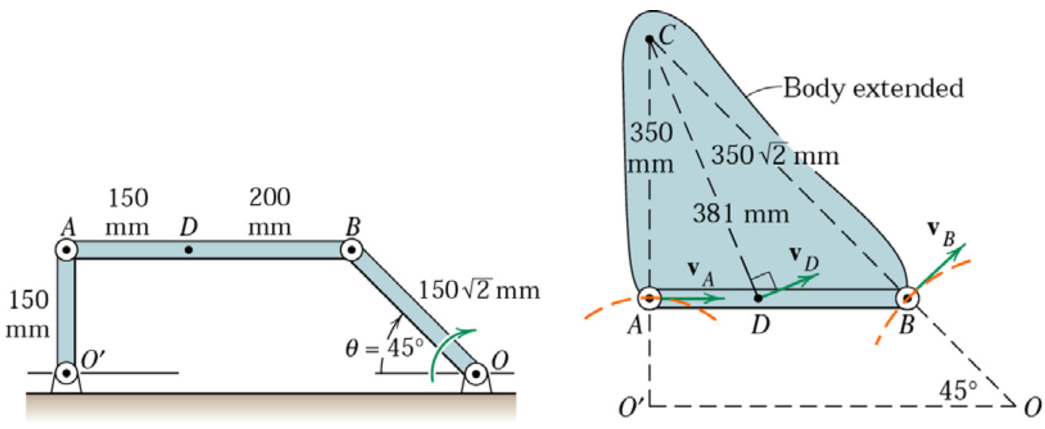
รูปที่ 3 ตำแหน่งจุด I.C.Z.V ในกรณีต่างๆ [1]

ในกรณีที่ความเร็วของจุด A และจุด B มีทิศทางขนานกัน ดังรูปที่ 3(b) และ 3(c) ตำแหน่งจุด I.C.Z.V. สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ที่ว่าอัตราเร็วของจุด A และจุด B จะต้องเป็นสัดส่วนกันตามสมการ (8) จากรูปที่ 3(b) และ 3(c) จะพบว่าจุด I.C.Z.V. สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต จากรูปเมื่อทิศทางความเร็วไปทิศทางเดียวกัน ตำแหน่งจุด C จะอยู่ด้านนอกของเส้นตรง AB แต่ถ้าทิศทางความเร็วตรงกันข้ามกัน ตำแหน่งจุด C จะอยู่บนเส้นตรงระหว่างจุด A และ B

<u>ตัวอย่างการใช้วิธีการหาจุด I.C.Z.V เพื่อหาความเร็วตำแหน่งอื่นๆ ในวัตถุแข็งเกร็ง</u>

พิจารณาชิ้นส่วน AB ในรูปที่ 4(a) เมื่อกำหนดให้ชิ้นส่วน OB หมุนรอบจุด O ด้วยทิศทางตามเข็มนาฬิกาดังแสดงในรูป จะหาความเร็วที่จุด D ได้ดังนี้

1. การจะหาตำแหน่งจุด I.C.Z.V. ได้จำเป็นจะต้องทราบทิศทางความเร็วของจุด 2 จุด บนวัตถุแข็งเกร็งนั้นเสียก่อน
2. จากรูปพบว่าจุด B และจุด A เป็นจุดที่รู้ทิศทางของความเร็ว เนื่องจากจุดทั้งสองหมุนเป็นวงกลมรอบจุด O และจุด O’ ตามลำดับ ดังนั้นทิศทางความเร็วจึงตั้งฉากกับเส้น OB และ O’A ตามลำดับ
3. หาตำแหน่งจุด I.C.Z.V. โดยลากเส้นตั้งฉากกับทิศทางความเร็วของจุด B และ A ดังแสดงในรูปที่ 4(b) เส้นทั้งสองจะไปตัดกันที่จุด C จุด C เป็นจุด I.C.Z.V ของชิ้นส่วน AB ในขณะนั้น
4. จากรูปจะพบว่าจุด I.C.Z.V. อาจอยู่นอกชิ้นส่วนที่พิจารณาได้
5. หาความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วน AB จาก $\omega_{AB} = \dfrac{v_B}{CB}$ หรือ $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{CA}$ (ถ้ารู้ v_A)
6. ใช้ความเร็วเชิงมุม ω_{AB} ที่หาได้ หาอัตราเร็วของจุด D จาก $v_D = \omega_{AB} \cdot (\overline{CD})$ ทิศทางของความเร็วที่จุด D จะตั้งฉากกับเส้นตรง CD ดังแสดงในรูปที่ 4(b)



(a) (b)

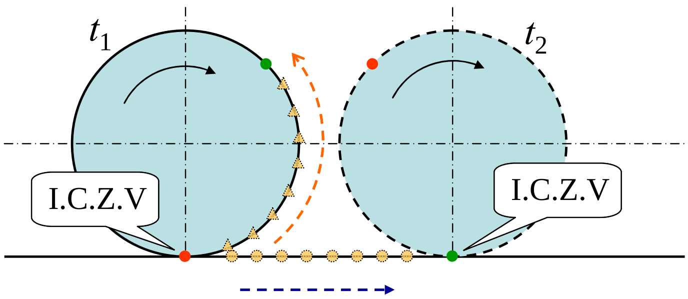
รูปที่ 4 ตัวอย่างการใช้จุด I.C.Z.V. เพื่อหาความเร็วในวัตถุแข็งเกร็ง [1]

การเคลื่อนของตำแหน่งจุด I.C.Z.V เมื่อวัตถุเคลื่อนที่

เนื่องจากความเร็วที่ตำแหน่งต่างๆ ของวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาที่วัตถุเคลื่อน-ที่ ดังนั้นตำแหน่งของจุด I.C.Z.V. ก็จะเปลี่ยนไปด้วย

พิจารณารูปที่ 5 ซึ่งแสดงการกลิ้งของวัตถุทรงกระบอก จากตัวอย่างที่แสดงในหัวข้อที่แล้วจะพบว่าความเร็วที่จุดสัมผัสพื้นของทรงกระบอกมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจุดสัมผัสพื้นจึงเป็นจุด I.C.Z.V. เมื่อทรงกระบอกนี้กลิ้งไป จุดที่สัมผัสพื้น (จุด I.C.Z.V.) ก็จะเปลี่ยนไปจากจุดสีแดงไปเป็นจุดสีเขียว เมื่อพิจารณาแนวการเคลื่อนที่ของจุด I.C.Z.V. <u>ในวัตถุ</u> (เปรียบเสมือนผู้สังเกตอยู่บนทรงกระบอก) จะพบว่าแนวการเคลื่อนที่เป็นไปตามแนวความโค้งของทรงกระบอก (แสดงด้วยจุดสามเหลี่ยมประ) เรียกแนวการเคลื่อนที่ของจุด I.C.Z.V. ในวัตถุว่า Body centrode

ในทางตรงข้ามหากพิจารณาการเคลื่อนที่ของจุด I.C.Z.V. <u>เทียบกับแกนเฉื่อย</u> (ผู้สังเกตอยู่นิ่ง) แล้ว จะพบว่าแนวการเคลื่อนที่ของจุด i.C.Z.V. จะเป็นไปตามแนวจุดสัมผัสพื้น (แสดงด้วยจุดวงกลมประ) เรียกแนวการเคลื่อนที่ของจุด I.C.Z.V. เมื่อเทียบกับแกนเฉื่อยว่า Space centrode



รูปที่ 5 การเคลื่อนของตำแหน่งจุด I.C.Z.V. [1]

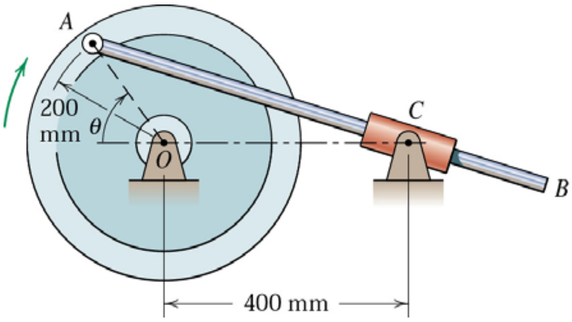
<u>ข้อสังเกต</u> ถึงแม้ว่าจุด I.C.Z.V. มีความเร็วเป็นศูนย์ในขณะนั้น แต่จุดนี้ไม่ได้มีความเร่งเป็นศูนย์ ดังนั้นจึง<u>ไม่สามารถ</u>ใช้แนวคิดทำนองเดียวกับจุด I.C.Z.V. กับปัญหาความเร่งได้

เอกสารอ้างอิง

J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

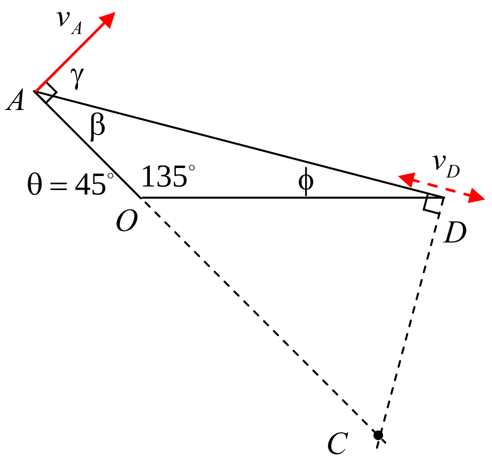
5/9 The flywheel turns clockwise with a constant speed of 600 rev/min, and the connecting rod *AB* slides through the pivoted collar at *C*. For the position $\theta = 45^{\circ}$, determine the angular velocity ω_{AB} of *AB* by using I.C.Z.V..

[Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/109]



วิธีทำ การที่จะหาจุด I.C.Z.V. ได้ จะต้องรู้ทิศทางความเร็ว 2 จุดบนวัตถุแข็งเกร็ง (ชิ้นส่วน AB) เสียก่อน จุดที่รู้ทิศทางความเร็วคือ

1. จุด A ซึ่งมีทิศทางของความเร็วตั้งฉากกับเส้นตรง OA
2. จุด D ซึ่งเป็นจุดบนชิ้นส่วน AB และอยู่ตำแหน่งเดียวกับจุด C ที่จุดนี้ เนื่องจากถูกยึดด้วยปลอก ทำให้ไม่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทางตั้งฉากกับเส้นตรง AB ได้ ที่จุดนี้จึงมีความเร็วในทิศทางขนานกับเส้นตรง AB



จากตัวอย่างก่อนหน้า (5/77) จะได้

$AD = 559.5865\text{ mm}$

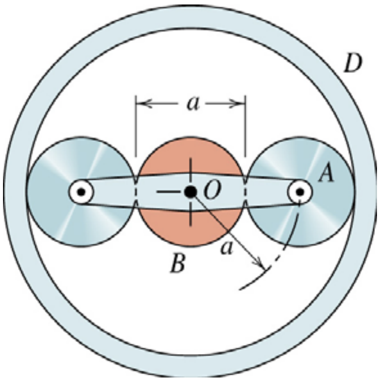
$\beta = 30.3612^{\circ}$

$v_A = 4\pi\text{ m/s}$

พิจารณาสามเหลี่ยม ACD

$$AC = \frac{AD}{\cos\beta} = \frac{559.5865}{\cos 30.3612^{\circ}}$$
$$= 648.5281\text{ mm}$$

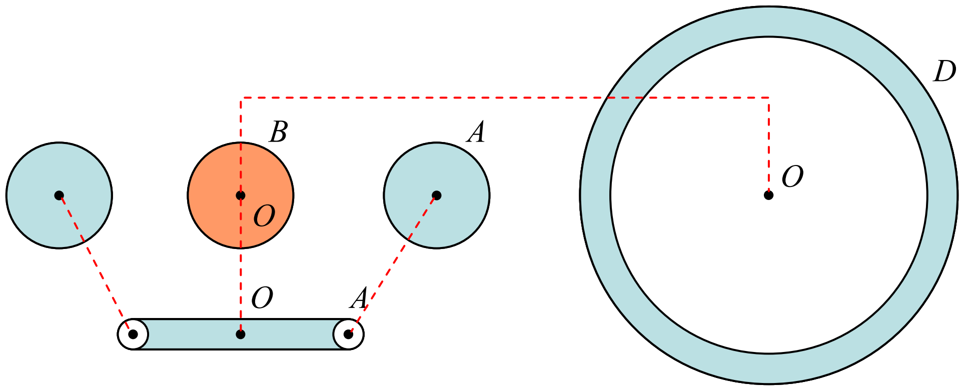
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC} = \frac{4\pi}{648.5281\times 10^{-3}} = 19.377\text{ rad/s CW}$$ <u>Ans</u>



5/10 The shaft at O drives the arm OA at a clockwise speed of 90 rev/min about the fixed bearing at O. Use the method of the instantaneous center of zero velocity to determine the rotational speed of gear B (gear teeth not shown) if (a) ring gear D is fixed and (b) ring gear D rotates counterclockwise about O with a speed of 80 rev/min. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/117]

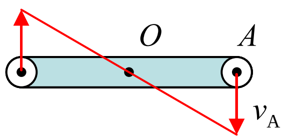
วิธีทำ ระบบเฟืองในข้อนี้ประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายๆ ชิ้นส่วน ต้องพิจารณาแต่ละชิ้นส่วนให้ดี เพราะวิธีการหาความเร็วที่กล่าวมาในหัวข้อนี้จะใช้ได้เฉพาะในวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกันเท่านั้น

ระบบเฟืองนี้ประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อยๆ 5 ชิ้นส่วนดังนี้



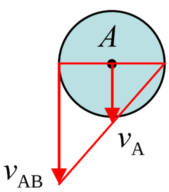
(a) ring gear D is fixed

พิจารณาชิ้นส่วน OA : จุด O เป็นจุดยึดแน่นมีความเร็วเป็นศูนย์ จึงเป็นจุด I.C.Z.V.



$$v_A = \omega_{OA}(a) = (90 \times \frac{2\pi}{60})(a) = 3\pi a \text{ m/s}$$

พิจารณาเฟือง A



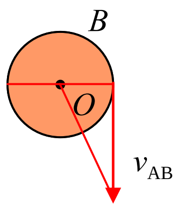
จุด A ของเฟือง ยึดกับจุด A ของชิ้นส่วน OA จึงมีความเร็วเท่ากัน

จุดที่เฟือง A สัมผัสกับ เฟืองวงแหวน D มีความเร็วเป็นศูนย์ เนื่องจากเฟืองแหวน D ถูกยึดแน่น จุดนี้เป็นจุด I.C.Z.V.

$$\omega_A = \frac{v_A}{a/2} = \frac{3\pi a}{a/2} = 6\pi \text{ rad/s}$$

$$v_{AB} = \omega_A(a) = 6\pi a \text{ m/s}$$

<u>พิจารณาเฟือง B</u>



จุดที่เฟือง B สัมผัสกับเฟือง A ต้องมีความเร็วเท่ากัน และเท่ากับ v_{AB}

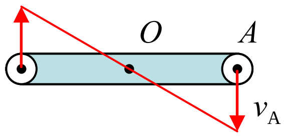
จุด O เป็นจุดยึดแน่น มีความเร็วเป็นศูนย์ จุดนี้เป็นจุด I.C.Z.V.

$$\omega_B = \frac{v_{AB}}{a/2} = \frac{6\pi a}{a/2} = 12\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_B = 12\pi \times \frac{60}{2\pi} = 360 \text{ rev/min}$$ <u>Ans</u>

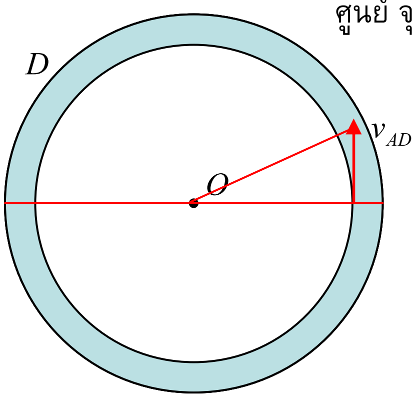
(b) ω_D = 80 rev/min CCW

<u>พิจารณาชิ้นส่วน OA</u> : จุด O เป็นจุดยึดแน่นมีความเร็วเป็นศูนย์ จึงเป็นจุด I.C.Z.V.



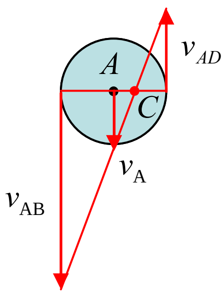
$$v_A = \omega_{OA}(a) = (90 \times \frac{2\pi}{60})(a) = 3\pi a \text{ m/s}$$

<u>พิจารณาเฟืองแหวน D</u> เฟืองแหวนหมุนรอบจุดยึดแน่น O จุด O จึงมีความเร็วเป็นศูนย์ จุดนี้เป็นจุด I.C.Z.V.



$$v_{AD} = \omega_D(\frac{3}{2}a) = (80 \times \frac{2\pi}{60})(\frac{3}{2}a) = 4\pi a \text{ m/s}$$

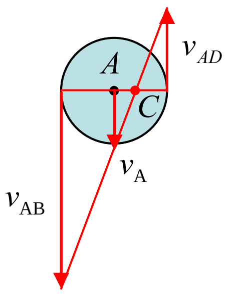
<u>พิจารณาเฟือง A</u>



จุด A ของเฟือง ยึดกับจุด A ของชิ้นส่วน OA จึงมีความเร็วเท่ากัน

จุดที่เฟือง A สัมผัสกับ เฟืองวงแหวน D มีความเร็วเท่ากับ v_{AD}

$$\omega_A = \frac{v_{AD} + v_A}{a/2} = \frac{3\pi a + 4\pi a}{a/2} = 14\pi \text{ rad/s}$$



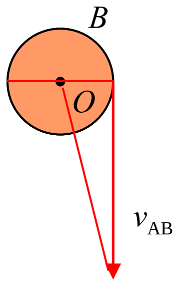
หาตำแหน่งจุด C จากสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{v_A}{v_{AD}} = \frac{3\pi a}{4\pi a} = \frac{\overline{AC}}{a/2 - \overline{AC}}$$

$$\overline{AC} = \frac{3a}{14}$$

$$v_{AB} = \omega_A\left(\frac{3a}{14} + \frac{a}{2}\right) = 14\pi\left(\frac{10a}{14}\right) = 10a\pi \text{ m/s}$$

<u>พิจารณาเฟือง B</u>



จุดที่เฟือง B สัมผัสกับเฟือง A ต้องมีความเร็วเท่ากัน และเท่ากับ v_{AB}

จุด O เป็นจุดยึดแน่น มีความเร็วเป็นศูนย์ จุดนี้เป็นจุด I.C.Z.V.

$$\omega_B = \frac{v_{AB}}{a/2} = \frac{10\pi a}{a/2} = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_B = 20\pi \times \frac{60}{2\pi} = 600 \text{ rev/min}$$

<u>Ans</u>

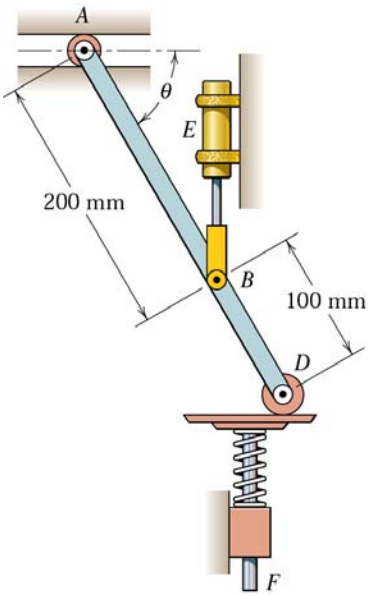
แบบฝึกหัดหัวข้อ 5/5

1. Vertical oscillation of the spring-loaded plunger *F* is controlled by a periodic change in pressure in the vertical hydraulic cylinder *E*. For the position $\theta = 60^{\circ}$, determine the angular velocity of *AD* and the velocity of the roller *A* in its horizontal guide if the plunger *F* has a downward velocity of 2 m/s. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

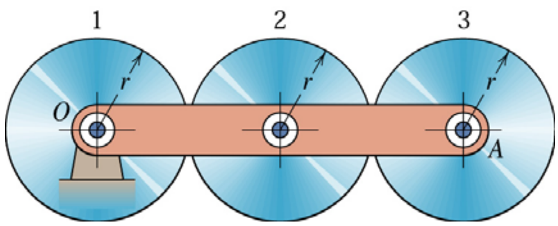
   (*Ans* ω_{AD} = 13.33 rad/s CW, v_A = 2.31 m/s)

2. The three gears 1, 2, and 3 of equal radii are mounted on the rotating arm as shown. (Gear teeth are omitted from the drawing.) Arm *OA* rotates clockwise about *O* at the angular rate of 4 rad/s, while gear 1 rotates independently at the counterclockwise rate of 8 rad/s. Determine the angular velocity of gear 3. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

   (*Ans* ω_3 = 8 rad/s CCW)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



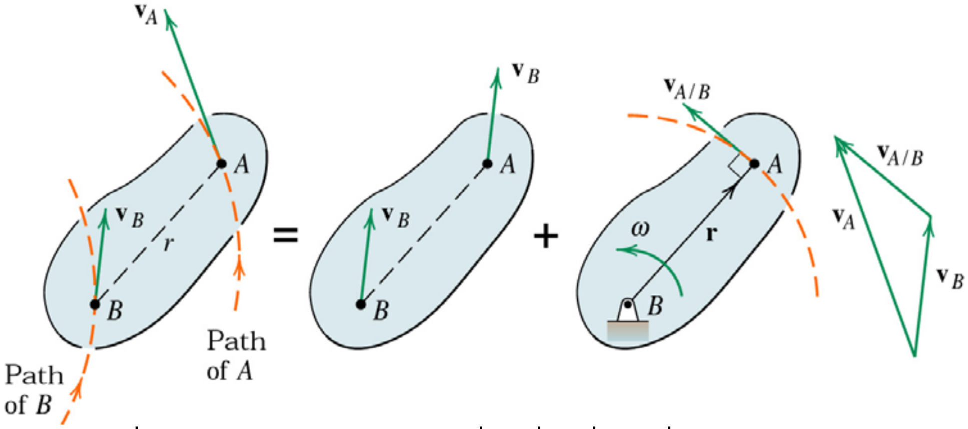
รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2

พลศาสตร์ (Dynamics)

บทที่ 5 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง (ส่วนที่ 3)

5/6 ความเร่งสัมพัทธ์

ในหัวข้อ 5/4 กล่าวถึงการหาความเร็วที่ตำแหน่งใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็งที่เคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ การพิจารณาใช้หลักการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ โดยแยกการเคลื่อนที่ออกเป็นสองส่วน คือการเคลื่อนที่ส่วนของผู้สังเกตซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ และการเคลื่อนที่ของจุดที่ถูกสังเกตซึ่งจะเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุนเป็นวงกลมรอบผู้สังเกต ดังแสดงในรูปที่ 1 จากรูปจะทำให้ทราบทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์ $\vec{v}_{A/B}$ ซึ่งจะตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{BA}$ ซึ่งลากจากจุด B ไปจุด A เสมอ



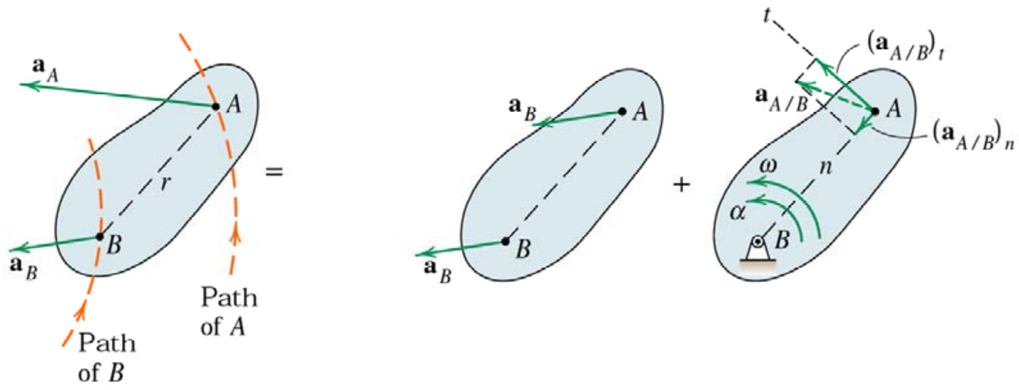
รูปที่ 1 ความเร็วในวัตถุแข็งเกร็งซึ่งเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ [1]

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาความเร่งของตำแหน่งใดๆ ในวัตถุแข็งเกร็ง การพิจารณาใช้หลักการทำนองเดียวกับความเร็วสัมพัทธ์ที่ได้กล่าวมาข้างต้น รูปที่ 2 แสดงความเร่งบนวัตถุแข็งเกร็งที่จุด A และ B ซึ่งแทนด้วย $\vec{a}_A$ และ $\vec{a}_B$ ตามลำดับ จากรูปจะเห็นว่าสามารถแยกการเคลื่อนที่เป็น 2 ส่วนคือการเคลื่อนที่ของผู้สังเกตที่จุด B และการเคลื่อนที่ของจุดที่ถูกสังเกต A ซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด B เช่นเดียวกับการพิจารณาความเร็ว สมการแสดงความสัมพันธ์ของความเร่งที่ตำแหน่งต่างๆ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \tag{1}$$

เนื่องจากผู้สังเกต B จะเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบผู้สังเกต ดังนั้นความเร่งสัมพัทธ์ $\vec{a}_{A/B}$ จะสามารถหาได้เช่นเดียวกับการพิจารณาการเคลื่อนที่แบบวงกลม หากใช้ระบบพิกัด n-t ในการพิจารณาดังรูป จะสามารถแยกความเร่งสัมพัทธ์ $\vec{a}_{A/B}$ ออกเป็นส่วนประกอบย่อยๆ $(\vec{a}_{A/B})_n$ ในแนว n และ $(\vec{a}_{A/B})_t$ ในแนว t ดังนั้นสมการที่ (1) จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t \tag{2}$$



รูปที่ 2 ความเร่งในวัตถุแข็งเกร็งซึ่งเคลื่อนที่แบบทั่วไปบนระนาบ [1]

ขนาดของความเร่งในแต่ละทิศทางหาได้จากความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่แบบวงกลมดังนี้

$$(a_{A/B})_n = v_{A/B}^2 / r = r\omega_{A/B}^2 \quad (3)$$

$$(a_{A/B})_t = \dot{v}_{A/B} = r\alpha_{AB} \quad (4)$$

หรือเขียนในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$(\vec{a}_{A/B})_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (5)$$

$$(\vec{a}_{A/B})_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad (6)$$

แนวทางการแก้ปัญหาโจทย์

แนวทางการแก้ปัญหาโจทย์ความเร่ง สามารถสรุปเป็นหลักการและขั้นตอนการแก้ปัญหาทำนองเดียวกับปัญหาความเร็วได้ดังนี้

หลักการ

1. จุดที่ผู้สังเกตอยู่ และจุดที่ต้องการสังเกตอยู่บนวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกัน
2. ผู้สังเกตที่ B จะเห็นจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบผู้สังเกต
3. แยกความเร่งสัมพัทธ์เป็นทิศทาง n-t และหาค่าจากความเร่งของการเคลื่อนที่แบบวงกลม

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

1. หาความเร็วแต่ละจุด และความเร็วรอบหมุนของชิ้นส่วนเสียก่อน โดยอาจใช้วิธีความเร็วสัมพัทธ์ หรือใช้การหาจุด I.C.Z.V. ก็ได้
2. เขียนสมการ $\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$ เพื่อหาความเร่งที่จุดที่ต้องการ เนื่องจากสมการนี้เป็นสมการเวคเตอร์ในปัญหาการเคลื่อนที่ในระนาบ (2 มิติ) สมการจึงนี้ประกอบ-ด้วยสมการย่อย 2 สมการ ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ในแนว x และ y ดังนั้นจะแก้สมการนี้ได้จะต้องมีตัวแปรไม่ทราบค่าไม่เกิน 2 ตัว
3. ตรวจสอบว่าตัวแปรอะไรบ้างที่ทราบค่าและตัวแปรอะไรบ้างที่ไม่ทราบค่า โดยเขียนตารางแยกเป็นขนาด (Magnitude) และทิศทาง (Direction) ของตัวแปรแต่ละตัว ดังแสดงด้านล่าง ปัญหาโดยส่วนใหญ่จะแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$

	$\vec{a}_A$	$\vec{a}_B$	$(\vec{a}_{A/B})_n$	$(\vec{a}_{A/B})_t$
Mag.	✕	○	$\omega^2 r$	αr
Dir.	✕	○	$\overline{AB}$	$\perp \overline{AB}$

กรณีที่ 2

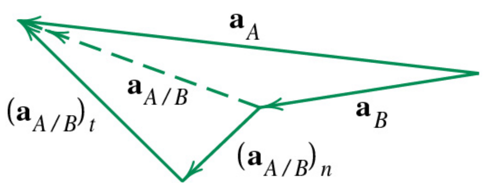
$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$

	$\vec{a}_A$	$\vec{a}_B$	$(\vec{a}_{A/B})_n$	$(\vec{a}_{A/B})_t$
Mag.	✕	○	$\omega^2 r$	✕
Dir.	○	○	$\overline{AB}$	$\perp \overline{AB}$

<u>กรณีที่ 1</u> ทราบข้อมูล $\vec{a}_B$, $(\vec{a}_{A/B})_n$ และ $(\vec{a}_{A/B})_t$ ทั้งหมด แต่ไม่ทราบขนาดและทิศทางของ $\vec{a}_A$

<u>กรณีที่ 2</u> ไม่ทราบขนาดของ $(\vec{a}_{A/B})_t$ เนื่องจากไม่ทราบค่า α แต่ทราบทิศทางของ $\vec{a}_A$

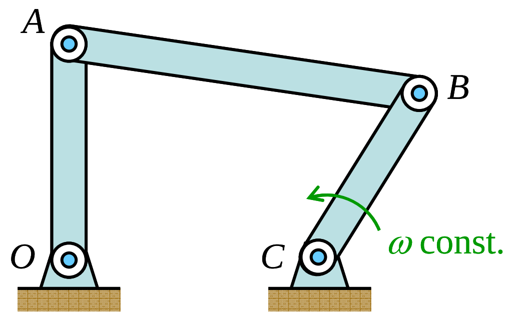
4. คำนวณค่าของความเร่งที่ทราบค่า และหาค่ามุม และทิศทางต่างๆ
5. เขียนแผนภาพเวคเตอร์ตามสมการ $\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$ โดยเริ่มเขียนจากเวคเตอร์ที่รู้ขนาดและทิศทางเสียก่อน เวคเตอร์ของความเร่งที่ไม่ทราบค่าจะเขียนได้ภายหลังเพื่อให้แผนภาพเวคเตอร์ปิดได้ ดังตัวอย่างด้านล่าง



6. คำนวณหาค่าตัวแปรไม่ทราบค่า โดยพิจารณาแผนภาพเวคเตอร์ที่สร้างขึ้น โดยรวมส่วนประกอบของเวคเตอร์ในแนวดิ่งและในแนวระดับให้เท่ากับเวคเตอร์ลัพธ์ $\vec{a}_A$

ตัวอย่างการแก้ปัญหาความเร่ง

พิจารณาข้อต่อด้านล่าง กำหนดความยาวข้อต่อ และความเร็วรอบหมุนของชิ้นส่วน CB คงที่ ให้หาความเร่งของจุด A และความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน AO ที่ตำแหน่งข้อต่อดังแสดงในรูป

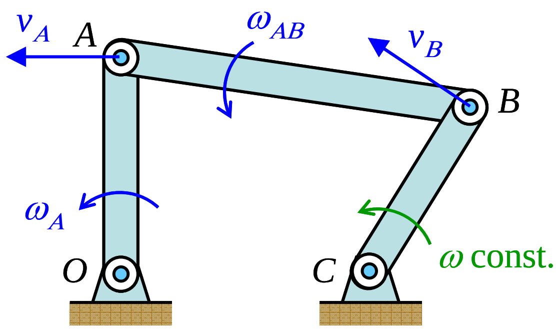


1. หาความเร็วของชิ้นส่วนต่างๆ โดยเขียนสมการความเร็วสัมพัทธ์ได้ดังแสดงด้านล่าง

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_{A/B}$
Mag.	✕	○	✕
Dir.	○	○	$\perp \overline{AB}$

กรณีนี่จะรู้ความเร็วจุด B ทั้งขนาดและทิศทาง และรู้ทิศทางความเร็ว $\bar{v}_A$ เนื่องจากจุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด O ดังนั้นความเร็วที่จุด A จึงต้องตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{OA}$ จากสมการจะทราบว่ามีตัวไม่รู้ค่าเพียง 2 ตัว จึงหาค่าตัวไม่ทราบค่าได้ เขียนทิศทางความเร็วในข้อต่อแต่ละชิ้นได้ดังนี้



2. เขียนสมการความเร่ง $\bar{a}_A = \bar{a}_B + (\bar{a}_{A/B})_n + (\bar{a}_{A/B})_t$

จากสมการนี้จะพบว่า

$\bar{a}_B$ จะรู้ทั้งขนาดและทิศทาง โดยมีทิศทางพุ่งเข้าหาจุด C ตามแนวเส้นตรง $\overline{BC}$ และมีขนาด $a_B = v_B^2/\overline{BC} = \overline{BC}\cdot\omega_{CB}^2$ เนื่องจาก B เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด C ด้วยความเร็วคงที่ ดังนั้นความเร่งจะมีเฉพาะความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางเท่านั้น โดยความเร่งในทิศทางสัมผัสมีค่าเป็นศูนย์

$(\bar{a}_{A/B})_n$ จะรู้ขนาดและทิศทาง โดยมีทิศทางพุ่งเข้าหาจุด B ตามแนวเส้นตรง $\overline{AB}$ (คิดเสมือนว่าจุด A หมุนเป็นวงกลมรอบผู้สังเกต B)

$(\bar{a}_{A/B})_t$ จะรู้แต่ทิศทาง (ตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{AB}$) ไม่รู้ขนาดเนื่องจากยังไม่ทราบค่าความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน AB (α_{AB})

$\bar{a}_A$ ไม่รู้ทั้งขนาดและทิศทาง

จะพบว่าพิจารณาสมการที่ยกมาข้างต้นจะมีตัวแปรถึง 3 ตัว คือ ขนาดของ $(\bar{a}_{A/B})_t$ และขนาดและทิศทางของ $\bar{a}_A$ ทำให้ยังไม่สามารถหาค่าได้

กรณีนี้จะต้องแยกคิด $\bar{a}_A$ เป็นทิศทาง n-t เช่นกันดังนี้ โดยเขียนสมการได้ดังนี้

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + (\bar{a}_{A/B})_n + (\bar{a}_{A/B})_t$$

$$(\bar{a}_A)_n + (\bar{a}_A)_t = \bar{a}_B + (\bar{a}_{A/B})_n + (\bar{a}_{A/B})_t$$

จากสมการนี้เมื่อพิจารณา $\bar{a}_A$ จะพบว่า

$(\bar{a}_A)_n$ จะรู้ทั้งขนาดและทิศทาง โดยมีทิศทางพุ่งเข้าหาจุด O ตามแนวเส้นตรง $\overline{OA}$ และมีขนาด $(a_A)_n = v_A^2/\overline{OA} = \overline{OA}\cdot\omega_{OA}^2$

$(\bar{a}_A)_t$ จะรู้แต่ทิศทาง (ตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{OA}$) ไม่รู้ขนาดเนื่องจากยังไม่ทราบค่าความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน OA (α_{OA})

จะเห็นว่าเมื่อแยกคิด $\bar{a}_A$ เป็นทิศทาง n-t จะทำให้ตัวไม่ทราบค่าที่เกี่ยวข้องกับ $\bar{a}_A$ เหลือเพียงขนาดของ $(\bar{a}_A)_t$ เท่านั้น และจากสมการความเร่งสัมพัทธ์ จะเหลือตัวไม่ทราบค่าเพียงแค่ 2 ตัว จึงสามารถหาค่าได้

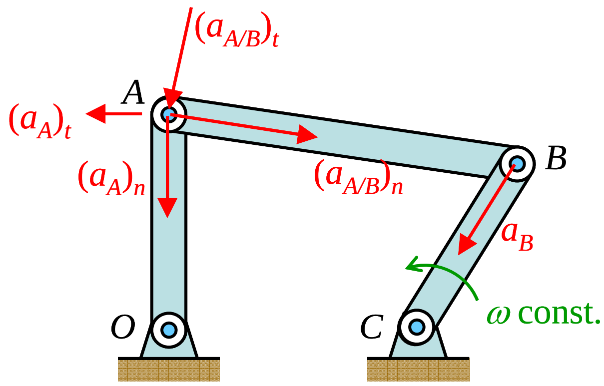
ค่าต่างๆ สามารถสรุปได้ดังนี้

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + (\bar{a}_{A/B})_n + (\bar{a}_{A/B})_t$$

$$(\bar{a}_A)_n + (\bar{a}_A)_t = \bar{a}_B + (\bar{a}_{A/B})_n + (\bar{a}_{A/B})_t$$

Mag.	$\omega_A^2 r_A$	×	○	$\omega_{AB}^2 \overline{AB}$	×
Dir.	○	○	○	$\overline{AB}$	$\perp \overline{AB}$

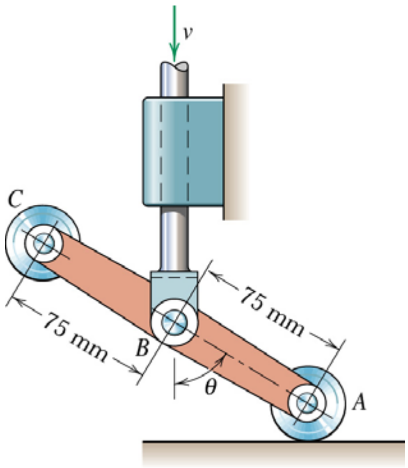
และสามารถเขียนทิศทางความเร่งในข้อต่อแต่ละชิ้นได้ดังนี้



3. เมื่อทราบค่าต่างๆ ในตารางแล้ว นำมาเขียนเวคเตอร์ความเร่ง จะหาค่าที่ต้องการได้

เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

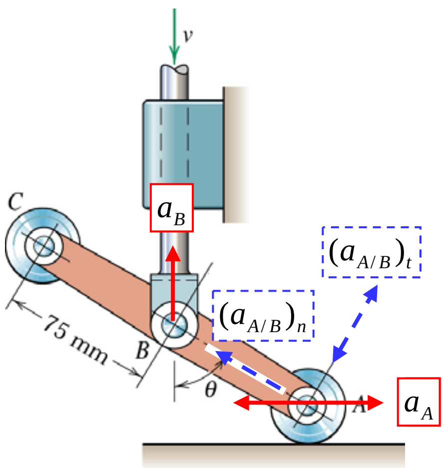


5/11 If the velocity v of the control rod is 0.9 m/s and is decreasing at the rate of 6 m/s^2 when $\theta = 60^o$, determine the magnitude of the acceleration of C. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/147]

วิธีทำ จากตัวอย่างในหัวข้อความเร็วสัมพัทธ์ จะได้ข้อมูลความเร็วดังนี้

$$\omega_{AB} = \omega_{BC} = 13.856 \text{ rad/s} \quad \text{CCW}$$

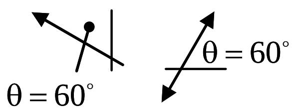
เนื่องจากไม่รู้ความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน ABC และไม่รู้ขนาด และทิศทางความเร่งที่จุด C จึงไม่สามารถหาความเร่งที่จุด C โดยตรงจากข้อมูลความเร่งที่จุด B ได้ ในข้อนี้จึงจำเป็นต้องหาความเร่งที่จุด A ซึ่งรู้ทิศทางความเร่งแน่นอนก่อน (ทิศทางขนานกับแนวระดับ)



เขียนสมการความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างจุด A และ B

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + (\bar{a}_{A/B})_n + (\bar{a}_{A/B})_t$$

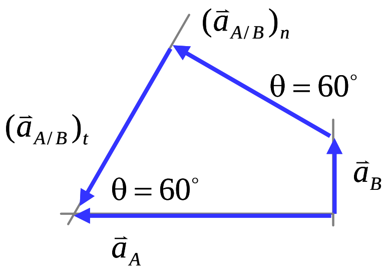
ขนาด	X	6	$\omega_{AB}^2 \cdot \overline{AB}$	X
ทิศทาง	$\leftrightarrow$	$\uparrow$	$// \overline{AB}$	$\perp \overline{AB}$



จากตารางพบว่ามีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัว ดังนั้นจึงสามารถหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้ หาค่าขนาดความเร่งที่ทราบค่าก่อน

$$(a_{A/B})_n = (13.856^2)(0.075) = 14.3992 \text{ m/s}^2$$

เขียนแผนภาพเวคเตอร์ได้ดังนี้



จากแผนภาพเวคเตอร์ สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของเวคเตอร์ต่างๆ ได้ดังนี้

พิจารณาในแนวดิ่ง

$$a_B + (a_{A/B})_n \cos 60^\circ - (a_{A/B})_t \sin 60^\circ = 0$$

$$6 + (14.3992)\cos 60^\circ - (a_{A/B})_t \sin 60^\circ = 0$$

$$(a_{A/B})_t = 15.2416 \text{ m/s}^2$$

พิจารณาในแนวระดับ

$$a_A = (a_{A/B})_n \sin 60^\circ + (a_{A/B})_t \cos 60^\circ$$

$$a_A = (14.3992)\sin 60^\circ + (15.2416)\cos 60^\circ$$

$$a_A = 20.0909 \text{ m/s}^2$$

จาก $(a_{A/B})_t = \alpha_{AB}\overline{AB}$

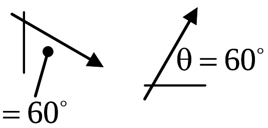
$$\alpha_{AB} = 15.2416/0.075 = 203.2213 \text{ rad/s}^2 \quad \text{CW}$$

$\alpha_{BC} = \alpha_{AB} = 203.2213 \text{ rad/s}^2$ CW เนื่องจากเป็นวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกัน

เขียนสมการความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างจุด B และ C

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + (\vec{a}_{C/B})_n + (\vec{a}_{C/B})_t$$

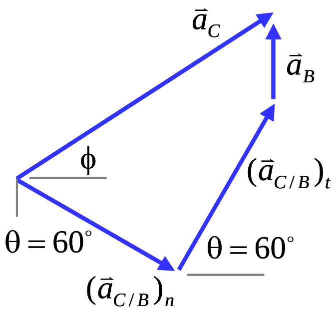
ขนาด	X	6	$\omega_{AB}^2 \cdot \overline{BC}$	$\alpha_{AB} \cdot \overline{BC}$
ทิศทาง	X	↑	$// \overline{BC}$	$\perp \overline{BC}$



$$(a_{C/B})_n = (13.856^2)(0.075) = 14.3992 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{C/B})_t = (203.2213)(0.075) = 15.2416 \text{ m/s}^2$$

เขียนแผนภาพความเร็วได้ดังนี้



จากแผนภาพเวคเตอร์ สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของเวคเตอร์ต่างๆ ได้ดังนี้

พิจารณาในแนวดิ่ง

$$-(a_{A/B})_n \cos 60^\circ + (a_{A/B})_t \sin 60^\circ + a_B = a_C \sin\phi$$

$$-14.3992 \cdot \cos 60^\circ + 15.2416 \cdot \sin 60^\circ + 6 = a_C \sin\phi$$

$$a_C \sin\phi = 12 \qquad (1)$$

พิจารณาในแนวระดับ

$$(a_{C/B})_n \sin 60^\circ + (a_{C/B})_t \cos 60^\circ = a_C \cos\phi$$

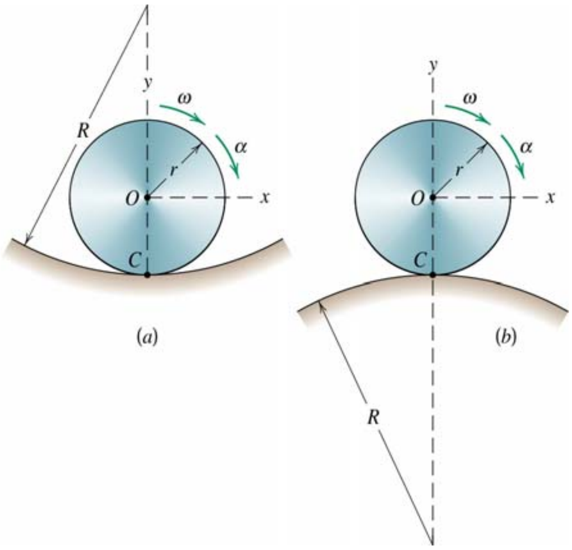
$$14.3992 \cdot \sin 60^\circ + 15.2416 \cdot \cos 60^\circ = a_C \cos\phi$$

$$a_C \cos\phi = 20.0909 \qquad (2)$$

จาก (1) และ (2)

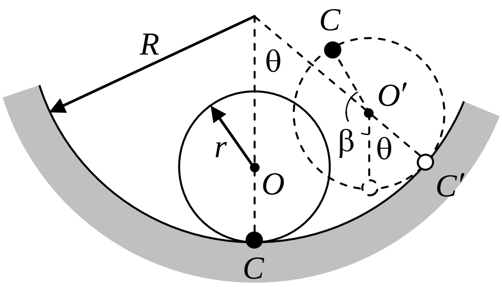
$$a_C = \sqrt{(a_C \sin\phi)^2 + (a_C \cos\phi)^2} = \sqrt{12^2 + 20.0909^2} = 23.4 \text{ m/s}^2$$ <u>Ans</u>

5/12 If the wheel in each case rolls on the circular surface without slipping, determine the acceleration of point C on the wheel momentarily in contact with the circular surface. The wheel has an angular velocity ω and an angular acceleration α. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/140]



วิธีทำ โจทย์กำหนดความเร็วและความเร่งเชิงมุมของการหมุนมา นำข้อมูลนี้มาหาความเร็วและความเร่งที่จุดศูนย์กลางได้ดังนี้

พิจารณาการเคลื่อนที่ของล้อกรณี (a)



เริ่มแรกล้อมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด O และสัมผัสพื้นที่จุด C เมื่อล้อหมุนไปเป็นมุม β กับแนวดิ่ง ล้อจะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ O' และสัมผัสพื้นที่จุด C' ระยะทางตามโค้งที่ล้อกลิ้งไป CC' หาได้ดังนี้

$$CC' = R\theta = r(\beta+\theta)$$

$$(R-r)\theta = r\beta$$

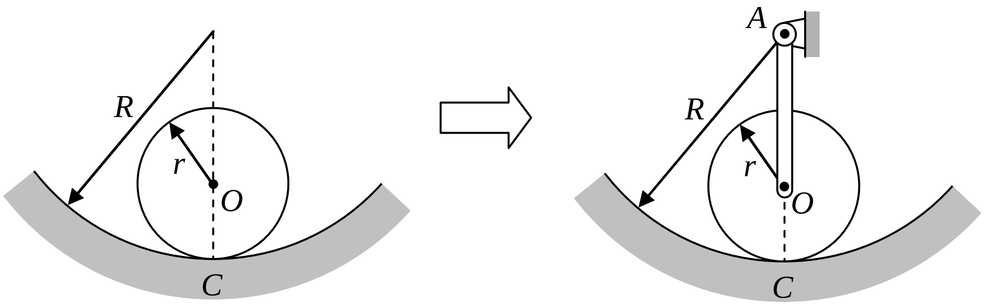
$$(R-r)\dot{\theta} = v_O = r\dot{\beta} = r\omega \qquad (1)$$

$$(R-r)\ddot{\theta} = (a_O)_x = r\ddot{\beta} = r\alpha \qquad (2)$$

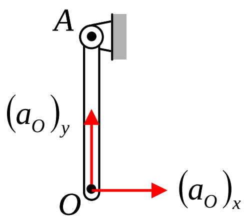
จากสมการ (1) และ (2) เมื่อทราบความเร็ว และความเร่งเชิงมุมของการหมุน จะหาข้อมูลความเร็วและความเร่งในแนว x ที่จุดศูนย์กลางได้ (เนื่องจากจุดศูนย์กลางล้อเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางวงกลมใหญ่ ดังนั้นความเร่งที่หาได้จากสมการ (2) จะไม่ใช่ความเร่งทั้งหมดของจุด O)

ในทำนองเดียวกัน กรณี (b) ก็สามารถทำได้และได้ผลเช่นเดียวกัน

กรณี (a) เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาจะทำการเพิ่มข้อต่อ OA เข้าไปดังรูป การเพิ่มข้อต่อนี้ไม่ทำให้การเคลื่อนที่ของล้อเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม



เนื่องจากจุด O หมุนเป็นวงกลมรอบจุด A พิจารณาชิ้นส่วน OA จะหาความเร่งที่จุด O ได้ดังนี้



$$(\vec{a}_O)_x = \alpha r$$

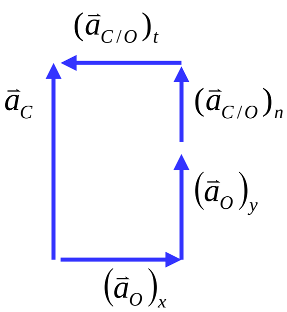
$$(\vec{a}_O)_y = \frac{v_O^2}{R-r} = \frac{(\omega r)^2}{R-r}$$

เขียนสมการความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างจุด O และ C

$$\vec{a}_C = (\vec{a}_O)_x + (\vec{a}_O)_y + (\vec{a}_{C/O})_n + (\vec{a}_{C/O})_t$$

ขนาด	X	αr	$\dfrac{(\omega r)^2}{R-r}$	$\omega^2 r$	αr
ทิศทาง	X	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\leftarrow$

จากตารางสามารถเขียนแผนภาพเวคเตอร์ได้ดังนี้

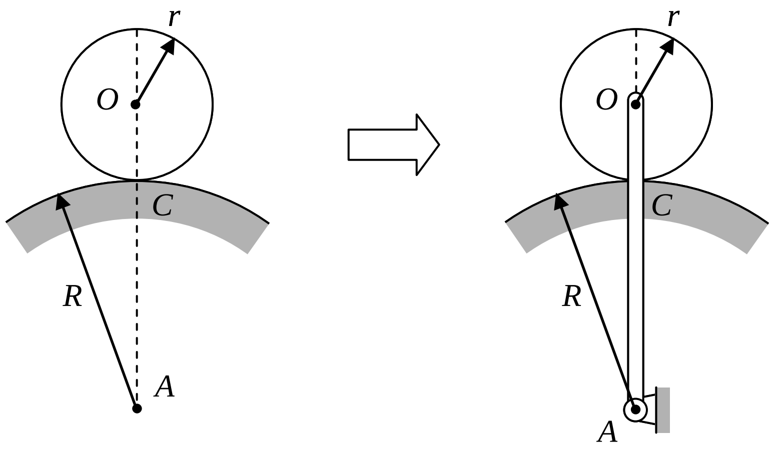


จากแผนภาพเวคเตอร์จะได้

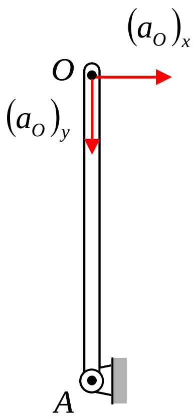
$$a_C = (a_O)_y + (a_{C/O})_n$$

$$a_C = \frac{(\omega r)^2}{R-r} + \omega^2 r = \omega^2 r\left(\frac{R}{R-r}\right)$$ <u>Ans</u>

กรณี (b) สามารถทำได้ทำนองเดียวกับกรณี (a) ดังนี้



เนื่องจากจุด O หมุนเป็นวงกลมรอบจุด A พิจารณาชิ้นส่วน OA จะหาความเร่งที่จุด O ได้ดังนี้



$$(\vec{a}_O)_x = \alpha r$$

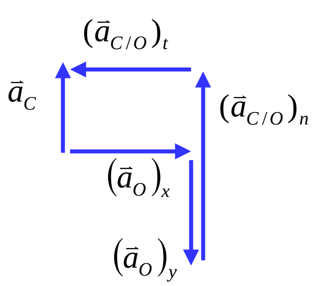
$$(\vec{a}_O)_y = \frac{v_O^2}{R+r} = \frac{(\omega r)^2}{R+r}$$

เขียนสมการความเร่งสัมพัทธ์ระหว่างจุด O และ C

$$\vec{a}_C = (\vec{a}_O)_x + (\vec{a}_O)_y + (\vec{a}_{C/O})_n + (\vec{a}_{C/O})_t$$

ขนาด	X	αr	$\frac{(\omega r)^2}{R+r}$	$\omega^2 r$	αr
ทิศทาง	X	→	↓	↑	←

จากตารางสามารถเขียนแผนภาพเวคเตอร์ได้ดังนี้



จากแผนภาพเวคเตอร์จะได้

$$a_C = (a_{C/O})_n - (a_O)_y$$

$$a_C = \omega^2 r - \frac{(\omega r)^2}{R+r} = \omega^2 r\left(\frac{R}{R+r}\right) \qquad \underline{\text{Ans}}$$

<u>หมายเหตุ</u> ขนาดของ $(\vec{a}_{C/O})_n$ มากกว่า $(\vec{a}_O)_y$ เสมอ ดังนั้น $\vec{a}_C$ จะมีทิศทางชี้ขึ้นเสมอ

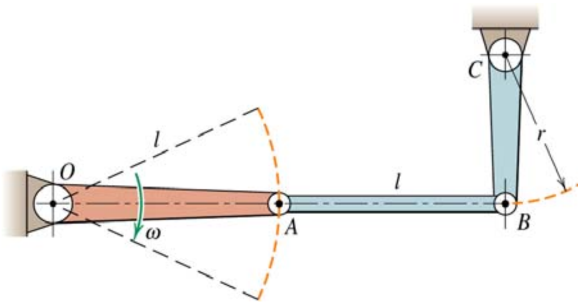
แบบฝึกหัด หัวข้อ 5/6

1. Crank *OA* oscillates between the dashed positions shown and causes small angular motion of crank *BC* through the connecting link *AB*. When *OA* crosses the horizontal position with *AB* horizontal and *BC* vertical, it has an angular velocity ω and zero angular acceleration. Determine the angular acceleration of *BC* for this position. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

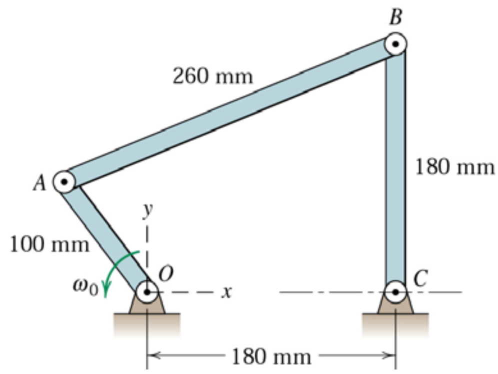
   (<u>*Ans*</u> $\alpha = 2l\omega^2/r$ CW)

2. If *OA* has a constant CCW angular velocity ω_O = 10 rad/s, calculate the angular acceleration of link *AB* for the position where the coordinates of *A* are *x* = -60 mm and *y* = 80 mm. Link *BC* is vertical for this position. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

   (<u>*Ans*</u> $\boldsymbol{\alpha}_{AB} = 10.24\mathbf{k}$ rad/s^2)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2

พลศาสตร์ (Dynamics)

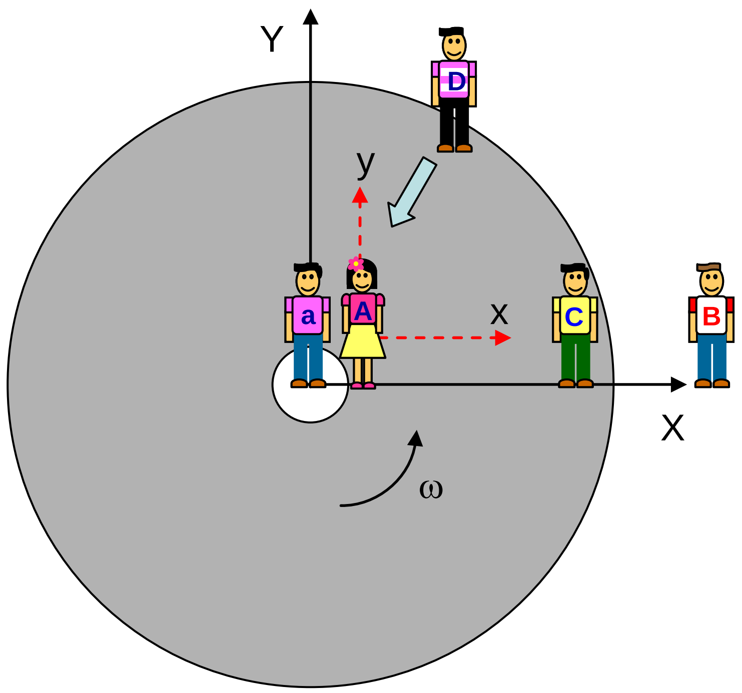
บทที่ 5 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง (ส่วนที่ 4)

5/7 Motion Relative to Rotating Axes

การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ที่เรียนมาในหัวข้อก่อนๆ เป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งซึ่งสังเกตโดยผู้สังเกตซึ่งใช้ระบบพิกัดฉากที่ไม่มีการหมุน อย่างไรก็ตามหลายๆ ครั้ง กลไกที่ต้องการวิเคราะห์การเคลื่อนที่อาจจะไม่ได้เชื่อมต่อกันด้วยวัตถุแข็งเกร็ง แต่เกิดการเคลื่อนที่แบบเลื่อนไถลกัน การเคลื่อนที่แบบนี้ไม่สามารถใช้วิธีการในหัวข้อที่แล้วในการหาความเร่งได้ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยผู้สังเกตซึ่งใช้แกนพิกัดหมุน ซึ่งสามารถใช้แก้ปัญหาเหล่านี้ได้ รวมถึงสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาในหัวข้อก่อนๆ ได้ด้วย

เพื่อให้เข้าใจถึงความแตกต่างของปัญหาที่สามารถพิจารณาโดยใช้แกนพิกัดซึ่งไม่หมุน ดังที่เรียนในหัวข้อก่อน และปัญหาซึ่งต้องพิจารณาด้วยแกนพิกัดหมุน พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 การเคลื่อนที่บนจานหมุน



รูปที่ 1 การเคลื่อนที่บนจานหมุน

รูปที่ 1 แสดงการเคลื่อนที่บนจานหมุน (วงกลมสีเทา) ซึ่งมีรูตรงกลาง ดังนั้นในรูป a และ B จะยืนอยู่นิ่งนอกจานหมุน ส่วน A, C และ D ยืนอยู่บนจานหมุนและหมุนไปพร้อมกับจานหมุน พิกัด X-Y เป็นพิกัดที่อยู่นิ่งเทียบกับโลก ส่วนพิกัด x-y จะเป็นพิกัดซึ่งหมุนไปพร้อม

กับจานหมุน สมมุติให้จานมีขนาดใหญ่ ดังนั้น a กับ A จะถือว่ายืนอยู่ตำแหน่งเดียวกันที่จุดกำเนิดของแกนพิกัด X-Y และ x-y

<u>กำหนดให้</u> a เป็นผู้สังเกตอยู่บนแกนหยุดนิ่งส่วน A เป็นผู้สังเกตซึ่งอยู่บนแกนหมุน ความเร็วที่ผู้สังเกตสังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุเรียกว่า $\bar{v}_{rel}$ (ในกรณีที่ผู้สังเกตเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ เราได้ทราบจากหัวข้อที่เรียนก่อนแล้วว่า $\bar{v}_{rel} = \bar{v}_{B/A}$)

1. <u>ผู้สังเกต a และ A สังเกตการเคลื่อนที่ของ B</u>

กรณีที่ผู้สังเกต a สังเกตการเคลื่อนที่ของ B นั้น จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_B = \bar{v}_a + \bar{v}_{B/a}$ เนื่องจาก a และ B อยู่นิ่ง a จึงเห็น B อยู่นิ่งด้วย ดังนั้นความเร็วทุกตัวในสมการความเร็วสัมพัทธ์จะเป็นศูนย์หมดทำให้สมการเป็นจริง ค่า $\bar{v}_{B/a}$ ในกรณีนี้จะเท่ากับความเร็วที่ผู้สังเกต a สังเกตการเคลื่อนที่ของ B ($\bar{v}_{B/a} = \bar{v}_{rel} = 0$)

ในกรณีผู้สังเกต A สังเกตการเคลื่อนที่ของ B นั้น จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A}$ เนื่องจากจุด A อยู่ที่จุดกำเนิดของแกนหมุน พิกัดจุด A จึงไม่มีการเปลี่ยนแปลง $\bar{v}_A = 0$ และจากรูป B ยืนอยู่นิ่ง $\bar{v}_B = 0$ ดังนั้นจะได้ $\bar{v}_{B/A} = 0$ อย่างไรก็ตามเนื่องจาก A เคลื่อนที่ไปพร้อมกับจานหมุน ดังนั้น A จะมองเห็น B เคลื่อนที่ ดังนั้น $\bar{v}_{rel}$ จึงมีค่าในกรณีนี้ $\bar{v}_{B/A} \neq \bar{v}_{rel}$

2. <u>ผู้สังเกต a และ A สังเกตการเคลื่อนที่ของ C</u>

กรณีที่ผู้สังเกต a สังเกตการเคลื่อนที่ของ C นั้น จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_C = \bar{v}_a + \bar{v}_{C/a}$ เนื่องจาก a อยู่นิ่ง ส่วน C จะหมุนไปพร้อมกับจาน a จึงเห็น C หมุนไปพร้อมกับจาน โดยเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบ a ในที่นี้ $\bar{v}_a = 0$ ส่วน $\bar{v}_C = \bar{v}_{C/a} = \bar{v}_{rel}$

อย่างไรก็ตาม ในกรณีผู้สังเกต A สังเกตการเคลื่อนที่ของ C นั้น จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{C/A}$ เนื่องจาก $\bar{v}_A = 0$ ดังนั้น $\bar{v}_C = \bar{v}_{C/A}$ เท่ากับความเร็วการหมุนเป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลาง แต่ในกรณีนี้ A หมุนไปพร้อมกับจานและพร้อมๆ กับ C ดังนั้น A จะมองเห็นว่า C หยุดนิ่ง $\bar{v}_{rel} = 0$ กรณีนี้ $\bar{v}_{C/A} \neq \bar{v}_{rel}$

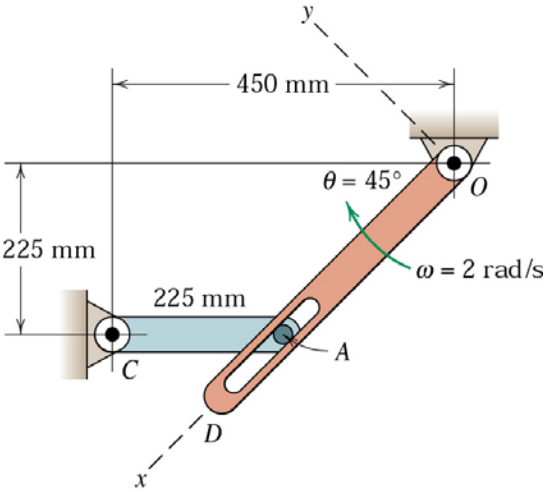
3. <u>ผู้สังเกต a และ A สังเกตการเคลื่อนที่ของ D</u>

สมการความเร็วสัมพัทธ์ในกรณีนี้ คือ $\bar{v}_D = \bar{v}_a + \bar{v}_{D/a}$ โดย $\bar{v}_a = 0$ เนื่องจาก D จะหมุนไปพร้อมกับจาน พร้อมๆ กับเดินเข้ามาหา a ที่จุดศูนย์กลาง ดังนั้น a จึงเห็น D หมุนไปพร้อมกับจานและเดินเข้าหาพร้อมๆ กัน

อย่างไรก็ตาม ในกรณีผู้สังเกต A สังเกตการเคลื่อนที่ของ D นั้น เนื่องจาก A หมุนไปพร้อมกับจานและพร้อมๆ กับ D ดังนั้น A จะมองเห็นว่า D เดินตรงเข้ามาหา A เพียงอย่างเดียว จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ $\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{D/A} = \bar{v}_{D/A}$ จะพบว่า $\bar{v}_{D/A} \neq \bar{v}_{rel}$

จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า ผู้สังเกตที่หยุดนิ่ง a (รวมถึงผู้สังเกตที่เคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ด้วย) จะสังเกตการเคลื่อนที่ได้ถูกต้อง ($\bar{v}_{xx/a} = \bar{v}_{rel}$) แต่ผู้สังเกตที่กำลังเคลื่อนที่แบบหมุนจะไม่สามารถสังเกตการเคลื่อนที่ได้ถูกต้อง ($\bar{v}_{xx/A} \neq \bar{v}_{rel}$) เนื่องจากผู้สังเกตที่เคลื่อนที่แบบหมุนไม่สามารถสังเกตการหมุนของตัวเองและวัตถุที่สังเกตได้ (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 1.2)

ตัวอย่างที่ 2 กลไกแบบเลื่อนไถล



รูปที่ 2 กลไกแบบเลื่อนไถล [1]

จากรูปที่ 2 กำหนดความเร็วเชิงมุมของชิ้นส่วน OD เท่ากับ 2 rad/s คงที่ ต้องการหาความเร็วและความเร่งเชิงมุมของชิ้นส่วน CA ปัญหานี้สามารถเขียนสมการความเร็วสัมพัทธ์ของความเร็วและความเร่ง ดังวิธีการที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้าได้ดังนี้

กำหนดให้จุด P เป็นจุดบนชิ้นส่วน OD ซึ่งอยู่ทับกับจุด A บนชิ้นส่วน CA ในขณะนั้น

<u>ความเร็วสัมพัทธ์</u>

	$\vec{v}_A$ =	$\vec{v}_P$ +	$\vec{v}_{A/P}$
Amp.	X	$\omega(\overline{OP})$	X
Dir.	$\perp AC$	$\perp OD$	$// OD$

จากสมการความเร็วสัมพัทธ์ พบว่ามีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัวจึงสามารถหาค่า $\vec{v}_A$ และ $\vec{v}_{A/P}$ ได้

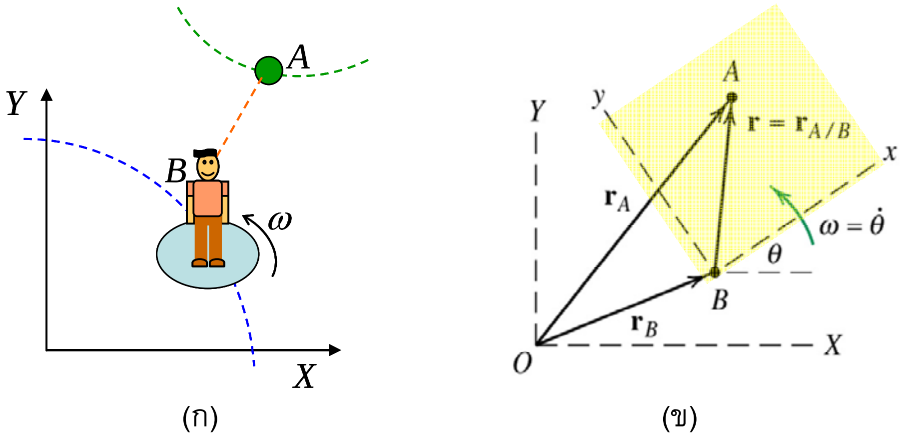
<u>ความเร่งสัมพัทธ์</u>

$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{A/P}$$

	$(\vec{a}_A)_n$ +	$(\vec{a}_A)_t$ =	$(\vec{a}_P)_n$ +	$(\vec{a}_P)_t$ +	$(\vec{a}_{A/P})$
Amp.	$\omega_{AC}^2(\overline{AC})$	X	$\omega^2(\overline{OP})$	0	X
Dir.	$\longleftarrow$	$\updownarrow$	$// OD$	$\perp OD$	X

จากสมการจะพบว่าไม่ทราบค่า $\vec{a}_{A/P}$ เนื่องจากชิ้นส่วน OD กับ AC ไม่ใช่เป็นวัตถุแข็งเกร็งชิ้นเดียวกัน แต่เป็นชิ้นส่วนคนละชิ้นที่เลื่อนไถลกัน ดังนั้นจะไม่สามารถคิดแบบเดียวกับปัญหาความเร่งสัมพัทธ์ในหัวข้อก่อนหน้าได้ ในกรณีนี้จำเป็นต้องใช้วิธีการความเร็วสัมพัทธ์ในกรณีแกนหมุนแก้ปัญหา

การสร้างสมการความเร็วสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตอยู่บนแกนหมุน



รูปที่ 3 การสังเกตการเคลื่อนที่ โดยผู้สังเกตที่เคลื่อนที่และหมุนไปด้วย [1]

รูปที่ 3(ก) แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ A ซึ่งสังเกตโดยผู้สังเกต B ซึ่งเคลื่อนที่ตามแนวเส้นประสีน้ำเงิน และหมุนไปพร้อมๆ กันด้วย รูปที่ 3(ก) สามารถเขียนในรูปเวคเตอร์การเคลื่อนที่ได้ดังแสดงในรูป 3(ข) เนื่องจากผู้สังเกตหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω ดังนั้นการสังเกตโดยผู้สังเกตจะใช้ระบบพิกัด x-y ซึ่งแกนพิกัดจะหมุนไปด้วยความเร็วเชิงมุม ω เช่นกัน ส่วนแกนพิกัด X-Y แสดงแกนพิกัดอ้างอิง ซึ่งอยู่นิ่ง

จากรูปที่ 3(ข) สามารถเขียนสมการแสดงตำแหน่งการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

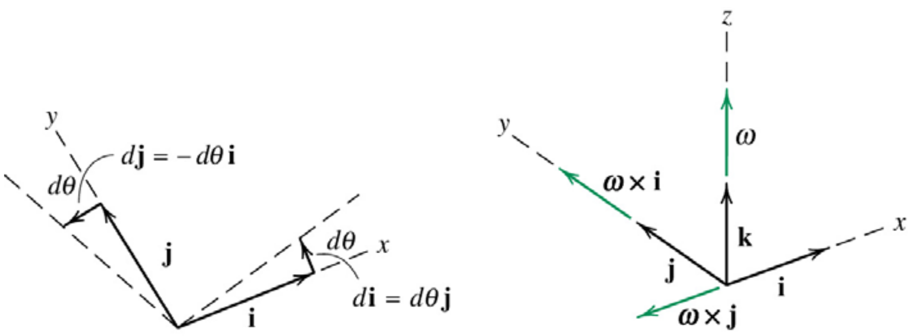
$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r} = \vec{r}_B + (x\hat{i} + y\hat{j}) \tag{1}$$

โดย x, y เป็นพิกัดซึ่งวัดได้จากระบบพิกัดหมุน x-y ส่วน $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ แสดงเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x และ y ตามลำดับ

ความเร็วของ A สามารถหาได้โดยหาอนุพันธ์สมการ (1) เทียบกับเวลาดังนี้

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \frac{d(x\hat{i} + y\hat{j})}{dt} \tag{2}$$

ในกรณีที่ผู้สังเกตเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่เพียงอย่างเดียว $\dfrac{d(x\hat{i} + y\hat{j})}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ ซึ่งจะเหมือนกับสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ที่ได้เรียนมาแล้ว อย่างไรก็ตามเนื่องจากในกรณีนี้แกนพิกัด x-y หมุน ดังนั้นทิศทางของเวคเตอร์ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ จะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา การหาอนุพันธ์จึงต้องหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วยด้วย



(ก) (ข)

รูปที่ 4 การหาค่าอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ [1]

รูปที่ 4 แสดงการหาอนุพันธ์ของเวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ จากรูปจะได้ว่า

$$d\hat{i} = d\theta\hat{j} \qquad \text{และ} \qquad d\hat{j} = -d\theta\hat{i}$$

ดังนั้น

$$\dot{\hat{i}} = \omega\hat{j} \qquad \text{และ} \qquad \dot{\hat{j}} = -\omega\hat{i} \tag{3}$$

หรือเขียนในรูปผลการครอสเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\dot{\hat{i}} = \vec{\omega}\times\hat{i} \qquad \text{และ} \qquad \dot{\hat{j}} = \omega\times\hat{j} \tag{4}$$

แทนความสัมพันธ์ในสมการ (4) ลงในสมการ (2) จะสามารถหาความเร็วได้ดังนี้

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \frac{d(x\hat{i} + y\hat{j})}{dt}$$

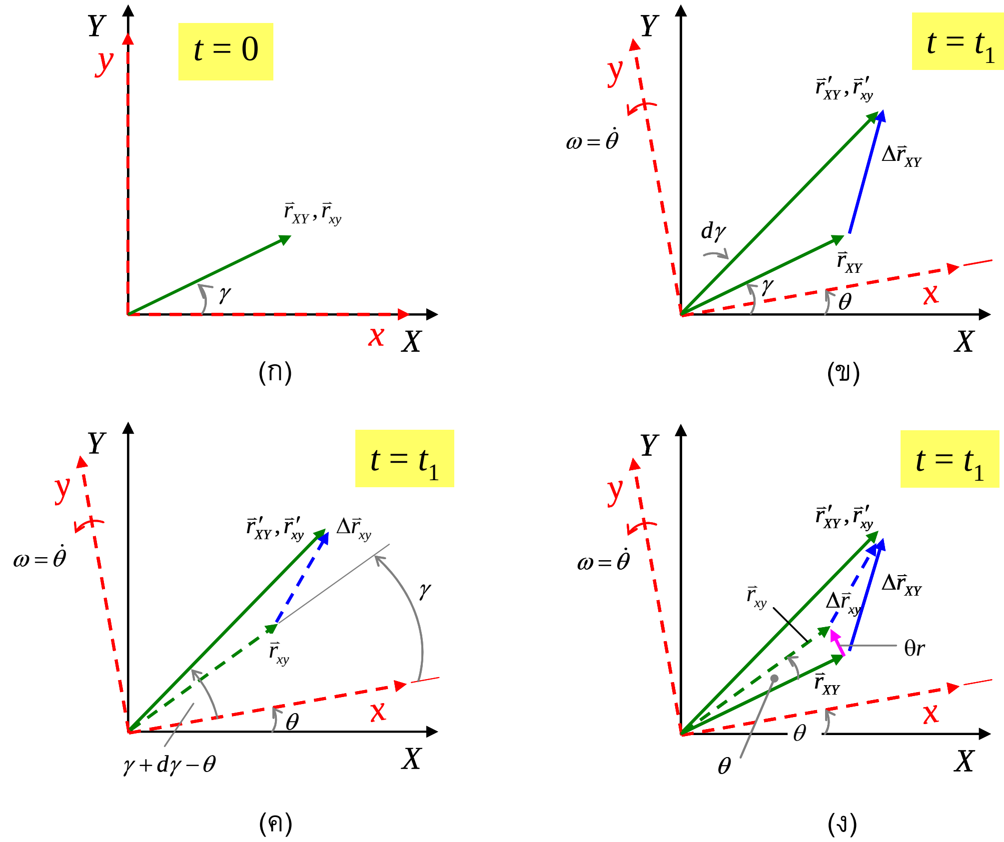
$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}}) + (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) \tag{5}$$

เทอม $x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} = \vec{\omega}\times x\hat{i} + \vec{\omega}\times y\hat{j} = \vec{\omega}\times(x\hat{i} + y\hat{j}) = \vec{\omega}\times\vec{r}$

เทอม $\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ แสดงความเร็วเมื่อเทียบกับแกน x-y หรือก็คือความเร็วที่ผู้สังเกต สังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุได้นั่นเอง เรียกเทอมนี้ว่าความเร็วสัมพัทธ์ที่ผู้สังเกตสังเกตได้ $\vec{v}_{rel} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ ดังนั้นสมการ (5) จะเขียนได้ดังนี้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}_{rel} \tag{7}$$

จะพบว่า สมการนี้จะคล้ายคลึงกับสมการความเร็วสัมพัทธ์ในหัวข้อก่อนๆ เพียงแต่จะมีเทอม $\vec{\omega}\times\vec{r}$ เพิ่มเข้ามา เนื่องจากผู้สังเกตที่หมุนจะไม่สามารถสังเกตการหมุนได้

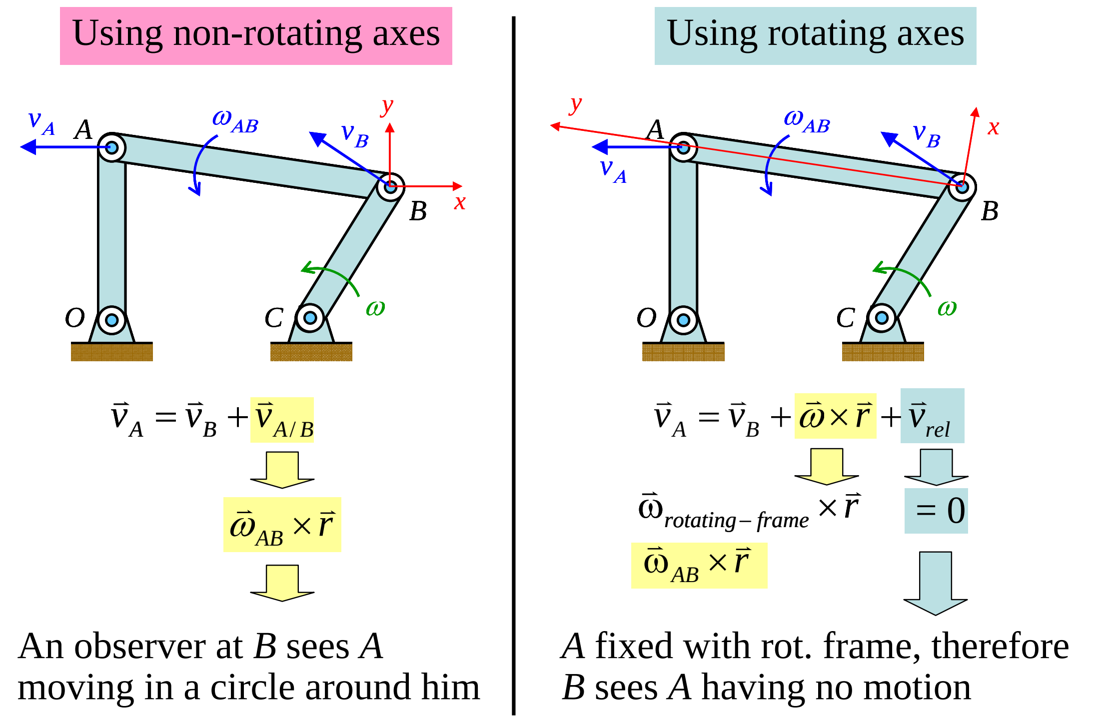


รูปที่ 5 ความแตกต่างระหว่างการสังเกตโดยอ้างอิงแกนหยุดนิ่ง และแกนหมุน

รูปที่ 5 แสดงความแตกต่างของการสังเกตโดยใช้แกนหยุดนิ่ง และแกนหมุน รูปที่ 5(ก) แสดงจุดเวลา t=0 ที่จุดนี้แกนหยุดนิ่ง X-Y อยู่ซ้อนกับแกนหมุน x-y โดยตำแหน่งของวัตถุที่สังเกตแสดงโดยเวคเตอร์ $\vec{r}_{XY}$ และ $\vec{r}_{xy}$ เมื่อสังเกตจากแกนหยุดนิ่งและสังเกตจากแกนหมุนตามลำดับ เมื่อเวลาผ่านไปเป็น $t=t_1$ ดังแสดงในรูป 5(ข) แกนหมุนจะหมุนไปเป็นมุม θ ส่วนวัตถุเคลื่อนที่ไปที่ตำแหน่ง $\vec{r}'_{XY}$ และ $\vec{r}'_{xy}$ เมื่อเทียบกับแกนหยุดนิ่งและแกนหมุน เวคเตอร์แสดงการเคลื่อนที่เมื่อสังเกตจากผู้สังเกตที่หยุดนิ่ง คือ $\Delta\vec{r}_{XY}$

รูปที่ 5(ค) แสดงการสังเกตการเคลื่อนที่โดยผู้สังเกตบนแกนหมุน ผู้สังเกตจะพบว่าตำแหน่งเดิมของวัตถุอยู่ที่ $\vec{r}_{xy}$ และเมื่อเวลา $t=t_1$ วัตถุจะเคลื่อนที่ไปที่ $\vec{r}'_{xy}$ เวคเตอร์แสดงการเคลื่อนที่เมื่อสังเกตจากผู้สังเกตบนแกนหมุน คือ $\Delta\vec{r}_{xy}$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าแตกต่างจากเวคเตอร์ $\Delta\vec{r}_{XY}$ ที่แสดงในรูปที่ 5(ข)

รูปที่ 5(ง) แสดงความแตกต่างของเวคเตอร์ $\Delta\vec{r}_{XY}$ กับเวคเตอร์ $\Delta\vec{r}_{xy}$ โดย $\Delta\vec{r}_{XY} = \Delta\vec{r}_{xy} + \theta r$ จากรูปนี้แสดงให้เห็นว่าผู้สังเกตที่อยู่บนแกนหมุนจะไม่สามารถสังเกตการหมุนของแกนได้ ผลการสังเกตจากผู้สังเกตบนแกนหมุนจึงต้องบวกเวคเตอร์ θr เข้าไปด้วยจึงจะได้ค่าที่ถูกต้อง (สำหรับความเร็ว คือการบวกเทอม $\bar{\omega} \times \bar{r}$ เพิ่มเข้าไปนั่นเอง)



รูปที่ 6 การเปรียบเทียบปัญหากลไกข้อต่อโดยใช้แกนไม่หมุนและแกนหมุน

รูปที่ 6 แสดงการเปรียบเทียบการแก้ปัญหากลไกข้อต่อ เนื่องจากกลไกข้อต่อต่อกันด้วยชิ้นส่วนแข็งเกร็ง AB ดังนั้นปัญหานี้จึงสามารถแก้ได้ทั้งโดยการวิเคราะห์แบบความเร็วสัมพัทธ์ (ที่เรียนในหัวข้อก่อนหน้า) ทางด้านซ้ายมือ กับการใช้แกนหมุนทางด้านขวามือ ในกรณีใช้ความเร็วสัมพัทธ์ และแกนพิกัดของผู้สังเกต B ไม่หมุน B จะมองเห็น A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด B ดังนั้น $\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}$ อย่างไรก็ตามถ้าใช้การพิจารณาแบบแกนหมุน โดยตั้งแกนหมุนดังรูปทางด้านขวามือ จะพบว่าจุด A และจุด B จะเป็นจุดที่ไม่เคลื่อนที่เทียบกับแกน x-y ที่ตั้งขึ้น ดังนั้นผู้สังเกตที่ B จะมองเห็น A อยู่นิ่ง (พิกัดเดิมบนแกน x-y ตลอดเวลา) $\vec{v}_{rel} = 0$ อย่างไรก็ตามสมการจากการพิจารณาโดยใช้แกนหมุนจะเหมือนกับการพิจารณาแบบความเร็วสัมพัทธ์ที่เรียนมาแล้ว เนื่องจากมีพจน์ $\vec{\omega}_{rotating-frame} \times \vec{r} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}$ เพิ่มเข้ามา

การสร้างสมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตบนแกนหมุน

สมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตบนแกนหมุนสามารถสร้างได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการความเร็วสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตบนแกนหมุน (สมการ (7)) เทียบกับเวลา ดังนี้

จาก $$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

ดังนั้น $$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{v}}_{rel} \qquad (8)$$

พิจารณาเทอม $\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j}) = (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}}) + (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j})$$

$$= \vec{\omega}\times\vec{r} + v_{rel}$$

เพราะฉะนั้น $$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r} + v_{rel}) = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} \qquad (9)$$

พิจารณาเทอม $\dot{\vec{v}}_{rel}$

$$\dot{\vec{v}}_{rel} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) = (\dot{x}\dot{\hat{i}} + \dot{y}\dot{\hat{j}}) + (\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j})$$

$$= \vec{\omega}\times(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) + (\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j})$$

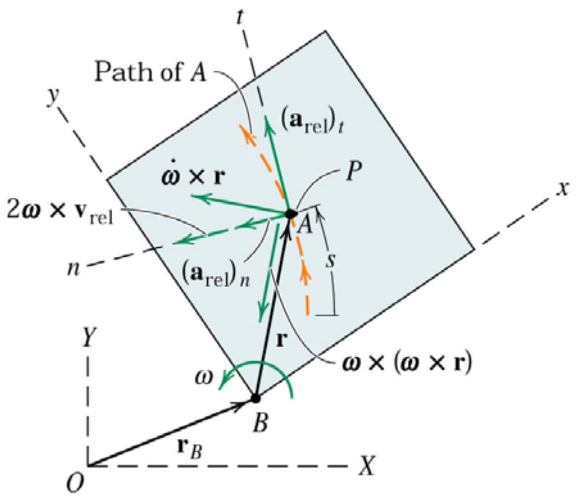
$$= \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \qquad (10)$$

โดย $\vec{a}_{rel}$ หมายถึงความเร่งที่สังเกตได้จากแกนหมุน

แทนสมการ (9) และ (10) ลงในสมการ (8) จะได้สมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับผู้สังเกตบนแกนหมุนดังนี้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \qquad (11)$$

เพื่อให้ง่ายต่อการจดจำสมการ (11) ให้พิจารณารูปที่ 7 ซึ่งแสดงทิศทางของความเร่งต่างๆ ผู้สังเกตอยู่ที่จุด B โดยแกนพิกัดที่ใช้ x-y หมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω ผู้สังเกตสังเกตการเคลื่อนที่ของวัตถุ A ซึ่งเคลื่อนที่ตามแนวเส้นการเคลื่อนที่สีส้ม จุด P เป็นจุดคงที่บนพิกัด x-y ซึ่งในขณะนั้นอยู่ตำแหน่งเดียวกับจุด A



รูปที่ 7 ความเร่งต่างๆ ในระบบแกนพิกัดหมุน [1]

ผู้สังเกต B เคลื่อนที่ด้วยความเร่ง $\bar{a}_B$ เมื่อผู้สังเกตสังเกตจุด P ซึ่งอยู่ทับกับจุด A จะพบว่าจุด P เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบผู้สังเกต (เมื่อสังเกตโดยใช้แกนพิกัดที่ไม่หมุน) ความเร่งของจุด P เท่ากับ $\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}$ (ความเร่งในแนวเส้นรอบวง) และ $\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$ (ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง)

อย่างไรก็ตาม ตำแหน่งที่ต้องการสังเกตคือจุด A ความเร่งที่จุด A เมื่อเทียบจากจุด P จะเท่ากับ $2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}+\bar{a}_{rel}$ โดย $\bar{a}_{rel}$ เป็นความเร่งที่มองเห็นโดยผู้สังเกตที่อยู่บนแกนหมุน ส่วน $2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}$ เป็นความเร่งที่แตกต่างเมื่อสังเกตบนแกนไม่หมุนและแกนหมุน ความเร่ง $2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}$ มีชื่อเรียกว่า ความเร่ง Coriolis ทิศทางของความเร่ง Coriolis นี้หาได้จากกฎมือขวาตามหลักการครอสเวคเตอร์

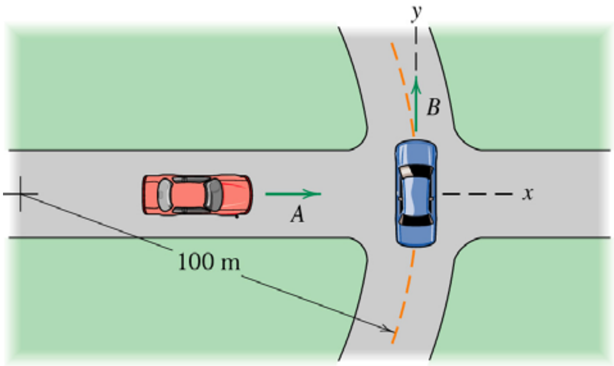
ขั้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์

1. พิจารณาว่าเป็นปัญหาที่จำเป็นจะต้องใช้แกนพิกัดหมุนแก้ปัญหาหรือไม่ ตัวอย่างปัญหาที่ใช้แกนพิกัดหมุนแก้ ได้แก่ (1) ปัญหาความเร็วความเร่งในกลไก ซึ่งไม่ได้เชื่อมต่อเป็นวัตถุแข็งเกร็งอันเดียวกัน แต่เชื่อมต่อกันด้วยกลไกแบบเลื่อนไถล หรือ (2) ปัญหาการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของอนุภาค ซึ่งผู้สังเกตกำลังเคลื่อนที่แบบหมุน หรืออยู่ในทางโค้ง
2. เขียนสมการความเร็ว $\bar{v}_A=\bar{v}_B+\bar{\omega}\times\bar{r}+\bar{v}_{rel}$ และพิจารณาค่าขนาด และทิศทางของแต่ละเวคเตอร์ ตามวิธีการเดียวกับการพิจารณาเรื่องความเร็วและความเร่งสัมพัทธ์ ที่ได้เรียนมาก่อนหน้าแล้วเพื่อหาค่าความเร็วที่ต้องการ
3. เขียนสมการความเร่ง $\bar{a}_A=\bar{a}_B+\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})+2\bar{\omega}\times\bar{v}_{rel}+\bar{a}_{rel}$ และใช้วิธีการเดียวกับการพิจารณาความเร็ว เพื่อหาค่าความเร่งที่ต้องการ

เอกสารอ้างอิง

[1] J.L.Meriam and L.G.Kraige, Engineering mechanics DYNAMICS fifth edition SI Version, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

5/13 Car B is rounding the curve with a constant speed of 54 km/h, and car A is approaching car B in the intersection with a constant speed of 72 km/h. Determine the velocity which car A appears to have to an observer riding in and turning with car B. The x-y axes are attached to car B. Is this apparent velocity the negative of the velocity which B appears to have to a nonrotating observer in car A? The distance separating the two cars at the instant depicted is 40 m. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/156]



วิธีทำ ปัญหาข้อนี้เป็นปัญหาการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยผู้สังเกตกำลังเคลื่อนที่ในทิศทางโค้ง ดังนั้นในข้อนี้จึงต้องใช้ระบบแกนพิกัดหมุนในการพิจารณา โดยแกนหมุนจะหมุนรอบจุดศูนย์กลางความโค้งของถนน

ความเร็ววัตถุที่ต้องการสังเกต $\vec{v}_A = 72(\frac{1000}{3600})\hat{i} = 20\hat{i}$ m/s $\longrightarrow$

ความเร็วผู้สังเกต $\vec{v}_B = 54(\frac{1000}{3600})\hat{j} = 15\hat{j}$ m/s $\uparrow$

ความเร็วเชิงมุมของแกนหมุน $\omega = \frac{v_B}{\rho} = \frac{15}{100} = 0.15$ rad/s หรือ $\vec{\omega} = 0.15\hat{k}$ rad/s

$$\vec{r} = -40\hat{i} \quad \longleftarrow$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = 0.15\hat{k}\times(-40\hat{i}) = (0.15)(40)(-\hat{j}) = -6\hat{j}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

ขนาด	20	15	6	X
ทิศทาง	→	↑	↓	X

จากตาราง เนื่องจากมีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว จึงสามารถหาค่า $\vec{v}_{rel}$ ได้

แทนค่าความเร็วแต่ละตัวลงในสมการความเร็วสัมพัทธ์สำหรับแกนหมุน จะได้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

$$20\hat{i} = 15\hat{j} - 6\hat{j} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}_{rel} = 20\hat{i} - 9\hat{j} \text{ m/s}$$ <u>Ans</u>

เปรียบเทียบกับกรณีที่ผู้สังเกต A มองรถยนต์ B
ในกรณีนี้ผู้สังเกต A เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง จึงสามารถใช้วิธีการความเร็วสัมพัทธ์ตามที่เรียนมาในบทที่ 2 ได้

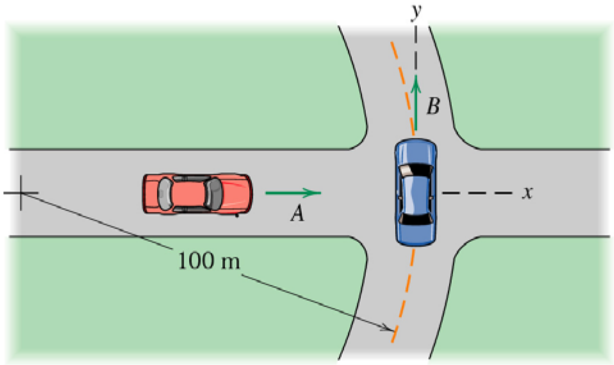
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$15\hat{j} = 20\hat{i} + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{B/A} = -20\hat{i} + 15\hat{j}$$ <u>Ans</u>

<u>ข้อสังเกต</u> $\vec{v}_{B/A} \neq -\vec{v}_{rel}$ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ผู้สังเกต A มองเห็น B ไม่เหมือนกับที่ผู้สังเกตที่ B มองเห็น A โดยส่วนต่างของความเร็วทั้งสองเท่ากับ $\vec{\omega} \times \vec{r} = 6\hat{j}$

5/14 For the cars of Prob.5/156 traveling with constant speed, determine the acceleration which car A appears to have to an observer riding in and turning with car B. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/157]



วิธีทำ จากข้อ 5/156 จะได้ข้อมูลดังนี้

$\vec{v}_A = 20\hat{i}$ m/s $\quad \vec{v}_B = 15\hat{j}$ m/s $\quad \vec{\omega} = 0.15\hat{k}$ rad/s

$\vec{r} = -40\hat{i} \quad \vec{\omega}\times\vec{r} = -6\hat{j} \quad \vec{v}_{rel} = 20\hat{i} - 9\hat{j}$ m/s

สมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับแกนพิกัดหมุน

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

พิจารณาทีละพจน์ได้ดังนี้

$\vec{a}_A = 0$ เนื่องจากรถวิ่งทางตรงด้วยความเร็วคงที่

$$\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t = \frac{v_B^2}{\rho}(-\hat{i}) + 0 = -\frac{15^2}{100}\hat{i} = -2.25\hat{i} \text{ m/s}^2$$

$(\vec{a}_B)_t = 0$ เนื่องจากรถ B วิ่งด้วยอัตราเร็วคงที่

$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = 0$ เนื่องจากแกนหมุนติดกับรถ B ซึ่งวิ่งทางโค้งด้วยความเร็วคงที่ $\dot{\vec{\omega}} = 0$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 0.15\hat{k}\times(0.15\hat{k}\times -40\hat{i}) = 0.9\hat{i} \text{ m/s}^2$$

พจน์ $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ สามารถหาได้ง่ายโดยพิจารณาขนาดจาก $\omega^2 r$ ส่วนทิศทางจะมีทิศทางจากวัตถุที่ถูกสังเกตพุ่งเข้าหาผู้สังเกตเสมอ

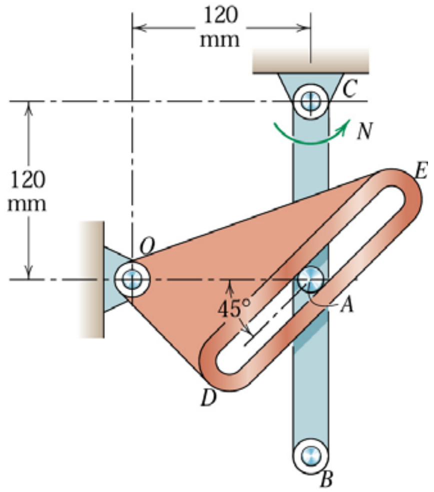
$$2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = 2(0.15\hat{k}\times(20\hat{i} - 9\hat{j})) = 6\hat{j} + 2.7\hat{i}$$

จากสมการความเร่งสัมพัทธ์พบว่ามีเพียงพจน์ $\vec{a}_{rel}$ ซึ่งไม่รู้ค่าเท่านั้น ดังนั้นแทนค่าพจน์ต่าง ๆ ที่หามาแล้วลงในสมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับแกนหมุนจะหาค่า $\vec{a}_{rel}$ ได้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

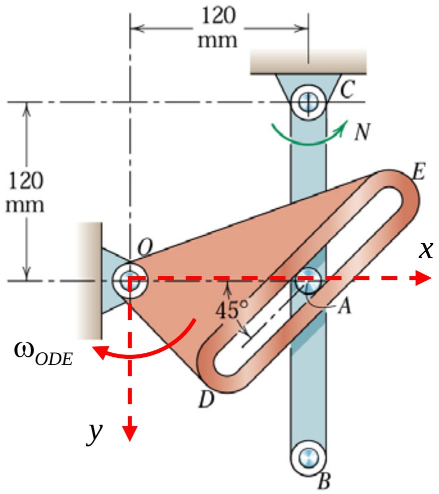
$$0 = -2.25\hat{i} + 0 + 0.9\hat{i} + (6\hat{j} + 2.7\hat{i}) + \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{a}_{rel} = -1.35\hat{i} - 6\hat{j} \text{ m/s}^2$$ Ans



5/15 For the instant represented, link *CB* is rotating counterclockwise at a constant rate $N = 4$ rad/s, and its pin *A* causes a clockwise rotation of the slotted member *ODE*. Determine the angular velocity ω and angular acceleration α of *ODE* for this instant. [Engineering Mechanics Dynamics 5th edition, Meriam & Kraige, prob.5/168]

วิธีทำ ปัญหาข้อนี้เป็นปัญหาการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนกลไก 2 ชิ้น ที่ไม่ได้เชื่อมกันด้วยจุดยึดแน่น หรือวัตถุแข็งเกร็ง แต่เป็นการเชื่อมกันด้วยชิ้นส่วนที่ไถลกัน ดังนั้นในข้อนี้จึงจำเป็นต้องพิจารณาโดยใช้แกนพิกัดแบบหมุน



ตั้งแกนพิกัดหมุน x-y ดังแสดงในรูป จะได้ว่าผู้สังเกตอยู่ที่จุด O และสังเกตการเคลื่อนที่ของจุด A

เวคเตอร์ $\vec{r}$ จะชี้จากผู้สังเกตไปยังจุดที่สังเกต จึงมีทิศชี้ไปทางขวา $\longrightarrow$

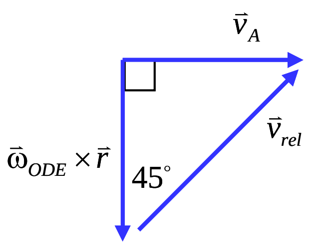
พิจารณาสมการความเร็วสัมพัทธ์สำหรับแกนหมุน

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

ขนาด	$\omega_{CB}\overline{CA}$	0	X	X
ทิศทาง	$\longrightarrow$	–	$\downarrow$	// *DE*

จากตารางจะพบว่ามีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัวจึงสามารถหาค่าได้

นำเวคเตอร์มาเขียนแผนภาพเวคเตอร์ และจากแผนภาพจะคำนวณค่าต่างๆ ได้ดังนี้



$$v_A = \omega_{CB} \cdot \overline{CA} = 4(0.12) = 0.48 \text{ m/s}$$

$$|\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r}| = \omega_{ODE} \cdot r = \omega_{ODE} \cdot 0.12 = v_A = 0.48$$

$$\omega_{ODE} = 4 \text{ rad/s}$$ Ans

$$v_{rel} = v_A\sqrt{2} = 0.48\sqrt{2} \text{ m/s}$$

พิจารณาสมการความเร่งสัมพัทธ์สำหรับแกนหมุน

$$\vec{a}_A = \overset{=0}{\cancel{\vec{a}_O}} + \dot{\vec{\omega}}_{ODE} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{ODE} \times (\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$(\vec{a}_A)_n + (\vec{a}_A)_t = \dot{\vec{\omega}}_{ODE} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{ODE} \times (\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

ขนาด	$\omega_{CB}^2 \overline{CA}$	0	X	$\omega_{ODE}^2 \cdot r$	$2\omega_{ODE} v_{rel}$	X
ทิศทาง	↑	–	↕	←	45° ↘	$// DE$

↗ 45°

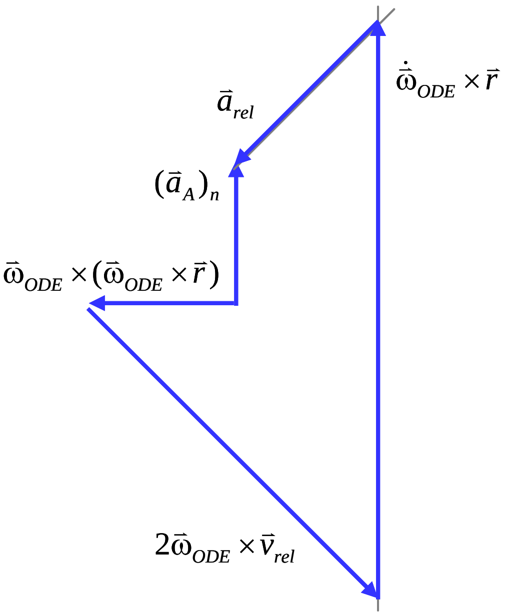
จากตารางจะพบว่ามีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัวจึงสามารถหาค่าได้
คำนวณค่าต่างๆ ที่ทราบได้ดังนี้

$$(a_A)_n = \omega_{CB}^2 \overline{CA} = 4^2(0.12) = 1.92 \text{ m/s}^2$$

$$\left|\vec{\omega}_{ODE} \times (\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{r})\right| = \omega_{ODE}^2 \cdot r = 4^2(0.12) = 1.92 \text{ m/s}^2$$

$$\left|2\vec{\omega}_{ODE} \times \vec{v}_{rel}\right| = 2\omega_{ODE} v_{rel} = 2(4)0.48\sqrt{2} = 3.84\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

นำค่าที่ทราบมาเขียนแผนภาพเวคเตอร์ได้ดังนี้



คิดผลรวมเวคเตอร์ในแนวระดับ

$$-\omega_{ODE}^2 \cdot r + 2\omega_{ODE} \cdot v_{rel} \cdot \cos 45^\circ - a_{rel} \cos 45^\circ = 0$$

$$-1.92 + 3.84\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - a_{rel} \cos 45^\circ = 0$$

$$a_{rel} = 1.92\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

คิดผลรวมเวคเตอร์ในแนวดิ่ง

$$(a_A)_n = -2\omega_{ODE} v_{rel} \cos 45^\circ + \dot{\omega}_{ODE} r - a_{rel} \cos 45^\circ$$

$$1.92 = -3.84\sqrt{2} \cos 45^\circ + \dot{\omega}_{ODE} r - 1.92\sqrt{2} \cos 45^\circ$$

$$\dot{\omega}_{ODE} r = 7.68 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{ODE} = \dot{\omega}_{ODE} = \frac{7.68}{0.12} = 64 \text{ rad/s}^2 \quad \text{CCW}$$

Ans

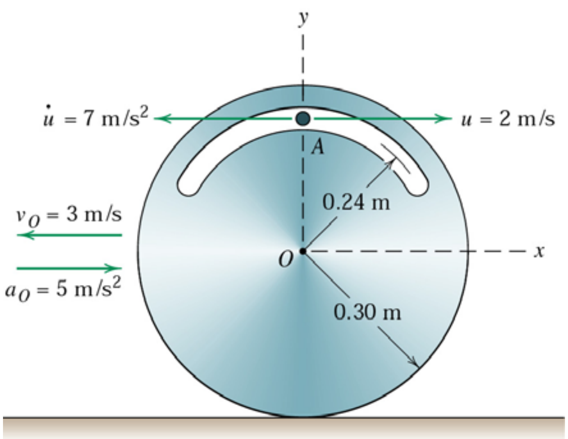
แบบฝึกหัด หัวข้อ 5/7

1. The disk rolls without slipping on the horizontal surface, and at the instant represented, the center *O* has the velocity and acceleration shown in the figure. For this instant, the particle *A* has the indicated speed *u* and time-rate-of-change of speed $\dot{u}$, both relative to the disk. Determine the absolute velocity and acceleration of particle *A*. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

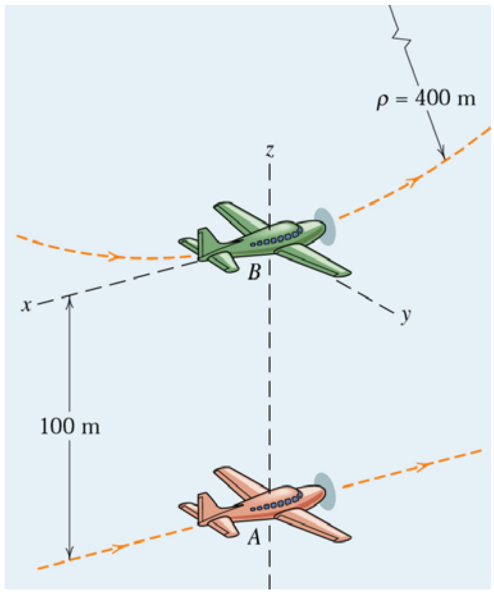
(Ans $\mathbf{v}_A$ = -3.4**i** m/s, $\mathbf{a}_A$ = 2**i** – 0.667**j** m/s^2)

2. Aircraft *B* has a constant speed of 540 km/h at the bottom of a circular loop of 400-m radius. Aircraft *A* flying horizontally in the plane of the loop passes 100 m directly under *B* at a constant speed of 360 km/h. With coordinate axes attached to *B* as shown, determine the acceleration which *A* appears to have to the pilot of *B* for this instant. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

(Ans $\mathbf{a}_{rel}$ = -4.69**k** m/s^2)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 1



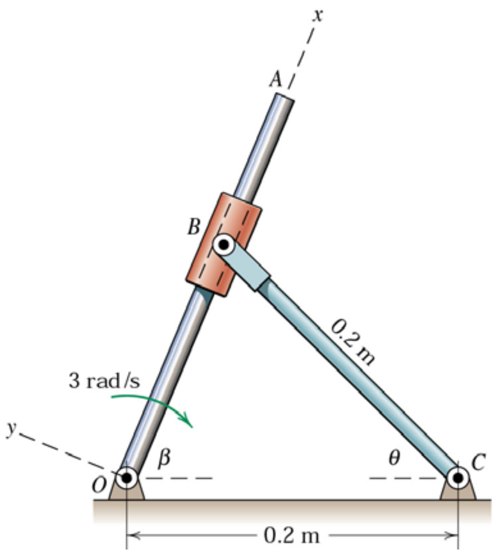
รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 2

3. Link *OA* has a constant CW angular velocity of 3 rad/s for a brief interval of its rotation. Determine the angular acceleration α_{BC} of *BC* for the instant when θ = 60°. First use a rotating-frame analysis, and then verify your result with an absolute-motion approach. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

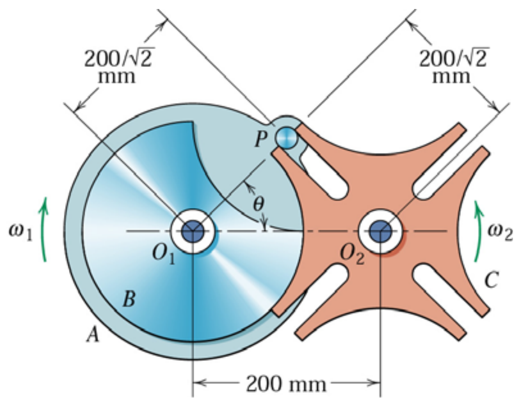
(Ans α_{BC} = 0)

4. Determine the angular acceleration α_2 of wheel C for the instant when θ = 20°. Wheel A has a constant clockwise angular velocity of 2 rad/s. [Engineering Mechanics DYNAMICS 5th edition, Meriam & Kraige]

(*Ans* α_2 = 16.53 rad/s^2 CCW)



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 3



รูปประกอบแบบฝึกหัดข้อ 4