

# Fatigue Failure

- **Introduction**
- **Fatigue testing**
- **The Endurance Limit**
- **Endurance Limit modifying factors**
- **Fluctuating stresses**
- **Fatigue Failure Criteria**
- **Combinations of Loading Modes**

2103320 Des Mach Elem  
Mech. Eng. Department  
Chulalongkorn University

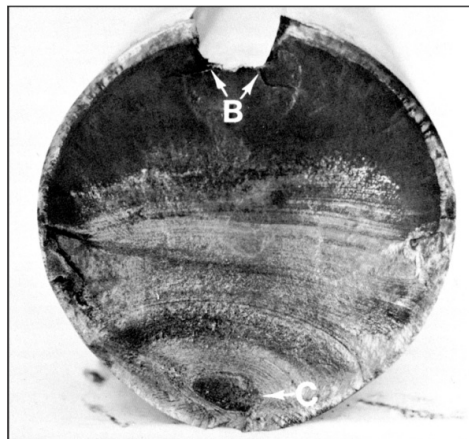
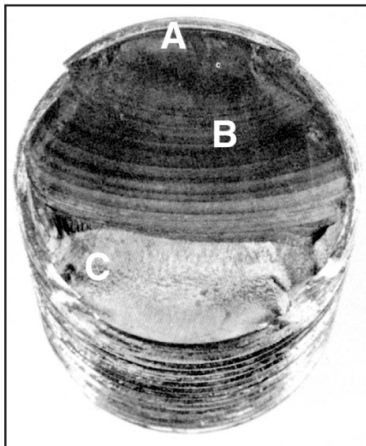
# Introduction

- การแตกหักเนื่องจากความล้า (Fatigue) เกิดจากแรงกระทำกับชิ้นงานซ้ำไป ซ้ำมา หลายๆ รอบ
- แม้ว่าความเค้นที่เกิดจะน้อยกว่า Yield strength ก็อาจเกิดความเสียหายได้
- การแตกหักเนื่องจากความล้า มักเกิดทันทีทันใด ไม่มีสัญญาณเตือนก่อน

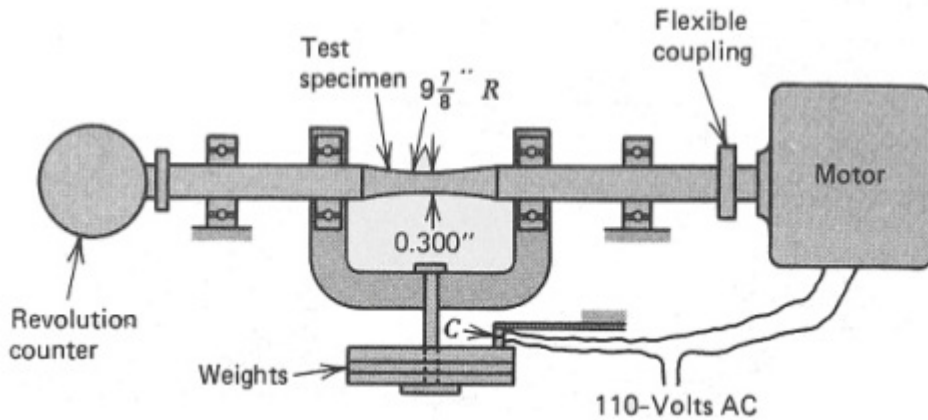
- รอยแตกหักขนาดเล็ก สังเกตไม่พบด้วยตาเปล่า
- มักเกิดในตำแหน่งที่ชิ้นงานขาดความต่อเนื่อง (Discontinuity) ซึ่งมี Stress concentration สูง

ขนาดรอยแตกขยายตัว  
จากแรงที่ซ้ำไปซ้ำมา

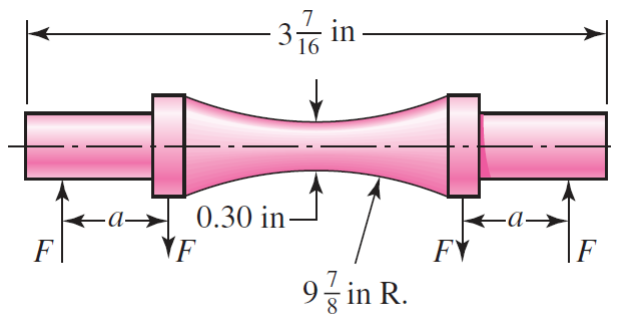
- รอยแตกมีขนาดใหญ่
- เนื้อวัสดุที่เหลือไม่สามารถรับภาระได้ จึงเกิดการแตกหัก



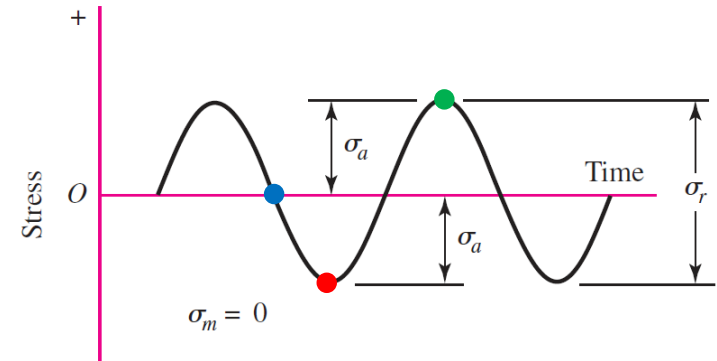
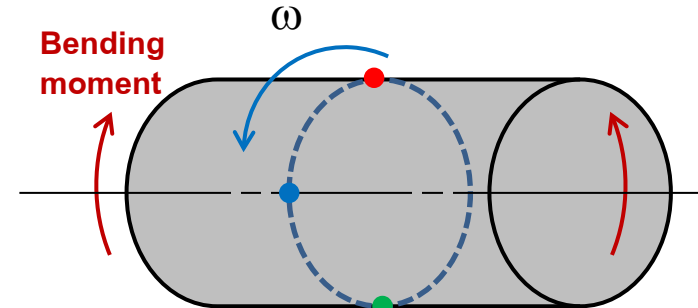
# Fatigue testing



R.R. Moore rotating-beam machine



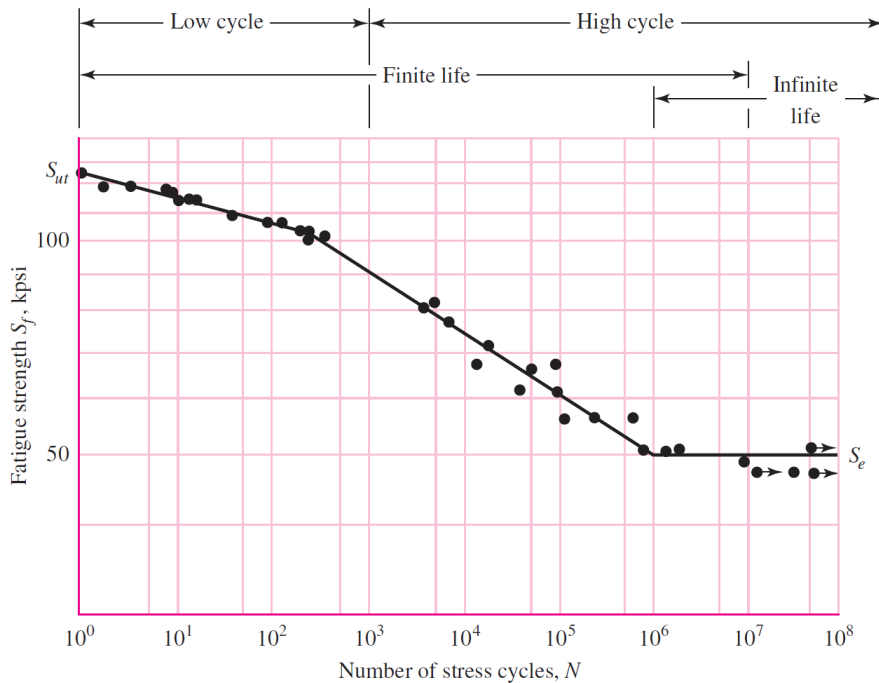
Test-specimen



แรงที่ทำให้เกิดความเค้นกลับไป-กลับมา  
โดยค่ากลางเป็น 0

# The Endurance Limit (1)

เมื่อวัสดุได้รับการกระทำและมีความเค้นเปลี่ยนแปลงเป็นรอบกลับไป-กลับมา วัสดุจะมีขีดจำกัดที่จะรับความเค้นได้น้อยลง

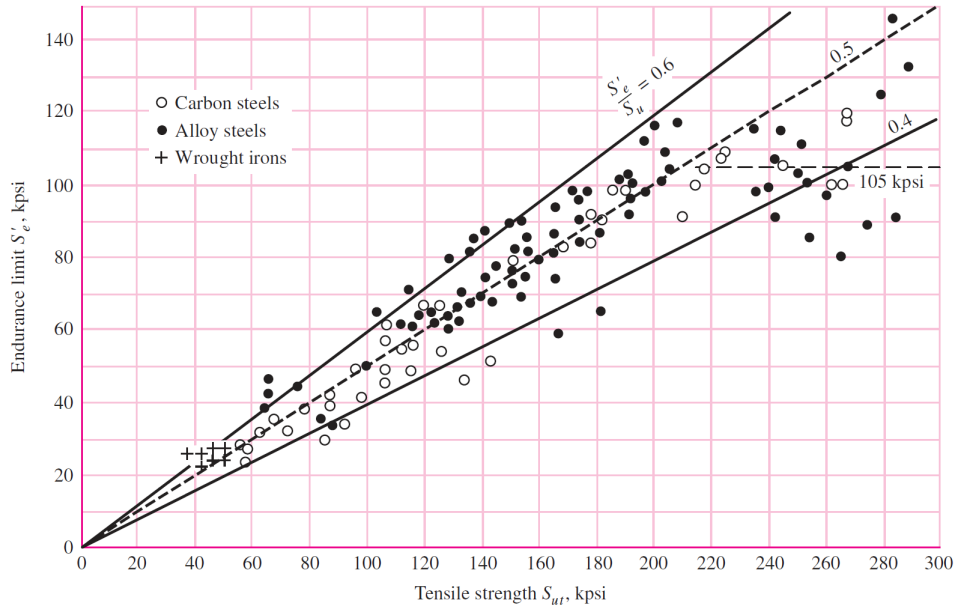


**Tensile strength,  $S_{ut}$**  : ความเค้นสูงสุดที่เกิดเมื่อทดสอบดึงวัสดุ

**Fatigue strength,  $S_f$**  : ความเค้นที่ทำให้วัสดุแตกหัก เมื่อได้รับความเค้นกลับไป-กลับมา จำนวน  $N$  รอบ

**Endurance limit,  $S_e$**  : ขีดจำกัดความทนทานเมื่อวัสดุได้รับความเค้นน้อยกว่าความเค้นนี้ จะไม่เกิดความเสียหาย ไม่ว่าจะรับความเค้นไปกี่รอบก็ตาม

# The Endurance Limit (2)



Graph of endurance limits versus tensile strengths from actual test results.

$$S'_e = \begin{cases} 0.5(S_{ut}) & S_{ut} \leq 200 \text{ kpsi (1400 MPa)} \\ 100 \text{ kpsi (700 MPa)} & S_{ut} > 200 \text{ kpsi} \\ 700 \text{ Mpa} & S_{ut} > 1400 \text{ MPa} \end{cases}$$

$S'_e$  เป็นค่า endurance limit จากการทดลอง ต้องมีการปรับด้วย factors ต่างๆ เพื่อให้เหมาะสมในการใช้งานจริง

# Endurance Limit Modifying Factors

ค่า endurance limit ที่ได้จากการทดลอง ถูกปรับแก้โดย factors ต่างๆ ดังสมการ

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e$$

$S_e$  : endurance limit at the critical location of a machine part

$S'_e$  : rotary-beam test specimen endurance limit

$k_a$  : surface condition modification factor

$k_b$  : size modification factor

$k_c$  : load modification factor

$k_d$  : temperature modification factor

$k_e$  : reliability factor

$k_f$  : miscellaneous-effects modification factor

Surface factor,  $k_a$

$$k_a = aS_{ut}^b$$

ชิ้นงานทดสอบจะมีการขัดอย่างดี ถ้าเป็นชิ้นงานทั่วไป จะต้องมีการเพิ่ม Factor นี้เพิ่มเข้ามา เพื่อชดเชยผลของสภาพผิว

Surface Finish	Factor $a$		Exponent $b$
	$S_{ut}$ , kpsi	$S_{ut}$ , MPa	
Ground	1.34	1.58	-0.085
Machined or cold-drawn	2.70	4.51	-0.265
Hot-rolled	14.4	57.7	-0.718
As-forged	39.9	272.	-0.995

# Endurance Limit Modifying Factors

## Size factor, $k_b$

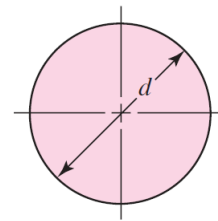
$k_b$  หาจากการทดลอง Bending and torsion และสามารถคำนวณได้จาก

$$k_b = \begin{cases} (d/0.3)^{-0.107} & 0.11 \leq d \leq 2 \text{ in} \\ 0.91d^{-0.157} & 2 < d \leq 10 \text{ in} \\ (d/7.62)^{-0.107} & 2.79 \leq d \leq 51 \text{ mm} \\ 1.51d^{-0.157} & 51 < d \leq 254 \text{ mm} \end{cases}$$

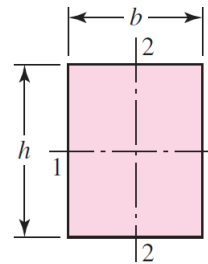
สำหรับ axial loading จะไม่มี size effect,  $k_b = 1$

กรณีชิ้นงานไม่หมุน หรือหน้าตัดสี่เหลี่ยม ให้ใช้ค่า  $d_e$  แทน  $d$

กรณีชิ้นงานไม่หมุน



$$d_e = 0.370d$$



$$d_e = 0.808\sqrt{hb}$$

# Modifying Factors, $k_b$ , $k_c$ , $k_d$

## Loading factor, $k_c$

Fatigue test ทำกับ rotating bending load,  
กรณี load ชนิดอื่นจะต้องมีตัวปรับแก้

$$k_c = \begin{cases} 1 & : \text{bending} \\ 0.85 & : \text{axial} \\ 0.59 & : \text{pure torsion} \end{cases}$$

กรณี torsion + bending ให้ใช้  $k_c = 1$

**Effect of operating temperature  
on the tensile strength of steel.**

$$k_d = \frac{S_T}{S_{RT}}$$

$S_T$  = Tensile strength at operating temp.

$S_{RT}$  = Tensile strength at room temp.

## Temperature factor, $k_d$

เป็นผลจากการเปลี่ยนแปลง tensile strength เมื่อ  
อุณหภูมิเปลี่ยนแปลงไป

$$k_d = 0.975 + 0.432(10^{-3})T_F - 0.115(10^{-5})T_F^2 \\ + 0.104(10^{-8})T_F^3 - 0.595(10^{-12})T_F^4$$

เมื่อ  $70 \leq T_F \leq 1000^\circ\text{F}$

Temperature, °C	$S_T/S_{RT}$	Temperature, °F	$S_T/S_{RT}$
20	1.000	70	1.000
50	1.010	100	1.008
100	1.020	200	1.020
150	1.025	300	1.024
200	1.020	400	1.018
250	1.000	500	0.995
300	0.975	600	0.963
350	0.943	700	0.927
400	0.900	800	0.872
450	0.843	900	0.797
500	0.768	1000	0.698
550	0.672	1100	0.567
600	0.549		

# Modifying Factors, $k_e$ , $k_f$

## Reliability factor, $k_e$

เนื่องจากข้อมูลของ endurance limit มาจากการทดลอง ซึ่งก็มีการกระจายตัวของข้อมูลอยู่ factor นี้ช่วยชดเชยความไม่แน่นอนของข้อมูล

Reliability, %	Transformation Variate $z_\alpha$	Reliability Factor $k_e$
50	0	1.000
90	1.288	0.897
95	1.645	0.868
99	2.326	0.814
99.9	3.091	0.753
99.99	3.719	0.702
99.999	4.265	0.659
99.9999	4.753	0.620

Reliability factor  $k_e$  corresponding to 8% standard deviation of the endurance limit.

## Miscellaneous factor, $k_f$

หากมีปัจจัยอื่นที่พิจารณาแล้วว่ามีผลต่อการลดลงของ endurance limit นอกเหนือจากที่กล่าวมาข้างต้น เช่น กระบวนการผลิต การกัดกร่อน (corrosion) ความถี่ของแรงกระทำ ให้เพิ่ม  $k_f$  เข้าไป กรณีที่ไม่มีปัจจัยอื่นๆ ที่มีผล ใช้  $k_f = 1$  (ไม่คิดค่า  $k_f$ )

# Fluctuating Stresses

- ความเค้นที่เกิดขึ้นซ้ำไปซ้ำมาอาจจำลองเป็นกราฟ Sine
- ความเค้นจริงอาจเป็นกราฟอื่น แต่ไม่สำคัญต่อการพิจารณา
- สิ่งที่สำคัญคือค่า max และ min

**Midrange component**

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

**Alternating component**

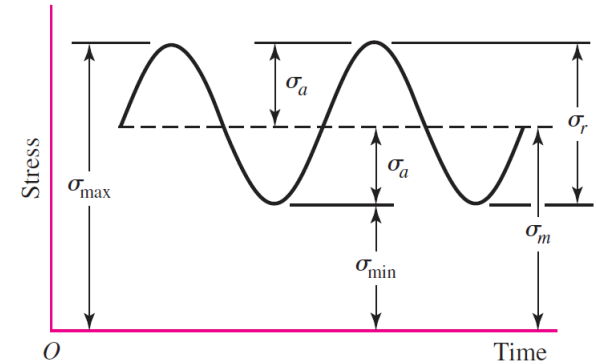
$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right|$$

**Stress ratio**

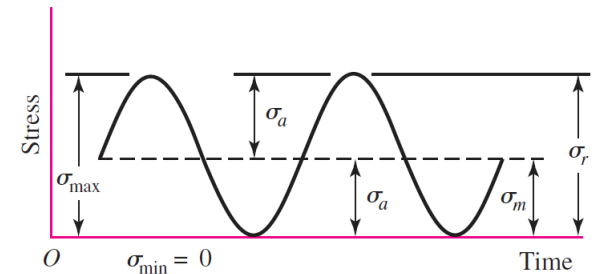
$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

**Amplitude ratio**

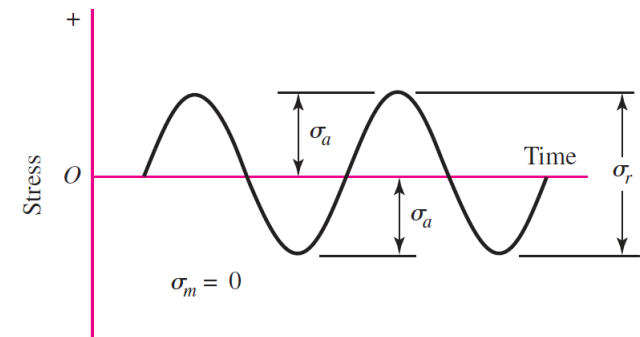
$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}$$



(d)



(e)



(f)

# Stress concentrations

- สมการที่สร้างมา พิจารณาในกรณีที่รูปร่างไม่มีการเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด
- เมื่อรูปร่างของชิ้นงานมีการเปลี่ยนแปลง เช่นการทำ Shoulders, holes, grooves บริเวณที่รูปร่างเปลี่ยนจะมี Stress สูงกว่าปกติ
- เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า การเกิด Stress Concentration

Stress concentration factor  
(กรณี Normal stress)

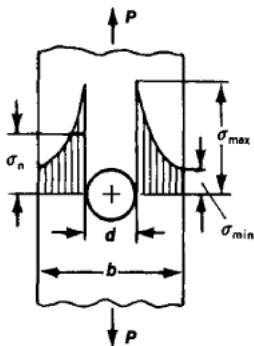
$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$$

Stress concentration factor  
(กรณี Shear stress)

$$K_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}$$

$\sigma_{\max}, \tau_{\max}$  : stress ที่เกิดจริง

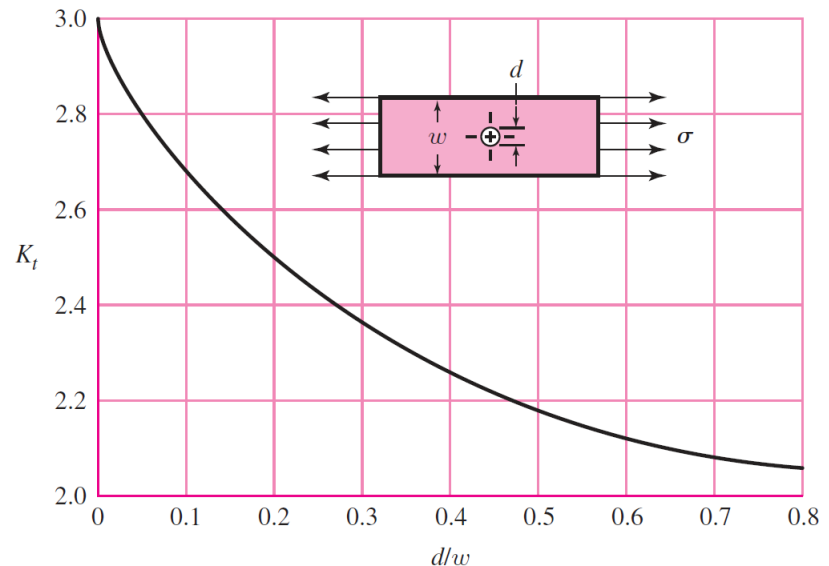
$\sigma_0, \tau_0$  : stress ที่คำนวณจาก F/A



$t$  = thickness

$$F = \sigma wt$$

$$\sigma_0 = \frac{F}{(w-d)t} = \frac{w}{(w-d)} \sigma$$



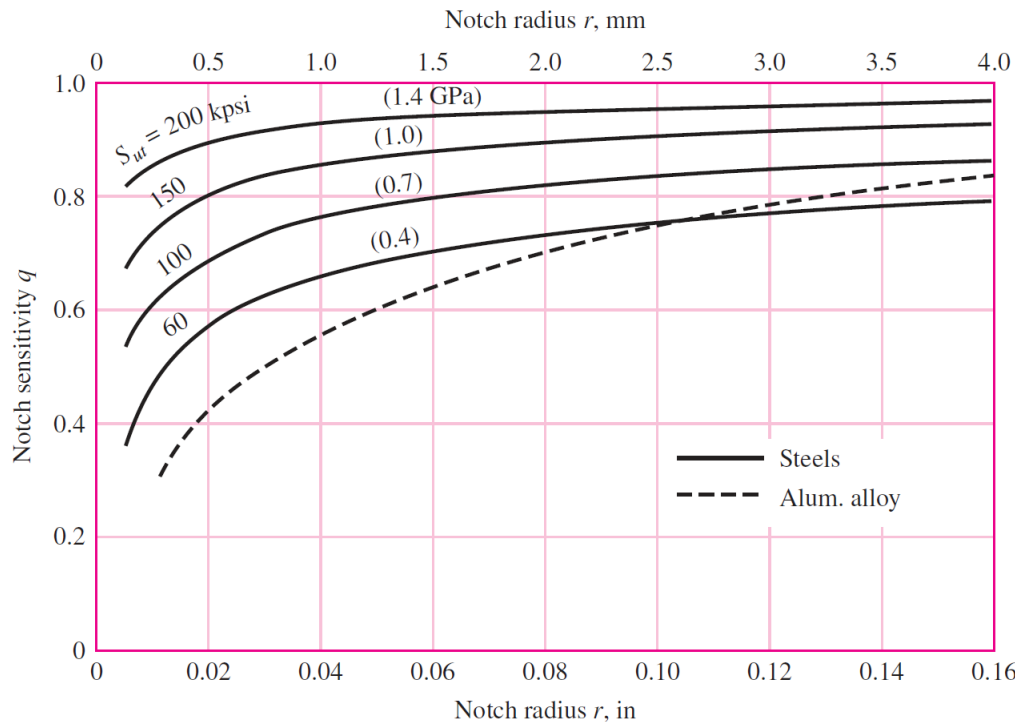
# Notch-sensitivity, q

ค่า  $K_t$  ก่อนหน้าเป็นค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎี แต่ในความเป็นจริง วัสดุต่างชนิดกันก็มีความไวต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (Notch-sensitivity, q) ไม่เท่ากัน ดังนั้นค่าที่ใช้คำนวณจึงปรับจาก  $K_t$  เป็น  $K_f$  โดยความสัมพันธ์

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$



$$\sigma_{\max} = K_f \sigma_0$$



**Notch-sensitivity charts for steel and UNS A92024-T wrought aluminum alloys subjected to reversed bending or reversed axial loads.**

**For larger notch radii, use the values of q corresponding to the r = 0.16 in (4 mm) ordinate.**

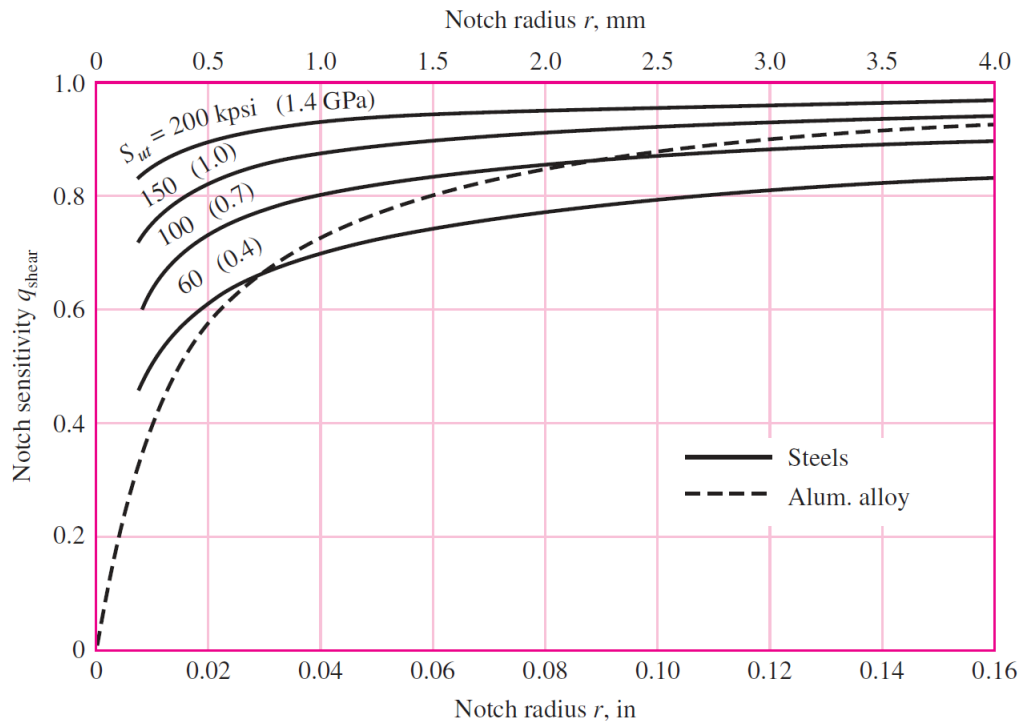
# Notch-sensitivity, $q_{\text{shear}}$

ค่า  $K_{ts}$  ก็ต้องปรับแก้เป็น  $K_{fs}$  เช่นกัน โดยใช้ค่า Notch-sensitivity for shear,  $q_{\text{shear}}$  ดังแสดงด้วยความสัมพันธ์

$$K_{fs} = 1 + q_{\text{shear}} (K_{ts} - 1)$$



$$\tau_{\text{max}} = K_{fs} \tau_0$$

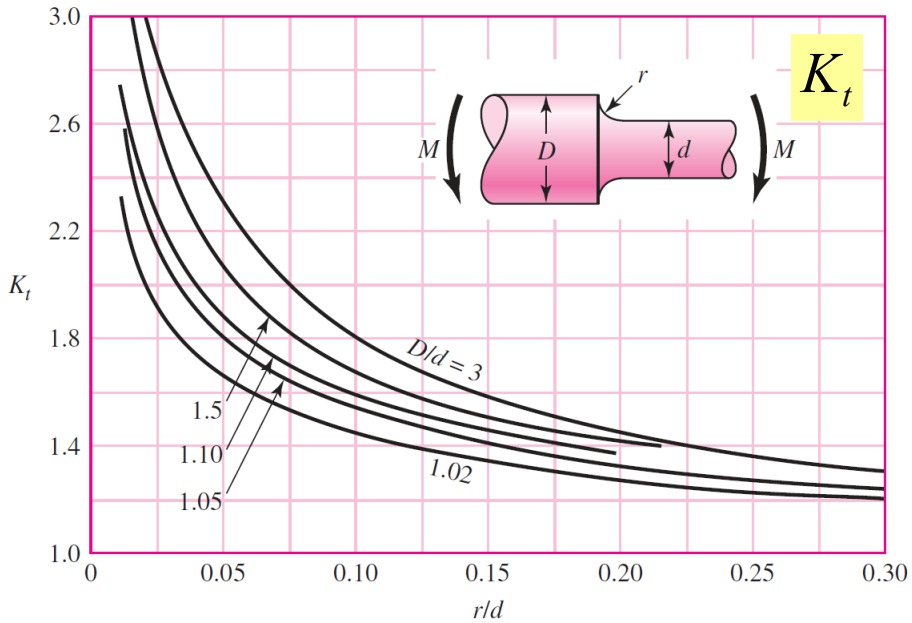


Notch-sensitivity charts for materials in reverse torsion.

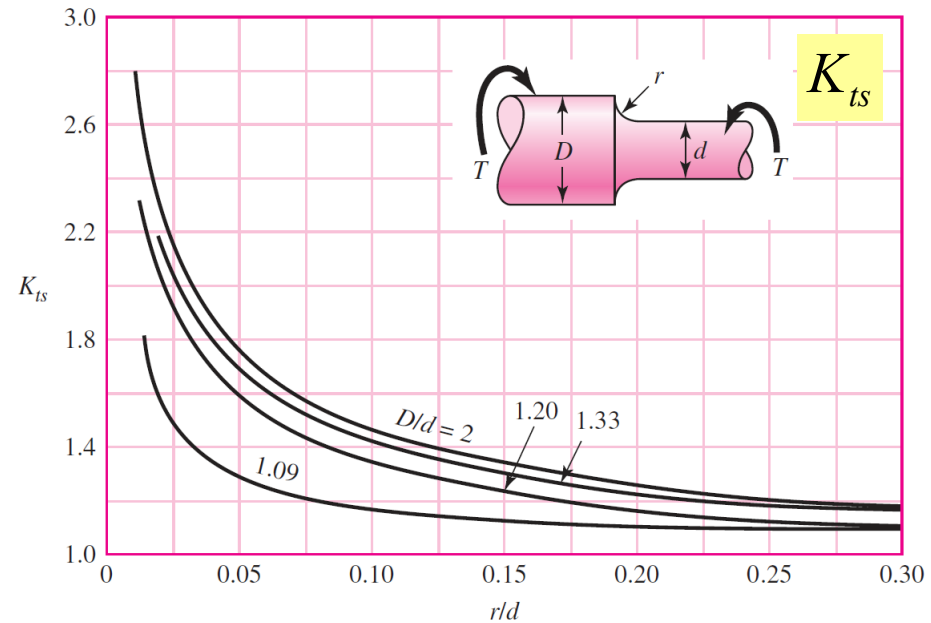
For larger notch radii, use the values of  $q_{\text{shear}}$  corresponding to the  $r = 0.16$  in (4 mm).

# Stress Concentrations (1)

Stress concentration factor  $K_t$  (bending) and  $K_{ts}$  (torsion) for round shaft with shoulder fillet



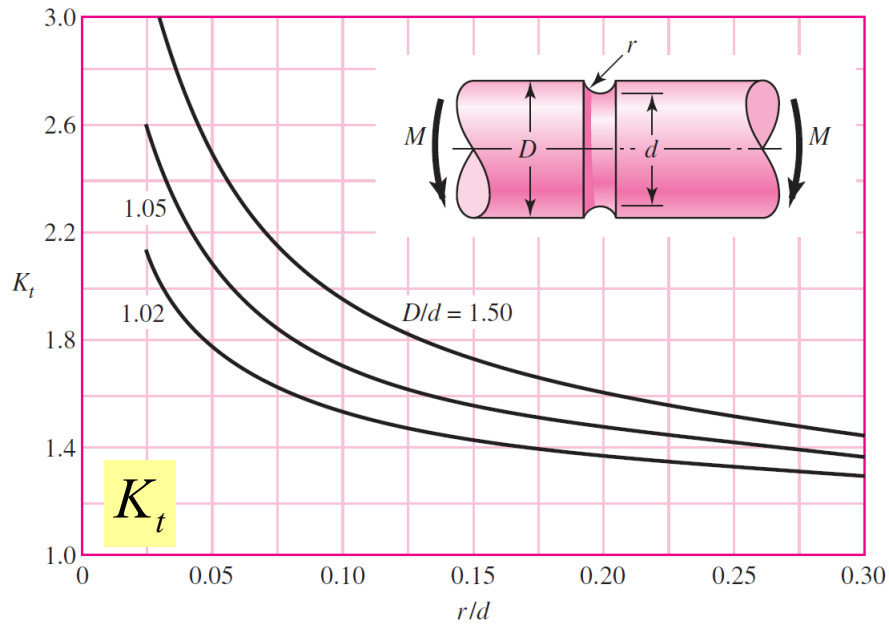
$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$



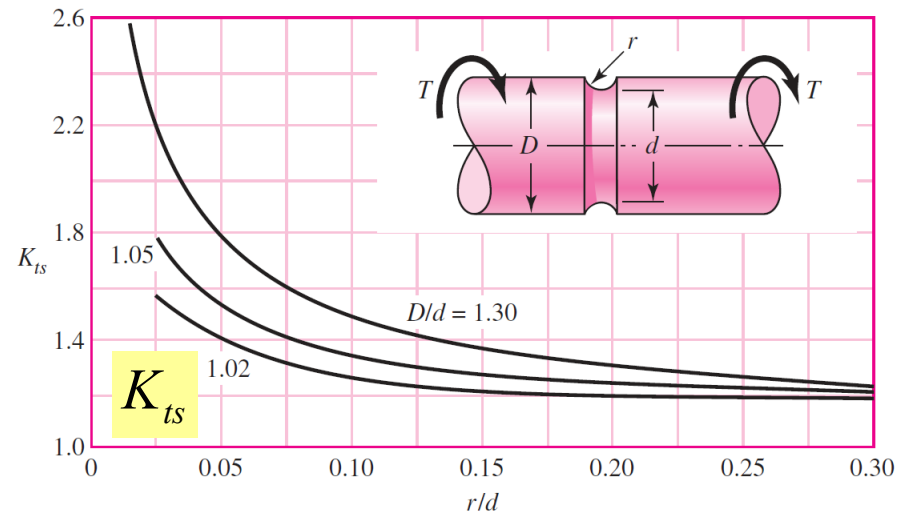
$$K_{fs} = 1 + q_{\text{shear}}(K_{ts} - 1)$$

# Stress Concentrations (2)

Stress concentration factor  $K_t$  (bending) and  $K_{ts}$  (torsion) for grooved round bar



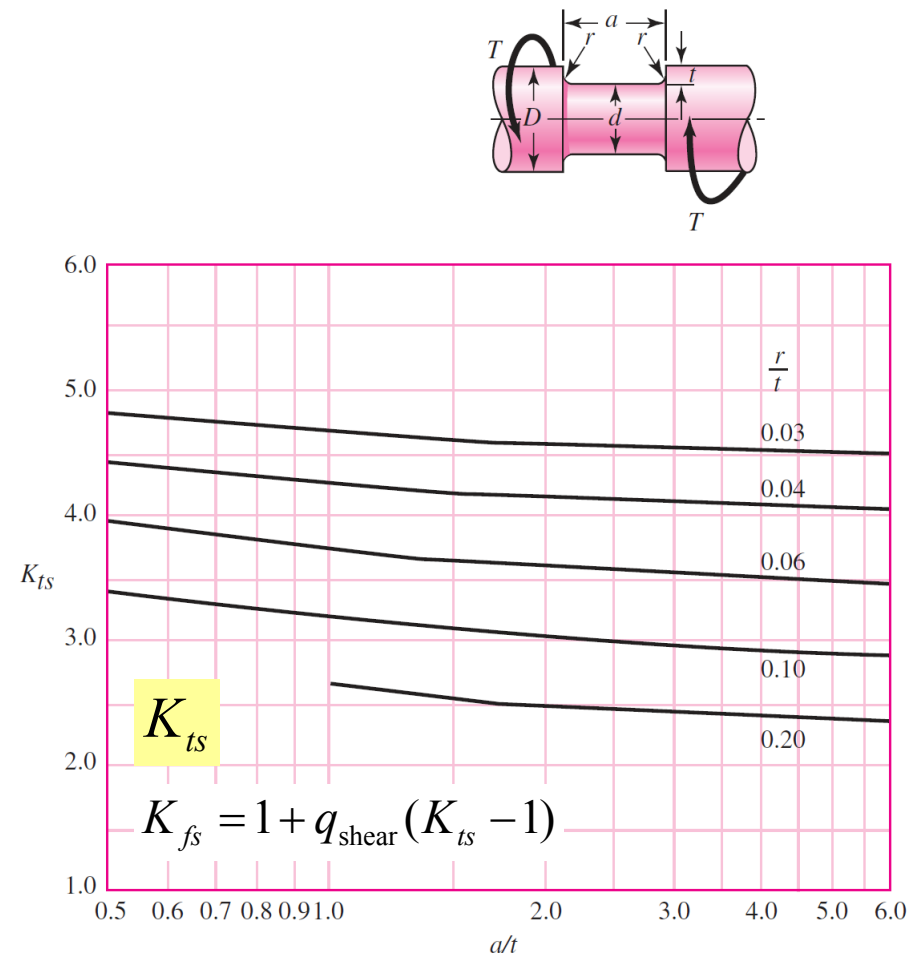
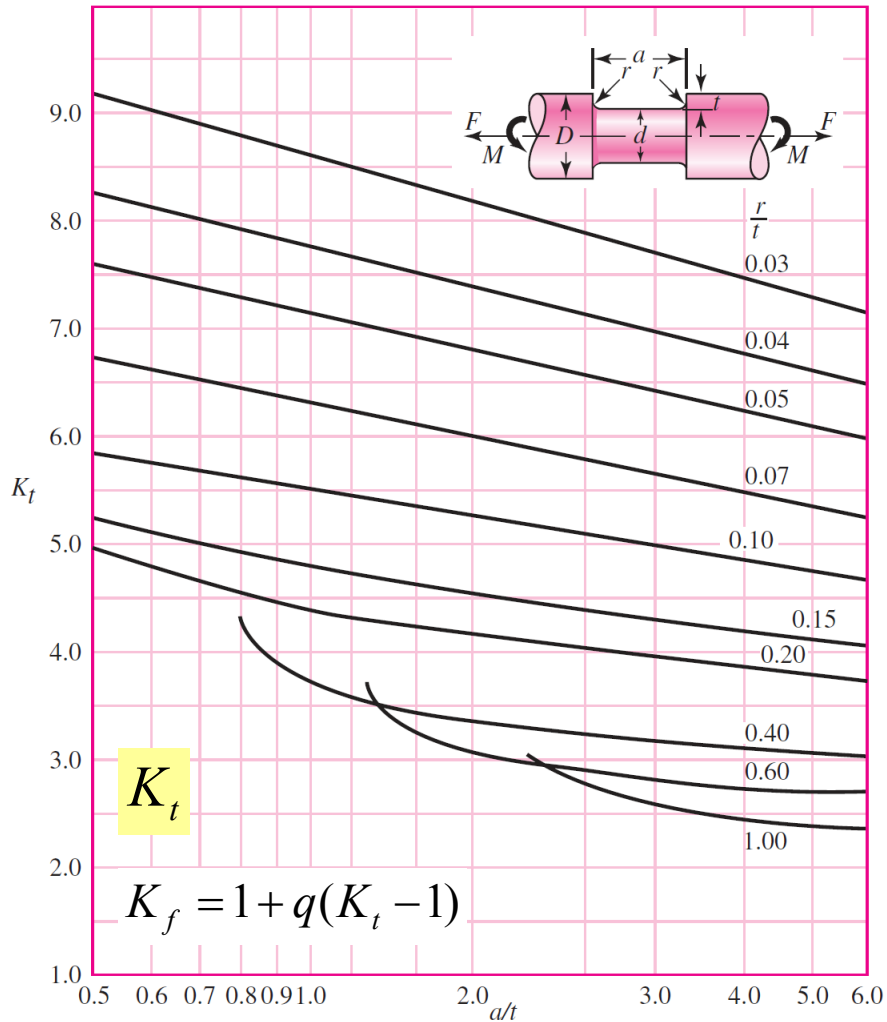
$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$



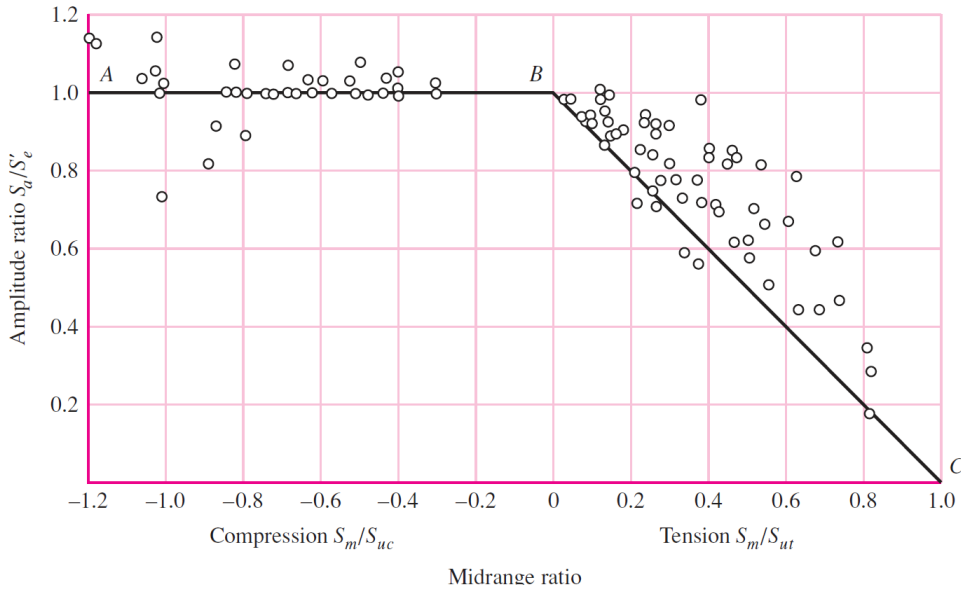
$$K_{fs} = 1 + q_{\text{shear}}(K_{ts} - 1)$$

# Stress Concentrations (3)

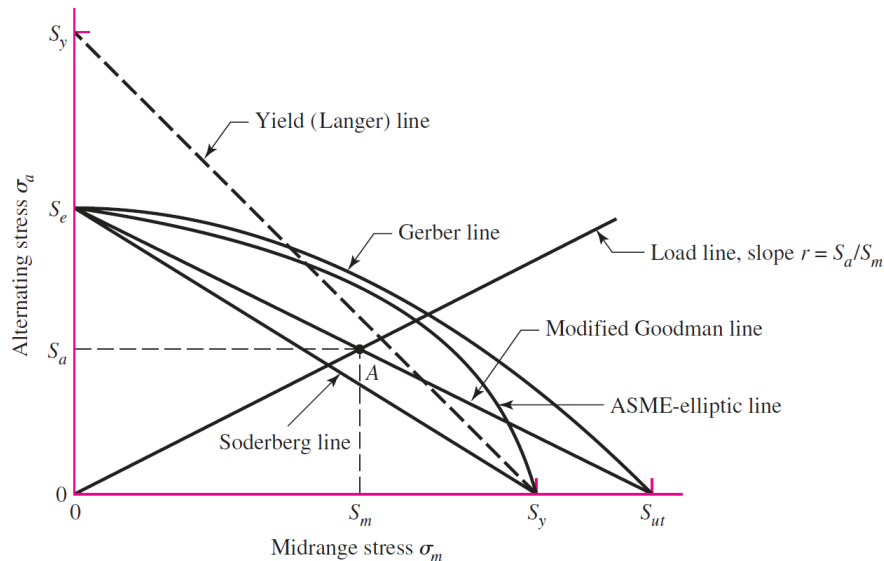
Stress concentration factor  $K_t$  (bending) and  $K_{ts}$  (torsion) of round shaft with flat-bottom groove



# Fatigue Failure Criteria (1)



Plot of fatigue failures for midrange stresses in both tensile and compressive regions.



Fatigue diagram showing various criteria of failure. (tensile side)

# Fatigue Failure Criteria (2)

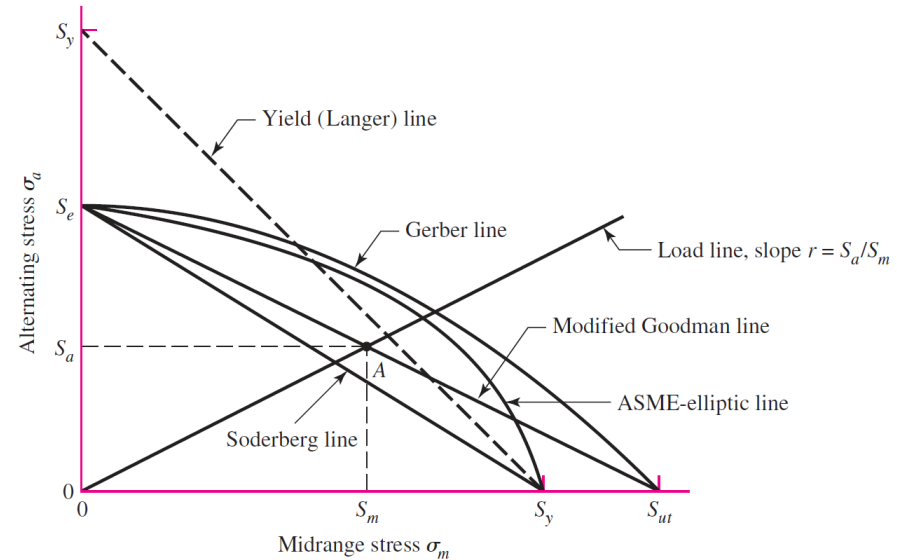
Fatigue failure criteria	Equation
<b>Soderberg</b>	$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{n}$
<b>Modified-Goodman</b>	$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n}$
<b>Gerber</b>	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$
<b>ASME-elliptic</b>	$\left(\frac{n\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{n\sigma_m}{S_y}\right)^2 = 1$
<b>Langer static yield</b>	$\sigma_a + \sigma_m = S_y/n$

จะเกิดความเสียหายเมื่อ

ค่าทางด้านซ้าย > ค่าด้านขวา ( $n = 1$ )

หรือคำนวณได้  $n < 1$

หรือคำนวณได้ค่ามากกว่า **static yield**



$\sigma_a$  : Alternating stress

$\sigma_m$  : Midrange stress

$S_e$  : endurance limit

$S_y$  : yield strength

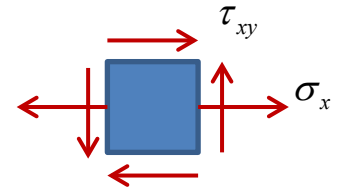
$S_{ut}$  : tensile strength

$n$  : factor of safety

# Combinations of Loading Modes

กรณีมี load หลายชนิด  
มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

Ex. เพลารับภาระ bending  
+ torsional shear stress

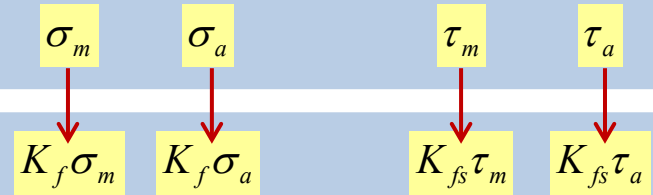


1. คำนวณค่า  $\sigma_m$ ,  $\tau_m$  และ  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$

2. คิดค่า Stress concentration factor

3. คำนวณค่า von Mises stress  $\sigma'_m$  และ  $\sigma'_a$

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2}$$



$$\sigma' = (\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2}$$

$$\sigma'_m = ((K_f \sigma_m)^2 + 3(K_{fs} \tau_m)^2)^{1/2}$$

$$\sigma'_a = ((K_f \sigma_a)^2 + 3(K_{fs} \tau_a)^2)^{1/2}$$

4. ใช้ค่า von Mises stress แทนใน Fatigue criteria

$$\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_y} = \frac{1}{n}$$

Ex. Soderberg

5. ตรวจสอบ static yield

$$\sigma'_a + \sigma'_m = S_y / n$$

# Example

A rotating shaft is made of  $42 \times 4$  mm AISI 1018 cold-drawn steel tubing and has a 6 mm diameter hole drilled transversely through it. Estimate the factor of safety guarding against fatigue and static failure using Gerber and Langer failure criteria for the following loading conditions:

- (a) The shaft is subjected to a completely reversed torque of 120 Nm in phase with a completely reversed bending moment of 150 Nm.
- (b) The shaft is subjected to pulsating torque fluctuating from 60 to 160 Nm and a steady bending moment of 150 Nm.

(Shigley's Mechanical Engineering Design, Ninth Edition, Example 6-14)

Given:  $S_{ut} = 440$  MPa,  $S_y = 370$  MPa

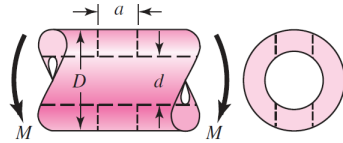
Equations for calculate stress and  $K_t$ ,  $K_{ts}$  are given in Table A-16

# Example

**Table A-16**

Approximate Stress-Concentration Factor  $K_t$  for Bending of a Round Bar or Tube with a Transverse Round Hole

Source: R. E. Peterson, *Stress-Concentration Factors*, Wiley, New York, 1974, pp. 146, 235.



The nominal bending stress is  $\sigma_0 = M/Z_{\text{net}}$  where  $Z_{\text{net}}$  is a reduced value of the section modulus and is defined by

$$Z_{\text{net}} = \frac{\pi A}{32D}(D^4 - d^4)$$

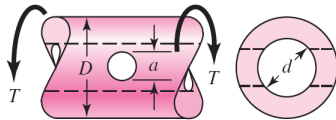
Values of  $A$  are listed in the table. Use  $d = 0$  for a solid bar

$a/D$	$d/D$					
	0.9		0.6		0	
	$A$	$K_t$	$A$	$K_t$	$A$	$K_t$
0.050	0.92	2.63	0.91	2.55	0.88	2.42
0.075	0.89	2.55	0.88	2.43	0.86	2.35
0.10	0.86	2.49	0.85	2.36	0.83	2.27
0.125	0.82	2.41	0.82	2.32	0.80	2.20
0.15	0.79	2.39	0.79	2.29	0.76	2.15
0.175	0.76	2.38	0.75	2.26	0.72	2.10
0.20	0.73	2.39	0.72	2.23	0.68	2.07
0.225	0.69	2.40	0.68	2.21	0.65	2.04
0.25	0.67	2.42	0.64	2.18	0.61	2.00
0.275	0.66	2.48	0.61	2.16	0.58	1.97
0.30	0.64	2.52	0.58	2.14	0.54	1.94

# Example

**Table A-16** (Continued)

Approximate Stress-Concentration Factors  $K_{ts}$  for a Round Bar or Tube Having a Transverse Round Hole and Loaded in Torsion Source: R. E. Peterson, *Stress-Concentration Factors*, Wiley, New York, 1974, pp. 148, 244.



The maximum stress occurs on the inside of the hole, slightly below the shaft surface. The nominal shear stress is  $\tau_0 = TD/2J_{\text{net}}$ , where  $J_{\text{net}}$  is a reduced value of the second polar moment of area and is defined by

$$J_{\text{net}} = \frac{\pi A(D^4 - d^4)}{32}$$

Values of  $A$  are listed in the table. Use  $d = 0$  for a solid bar.

$a/D$	0.9		0.8		0.6		0.4		0	
	$A$	$K_{ts}$	$A$	$K_{ts}$	$A$	$K_{ts}$	$A$	$K_{ts}$	$A$	$K_{ts}$
0.05	0.96	1.78							0.95	1.77
0.075	0.95	1.82							0.93	1.71
0.10	0.94	1.76	0.93	1.74	0.92	1.72	0.92	1.70	0.92	1.68
0.125	0.91	1.76	0.91	1.74	0.90	1.70	0.90	1.67	0.89	1.64
0.15	0.90	1.77	0.89	1.75	0.87	1.69	0.87	1.65	0.87	1.62
0.175	0.89	1.81	0.88	1.76	0.87	1.69	0.86	1.64	0.85	1.60
0.20	0.88	1.96	0.86	1.79	0.85	1.70	0.84	1.63	0.83	1.58
0.25	0.87	2.00	0.82	1.86	0.81	1.72	0.80	1.63	0.79	1.54
0.30	0.80	2.18	0.78	1.97	0.77	1.76	0.75	1.63	0.74	1.51
0.35	0.77	2.41	0.75	2.09	0.72	1.81	0.69	1.63	0.68	1.47
0.40	0.72	2.67	0.71	2.25	0.68	1.89	0.64	1.63	0.63	1.44