

# Shafts and Shaft Components



## Part 2 : Shaft Design for stress

2103320 Des Mach Elem  
Mech. Eng. Department  
Chulalongkorn University

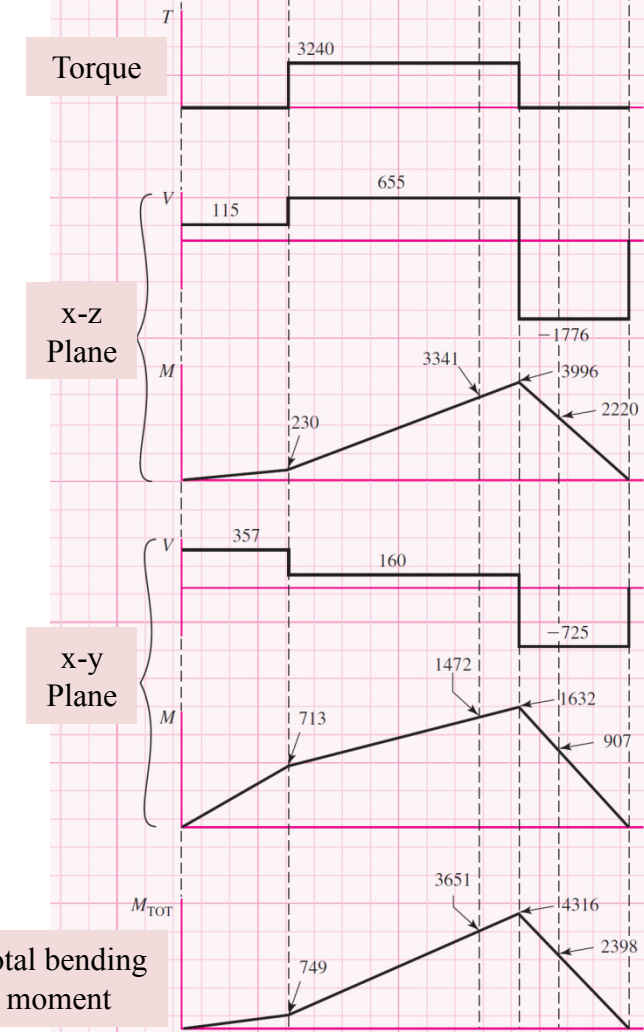
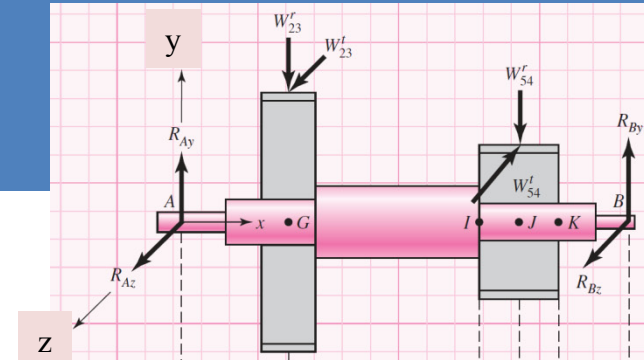
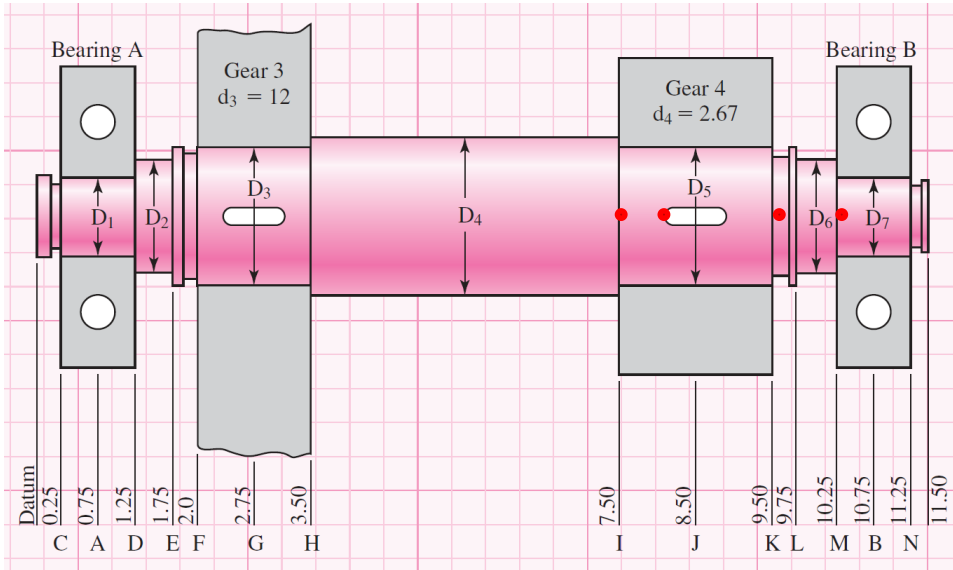
# Shaft Design for Stress

**Critical locations:** การคำนวณความเค้นในเพลลาเพื่อออกแบบ ไม่จำเป็นต้องทำทุกจุด เลือกทำเฉพาะบางจุดที่คาดว่าจะมีความเค้นมากที่สุดที่เรียกว่า Critical locations เท่านั้น

Critical locations	การพิจารณา
ผิวนอกของเพลลา	
ตำแหน่งที่มี torque มาก	FBD
ตำแหน่งที่มีค่า bending moment มาก	SFD, BMD คัดทั้งสองระนาบ และรวมกัน แบบ vector
ตำแหน่งที่มี stress concentration มาก	ตำแหน่งที่เป็นบ่าเพลลา ร่องลิ้ม ร่อง retaining ring

ความเค้นในแนวแกนเนื่องจากชิ้นส่วนเช่น helical gear, bevel gear มักจะมีค่าน้อย เมื่อเทียบกับ bending moment จึงมักจะไม่นำมาคำนวณ

# Critical locations



Critical locations	การพิจารณา
ผิวนอกของเพลลา	
ตำแหน่งที่มี torque มาก	FBD
ตำแหน่งที่มีค่า bending moment มาก	SFD, BMD คัดทั้งสองระนาบ และรวมกันแบบ vector
ตำแหน่งที่มี stress concentration มาก	ตำแหน่งที่เป็นบ่าเพลลา ร่องลิ้ม ร่อง retaining ring

# Fluctuating Stresses

เนื่องจาก bending moment ที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนเพลลา จะเปลี่ยนแปลงไปเมื่อเพลลาหมุน ดังนั้นความเค้นที่เกิดในเพลลาจึงมีลักษณะเปลี่ยนแปลงเป็นคาบกลับไป-กลับมา

**Midrange component**

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

**Alternating component**

$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right|$$

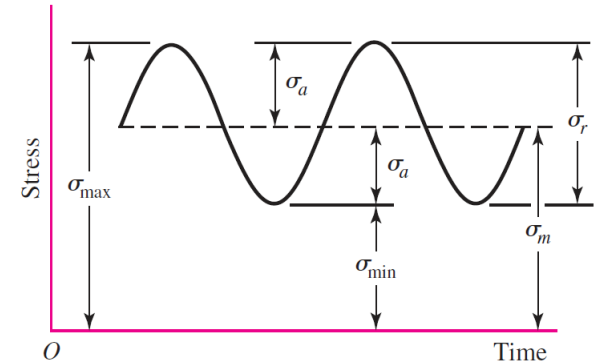
**Stress ratio**

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

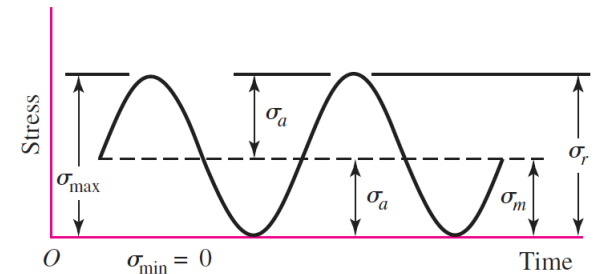
**Amplitude ratio**

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}$$

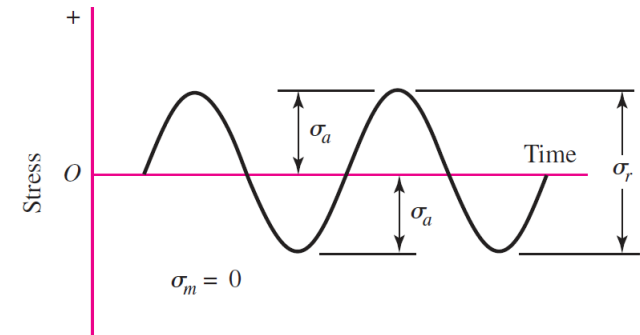
สมการข้างต้นอาจเปลี่ยนความเค้น  $\sigma$  เป็นค่าอื่นๆ เช่น Bending moment  $M$  หรือ Torque  $T$  ได้



(d)



(e)



(f)

# Shaft Stresses

ภาระที่เพลารับมักจะมาจาก bending moment และแรงบิด โดยแรงในแนวแกนมักจะมีค่าน้อย ความเค้นที่เกิดในเพลหาได้จาก

**Bending stress**

$$\sigma_a = K_f \frac{M_a c}{I}$$

$$\sigma_m = K_f \frac{M_m c}{I}$$

**Shear stress**

$$\tau_a = K_{fs} \frac{T_a c}{J}$$

$$\tau_m = K_{fs} \frac{T_m c}{J}$$

กรณีเพลาดันกลม

$$\sigma_a = K_f \frac{32M_a}{\pi d^3}$$

$$\sigma_m = K_f \frac{32M_m}{\pi d^3}$$

$$\tau_a = K_{fs} \frac{16T_a}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = K_{fs} \frac{16T_m}{\pi d^3}$$

m : midrange component

a : alternating component

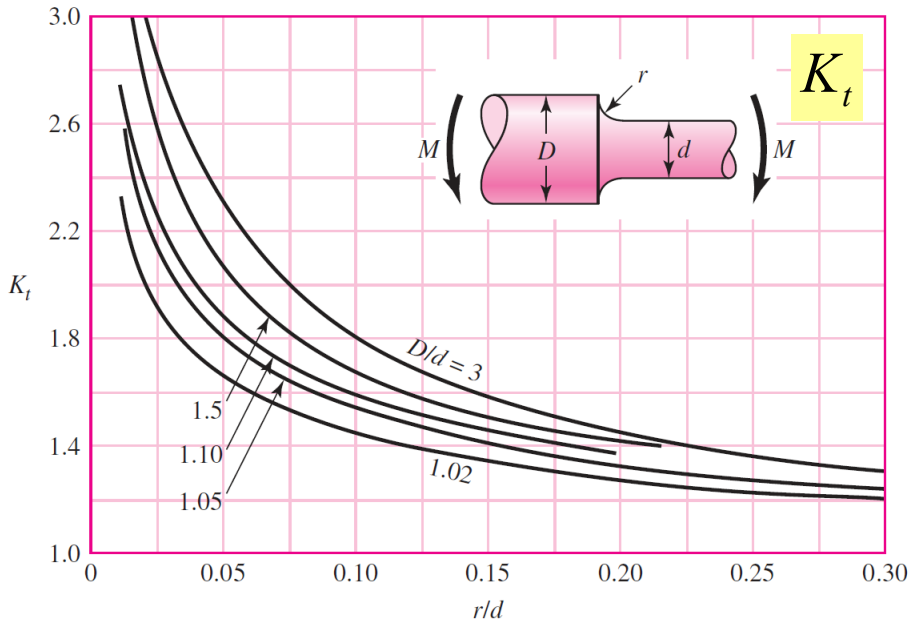
$K_f$  : fatigue stress-concentration factors for bending

$K_{fs}$  : fatigue stress-concentration factors for torsion

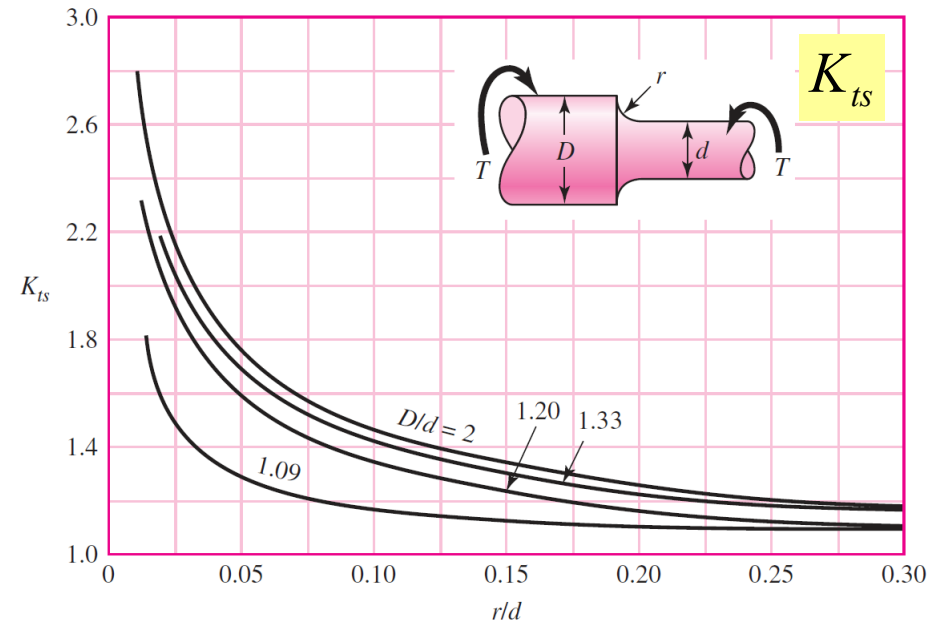
# Stress Concentrations (1)

เมื่อรูปร่างของเพลามีการเปลี่ยนแปลง เช่นการทำ Shoulders, holes, grooves จะเกิด Stress Concentration ขึ้น ทำให้ Stress เพิ่มมากขึ้นในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลง

Stress concentration factor  $K_t$  (bending) and  $K_{ts}$  (torsion) for round shaft with shoulder fillet



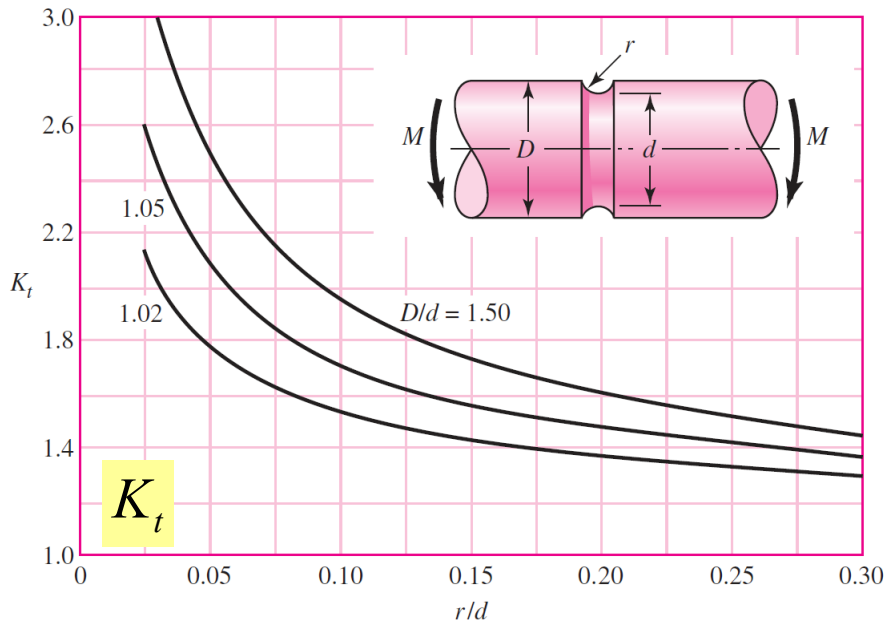
$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$



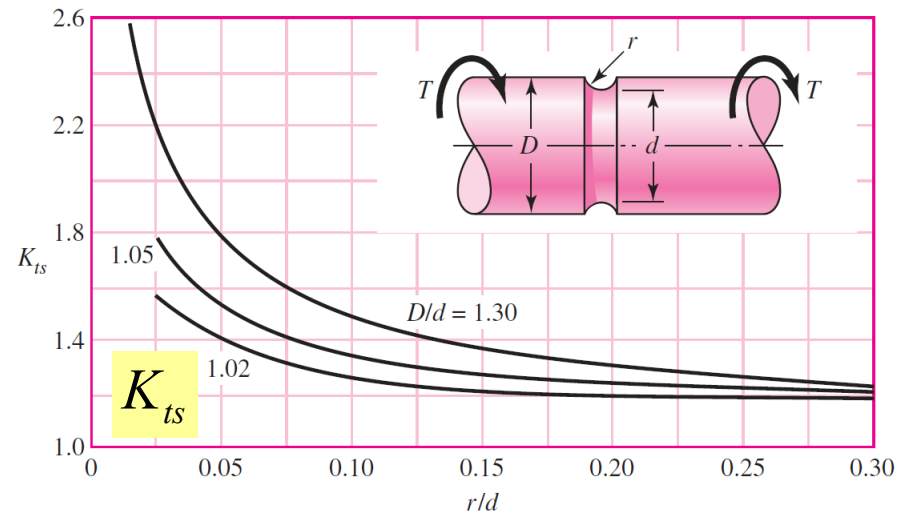
$$K_{fs} = 1 + q_{\text{shear}}(K_{ts} - 1)$$

# Stress Concentrations (2)

Stress concentration factor  $K_t$  (bending) and  $K_{ts}$  (torsion) for grooved round bar



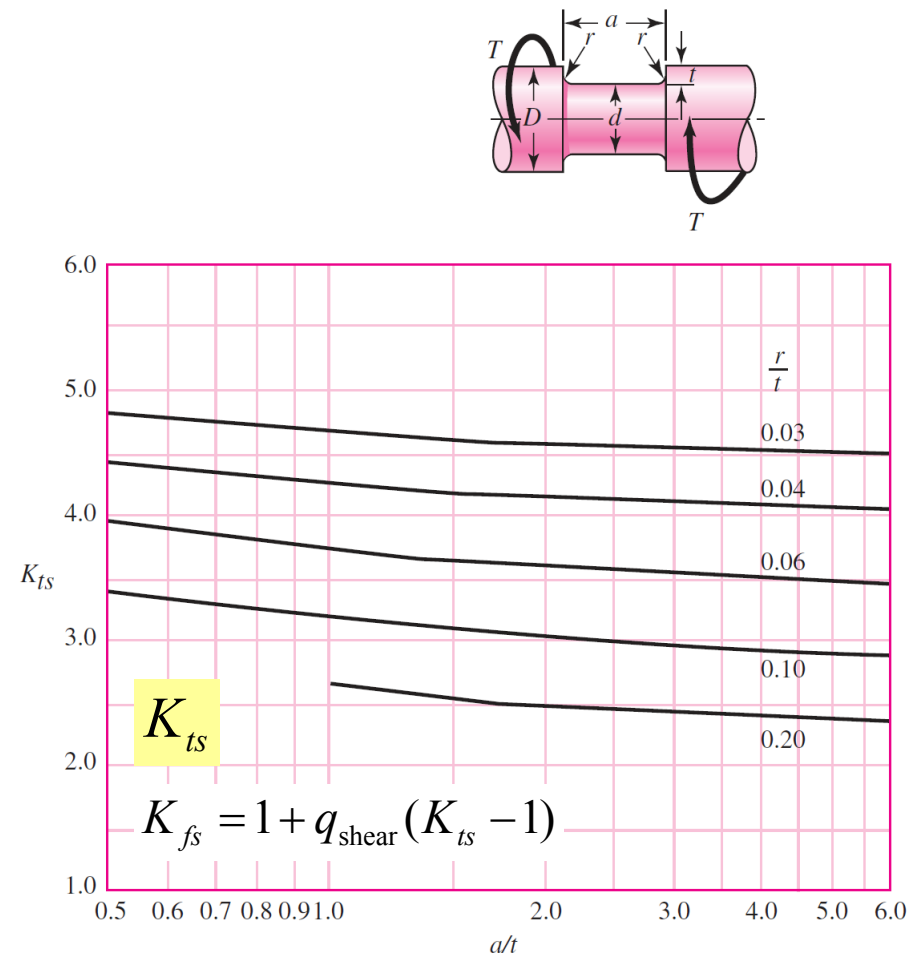
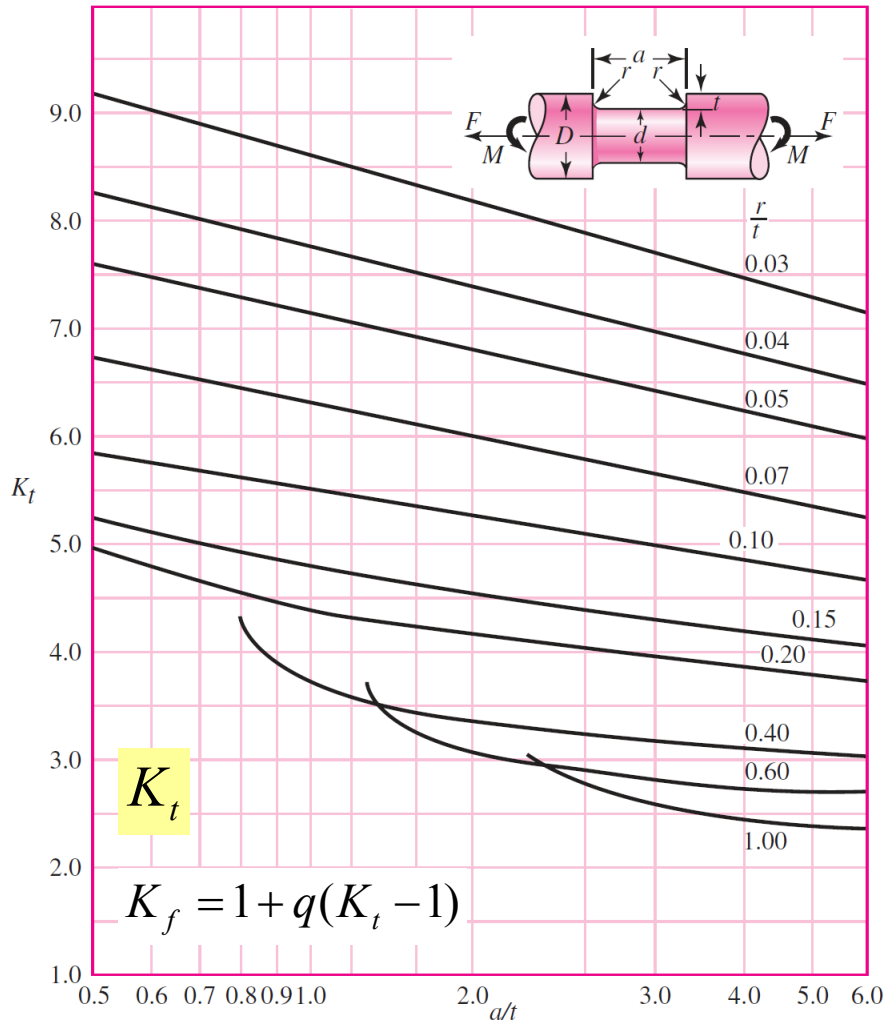
$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$



$$K_{fs} = 1 + q_{\text{shear}}(K_{ts} - 1)$$

# Stress Concentrations (3)

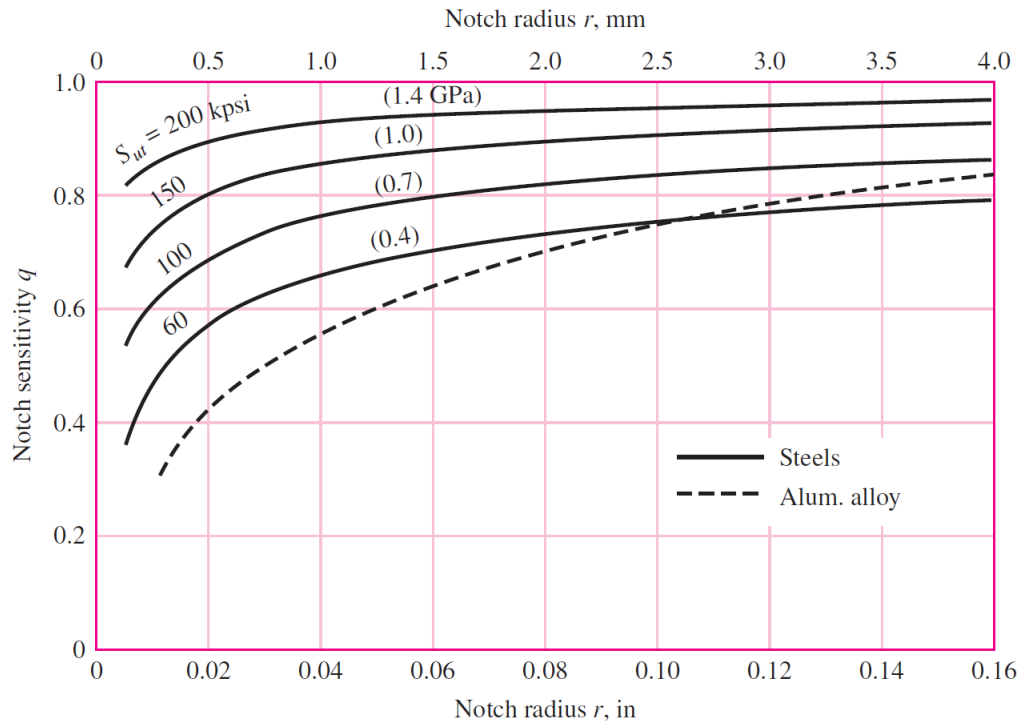
Stress concentration factor  $K_t$  (bending) and  $K_{ts}$  (torsion) of round shaft with flat-bottom groove



# Notch-sensitivity, $q$

ค่า  $K_t$  จากตารางก่อนหน้าเป็นค่าที่คำนวณได้ทางทฤษฎี แต่ในความเป็นจริง วัสดุต่างชนิดกันก็มีความไวต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (Notch-sensitivity,  $q$ ) ไม่เท่ากัน ดังนั้นค่าที่ใช้คำนวณจึงปรับจาก  $K_t$  เป็น  $K_f$  โดยความสัมพันธ์

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$



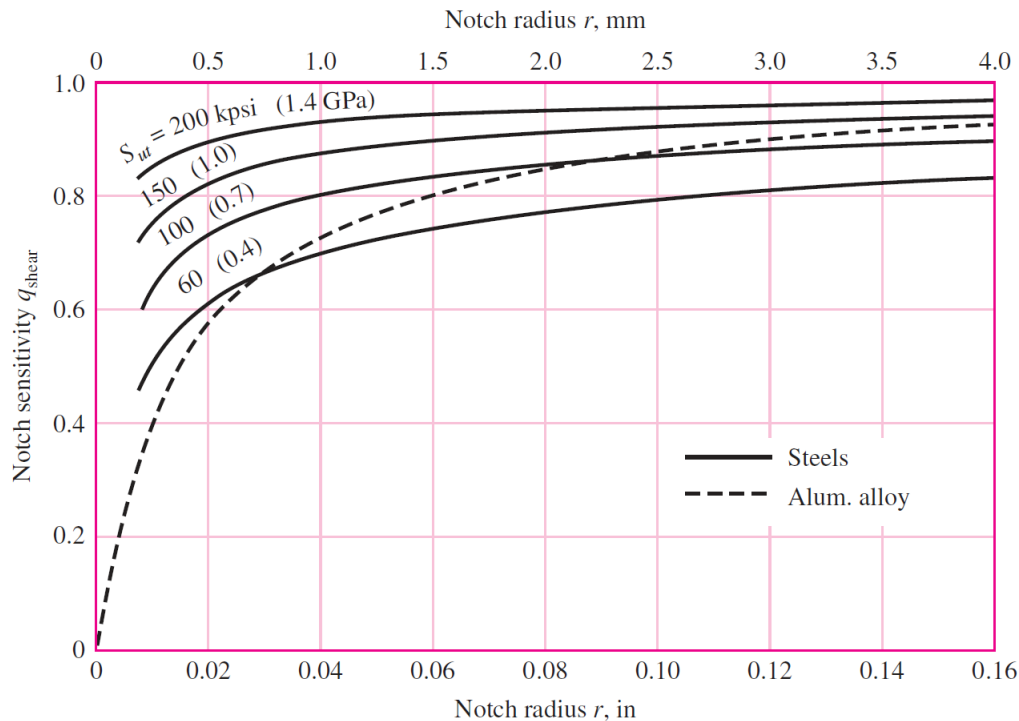
**Notch-sensitivity charts for steel and UNS A92024-T wrought aluminum alloys subjected to reversed bending or reversed axial loads.**

**For larger notch radii, use the values of  $q$  corresponding to the  $r = 0.16$  in (4 mm) ordinate.**

# Notch-sensitivity, $q_{\text{shear}}$

ค่า  $K_{ts}$  ก็ต้องปรับแก้เป็น  $K_{fs}$  เช่นกัน โดยใช้ค่า Notch-sensitivity for shear,  $q_{\text{shear}}$  ดังแสดงด้วยความสัมพันธ์

$$K_{fs} = 1 + q_{\text{shear}} (K_{ts} - 1)$$



Notch-sensitivity charts for materials in reverse torsion.

For larger notch radii, use the values of  $q_{\text{shear}}$  corresponding to the  $r = 0.16$  in (4 mm).

# $K_t$ , $K_{ts}$ for the first iteration

- ในกรณีที่ยังไม่ทราบขนาดของเพลลาจะไม่สามารถหาค่า Stress-concentration factors ที่แน่นอนได้ ในเบื้องต้นอาจใช้ค่าในตาราง (ซึ่งเป็นค่าที่มาก) เป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณก่อน
- เมื่อคำนวณได้ขนาดเพลลา จะต้องปรับค่า  $K_t$  และ  $K_{ts}$  ให้ถูกต้องตามจริง และคำนวณซ้ำเพื่อตรวจสอบ

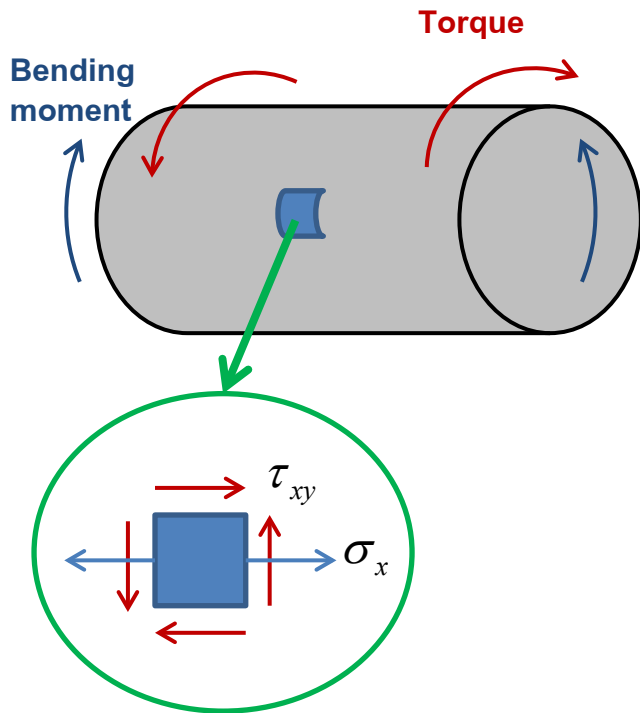
## First Iteration Estimates for Stress-Concentration Factors $K_t$ and $K_{ts}$

Warning : These factors are only estimates for use when actual dimensions are not yet determined. Do not use these once actual dimensions are available

	Bending	Torsional	Axial
Shoulder fillet—sharp ( $r/d = 0.02$ )	2.7	2.2	3.0
Shoulder fillet—well rounded ( $r/d = 0.1$ )	1.7	1.5	1.9
End-mill keyseat ( $r/d = 0.02$ )	2.14	3.0	—
Sled runner keyseat	1.7	—	—
Retaining ring groove	5.0	3.0	5.0

Missing values in the table are not readily available.

# Von Mises Stress



ความเค้นเนื่องจากการดัด และการบิด จะถูก  
พิจารณารวมกัน เป็น Von Mises stress

$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  แทนค่าในสมการ Von Mises stress

$$\sigma'_a = (\sigma_a^2 + 3\tau_a^2)^{1/2} = \left[ \left( \frac{32K_f M_a}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left( \frac{16K_{fs} T_a}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\sigma'_m = (\sigma_m^2 + 3\tau_m^2)^{1/2} = \left[ \left( \frac{32K_f M_m}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left( \frac{16K_{fs} T_m}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Von Mises stress เป็นความเค้นตัวแทนซึ่งเป็นผลรวมของความเค้นในทิศทางต่างๆ วัสดุจะ  
เสียหายเมื่อ Von Mises stress มีค่ามากกว่า yield stress

**Von Mises stress**

$$\sigma' = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]}$$

# Fatigue Failure Criteria

เนื่องจากความเค้นในเพลามีลักษณะเป็นคาบ การพิจารณาความเสียหายที่อาจเกิดขึ้นจึงต้องพิจารณาโดยใช้ Fatigue failure criteria ตัวอย่าง criteria ที่สามารถเลือกใช้ได้ ได้แก่

Fatigue failure criteria	Equation
Soderberg	$\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_y} = \frac{1}{n}$
Modified-Goodman	$\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n}$
Gerber	$\frac{n\sigma'_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma'_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$
ASME-elliptic	$\left(\frac{n\sigma'_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{n\sigma'_m}{S_y}\right)^2 = 1$

$\sigma'_a$  : Alternating stress (von-mises)

$\sigma'_m$  : Midrange stress (von-mises)

$S_e$  : endurance limit  $\Rightarrow$  จะแสดงการ

$S_y$  : yield strength คำนวณภายหลัง

$S_{ut}$  : tensile strength

$n$  : factor of safety

จะเกิดความเสียหายเมื่อ

ค่าทางด้านซ้าย > ค่าด้านขวา ( $n = 1$ )

หรือคำนวณได้  $n < 1$

# Shaft diameter calculation (1)

เมื่อแทนค่าความเค้น Von-mises ลงใน Fatigue failure criteria จะได้สมการสำหรับคำนวณหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเพลาดังนี้

**Modified-Goodman**

$$\left[ \frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3} \left\{ \frac{1}{S_e} [4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} [4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2} \right\}$$

เขียนในรูปเส้นผ่านศูนย์กลางจะได้

$$d = \left( \frac{16n}{\pi} \left\{ \frac{1}{S_e} [4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} [4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$$

หากใช้ criteria อื่นๆ ก็สามารถทำได้เช่นเดียวกัน

# Shaft diameter calculation (2)

เมื่อแทนค่าความเค้น Von-mises ลงใน Fatigue failure criteria จะได้สมการสำหรับคำนวณหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเพลาดังนี้

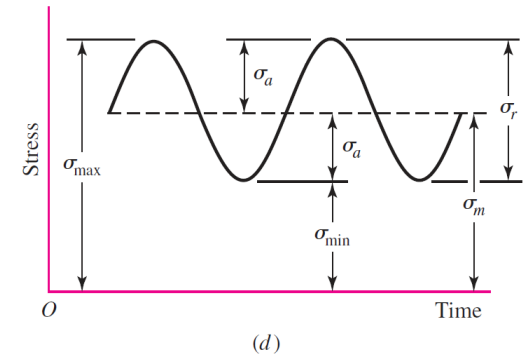
Fatigue failure criteria	Equation used to determine shaft diameter
Soderberg	$d = \left( \frac{16n}{\pi} \left\{ \frac{1}{S_e} [4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2]^{1/2} + \frac{1}{S_y} [4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$
Modified-Goodman	$d = \left( \frac{16n}{\pi} \left\{ \frac{1}{S_e} [4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} [4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$
Gerber	$d = \left( \frac{8nA}{\pi S_e} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left( \frac{2BS_e}{AS_{ut}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \right)^{1/3} \quad \begin{cases} A = [4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2]^{1/2} \\ B = [4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2} \end{cases}$
ASME-elliptic	$d = \left( \frac{16n}{\pi} \left\{ 4 \left( \frac{K_f M_a}{S_e} \right)^2 + 3 \left( \frac{K_{fs} T_a}{S_e} \right)^2 + 4 \left( \frac{K_f M_m}{S_y} \right)^2 + 3 \left( \frac{K_{fs} T_m}{S_y} \right)^2 \right\}^{1/2} \right)^{1/3}$

# Checking for yielding

การตรวจสอบการ yield ทำได้โดยเปรียบเทียบค่า Von-mises ในกรณีที่มีมากที่สุด กับค่า yield strength ของวัสดุ

## Von-Mises maximum stress

$$\left[ \sigma' = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} \right] \Rightarrow \sigma'_{\max} = \left[ (\sigma_m + \sigma_a)^2 + 3(\tau_m + \tau_a)^2 \right]^{1/2}$$



$$\sigma'_{\max} = \left[ \left( \frac{32K_f(M_m + M_a)}{\pi d^3} \right)^2 + 3 \left( \frac{16K_{fs}(T_m + T_a)}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Yielding factor of safety

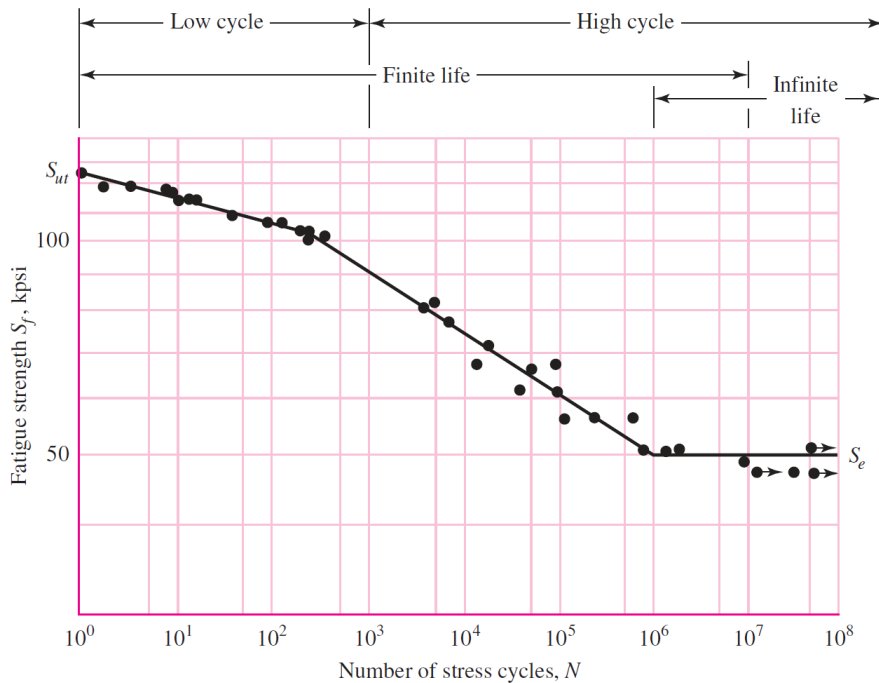
$$n_y = \frac{S_y}{\sigma'_{\max}}$$

กรณีเพลลาหมุนด้วยภาระคงที่ (constant bending and torsion) จะได้

$$M_m = T_a = 0$$

# The Endurance Limit (1)

เมื่อวัสดุได้รับการกระทำและมีความเค้นเปลี่ยนแปลงเป็นรอบกลับไป-กลับมา วัสดุจะมีขีดจำกัดที่จะรับความเค้นได้น้อยลง

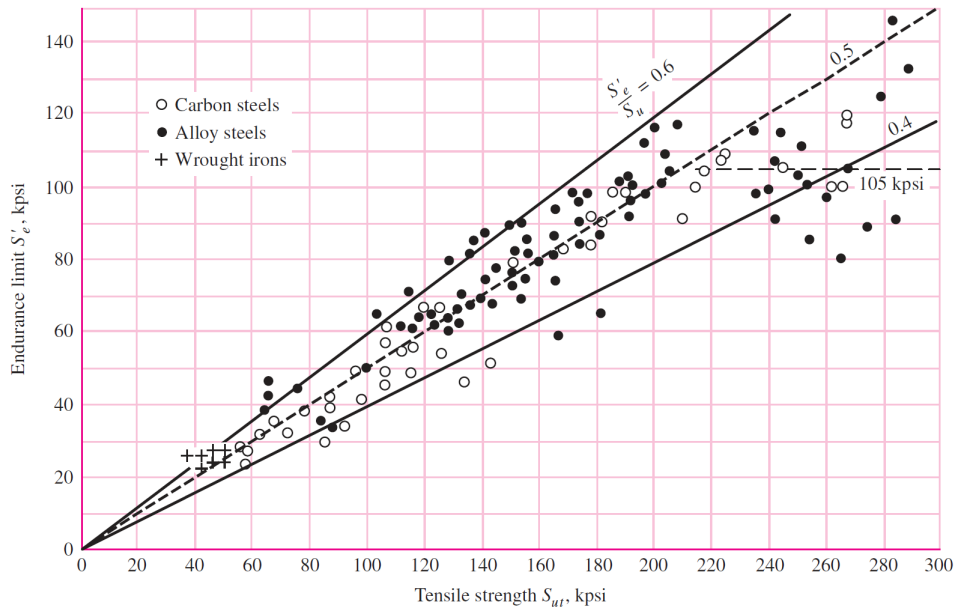


**Tensile strength,  $S_{ut}$**  : ความเค้นสูงสุดที่เกิดเมื่อทดสอบดึงวัสดุ

**Fatigue strength,  $S_f$**  : ความเค้นที่ทำให้วัสดุแตกหัก เมื่อได้รับความเค้นกลับไป-กลับมา จำนวน  $N$  รอบ

**Endurance limit,  $S_e$**  : ขีดจำกัดความทนทานเมื่อวัสดุได้รับความเค้นน้อยกว่าความเค้นนี้ จะไม่เกิดความเสียหาย ไม่ว่าจะรับความเค้นไปกี่รอบก็ตาม

# The Endurance Limit (2)



Graph of endurance limits versus tensile strengths from actual test results.

$$S'_e = \begin{cases} 0.5(S_{ut}) & S_{ut} \leq 200 \text{ kpsi (1400 MPa)} \\ 100 \text{ kpsi (700 MPa)} & S_{ut} > 200 \text{ kpsi} \\ 700 \text{ Mpa} & S_{ut} > 1400 \text{ MPa} \end{cases}$$

$S'_e$  เป็นค่า endurance limit จากการทดลอง ต้องมีการปรับด้วย factors ต่างๆ เพื่อให้เหมาะสมในการใช้งานจริง

# Endurance Limit Modifying Factors

ค่า endurance limit ที่ได้จากการทดลอง ถูกปรับแก้โดย factors ต่างๆ ดังสมการ

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e$$

$S_e$  : endurance limit at the critical location of a machine part

$S'_e$  : rotary-beam test specimen endurance limit

$k_a$  : surface condition modification factor

$k_b$  : size modification factor

$k_c$  : load modification factor

$k_d$  : temperature modification factor

$k_e$  : reliability factor

$k_f$  : miscellaneous-effects modification factor

## Surface factor, $k_a$

$$k_a = a S_{ut}^b$$

ชิ้นงานทดสอบจะมีการขัดอย่างดี ถ้าเป็นชิ้นงานทั่วไป จะต้องใช้ Factor นี้เพิ่มเข้ามา เพื่อชดเชยผลของสภาพผิว

Surface Finish	Factor $a$		Exponent $b$
	$S_{ut}$ , kpsi	$S_{ut}$ , MPa	
Ground	1.34	1.58	-0.085
Machined or cold-drawn	2.70	4.51	-0.265
Hot-rolled	14.4	57.7	-0.718
As-forged	39.9	272.	-0.995

## Size factor, $k_b$

$k_b$  หาจากการทดลอง และสามารถคำนวณได้จาก

$$k_b = \begin{cases} (d/0.3)^{-0.107} & 0.11 \leq d \leq 2 \text{ in} \\ 0.91d^{-0.157} & 2 < d \leq 10 \text{ in} \\ (d/7.62)^{-0.107} & 2.79 \leq d \leq 51 \text{ mm} \\ 1.51d^{-0.157} & 51 < d \leq 254 \text{ mm} \end{cases}$$

สำหรับ axial loading จะไม่มี size effect,  $k_b = 1$

# Modifying Factors, $k_b$ , $k_c$ , $k_d$

## Loading factor, $k_c$

Fatigue test ทำกับ rotating bending load,  
กรณี load ชนิดอื่นจะต้องมีตัวปรับแก้

$$k_c = \begin{cases} 1 & : \text{bending} \\ 0.85 & : \text{axial} \\ 0.59 & : \text{pure torsion} \end{cases}$$

กรณี torsion + bending ให้ใช้  $k_c = 1$

## Effect of operating temperature on the tensile strength of steel.

$$k_d = \frac{S_T}{S_{RT}}$$

$S_T$  = Tensile strength at operating temp.

$S_{RT}$  = Tensile strength at room temp.

## Temperature factor, $k_d$

เป็นผลจากการเปลี่ยนแปลง tensile strength เมื่อ  
อุณหภูมิเปลี่ยนแปลงไป

$$k_d = 0.975 + 0.432(10^{-3})T_F - 0.115(10^{-5})T_F^2 \\ + 0.104(10^{-8})T_F^3 - 0.595(10^{-12})T_F^4$$

เมื่อ  $70 \leq T_F \leq 1000^\circ\text{F}$

Temperature, °C	$S_T/S_{RT}$	Temperature, °F	$S_T/S_{RT}$
20	1.000	70	1.000
50	1.010	100	1.008
100	1.020	200	1.020
150	1.025	300	1.024
200	1.020	400	1.018
250	1.000	500	0.995
300	0.975	600	0.963
350	0.943	700	0.927
400	0.900	800	0.872
450	0.843	900	0.797
500	0.768	1000	0.698
550	0.672	1100	0.567
600	0.549		

# Modifying Factors, $k_e$ , $k_f$

## Reliability factor, $k_e$

เนื่องจากข้อมูลของ endurance limit มาจากการทดลอง ซึ่งก็มีการกระจายตัวของข้อมูลอยู่ factor นี้ช่วยชดเชยความไม่แน่นอนของข้อมูล

Reliability, %	Transformation Variate $z_\alpha$	Reliability Factor $k_e$
50	0	1.000
90	1.288	0.897
95	1.645	0.868
99	2.326	0.814
99.9	3.091	0.753
99.99	3.719	0.702
99.999	4.265	0.659
99.9999	4.753	0.620

Reliability factor  $k_e$  corresponding to 8% standard deviation of the endurance limit.

## Miscellaneous factor, $k_f$

หากมีปัจจัยอื่นที่พิจารณาแล้วว่ามีผลต่อการลดลงของ endurance limit นอกเหนือจากที่กล่าวมาข้างต้น เช่น กระบวนการผลิต การกัดกร่อน (corrosion) ความถี่ของแรงกระทำ ให้เพิ่ม  $k_f$  เข้าไป กรณีที่ไม่มีปัจจัยอื่น ๆ ที่มีผล ใช้  $k_f = 1$  (ไม่คิดค่า  $k_f$ )

# Deflection Considerations

- เมื่อเพลารับภาระในขณะทำงาน จะเกิดการโก่งและบิดขึ้น
- การโก่งและบิดสามารถคำนวณได้ตามวิธีในหนังสือ Mechanics of Materials โดยทั่วไป
- เพื่อไม่ให้เกิดปัญหาในการทำงาน มุมดัดและระยะโก่งตัวจะต้องไม่มากกว่าค่าที่แสดงในตาราง
- มุมบิดของเพลาโดยทั่วไปมักจะไม่เกิน 0.3 องศา ต่อความยาวเพลา 1 เมตร
- สำหรับเพลาที่มุมดัด การโก่งตัว และมุมบิดมากกว่าค่าในตาราง จะต้องเพิ่มขนาดเพลา และทำการคำนวณซ้ำเพื่อตรวจสอบใหม่อีกครั้ง

## Slopes

Tapered roller	0.0005–0.0012 rad
Cylindrical roller	0.0008–0.0012 rad
Deep-groove ball	0.001–0.003 rad
Spherical ball	0.026–0.052 rad
Self-align ball	0.026–0.052 rad
Uncrowned spur gear	< 0.0005 rad

## Typical Maximum Ranges for Slopes and Transverse Deflections

$P$  = diametral pitch

= No. of teeth/ pitch diameter

## Transverse Deflections

Spur gears with $P < 10$ teeth/in	0.010 in
Spur gears with $11 < P < 19$	0.005 in
Spur gears with $20 < P < 50$	0.003 in

# Shaft Design Procedure (1)

- รับประทานข้อมูลการทำงานได้แก่ ความเร็วรอบการทำงาน กำลัง และ Torque ที่ต้องการส่งกำลัง
- พิจารณาชิ้นส่วนที่ประกอบบนเพลา และตำแหน่งของชิ้นส่วนนั้นๆ
- พิจารณาตำแหน่งที่จะจัดวางแบร์ริง
- ออกแบบรูปร่างเพลา shoulder, fillet และวิธีการจัดยึดชิ้นส่วนบนเพลา key, retaining ring, lock nut
- เลือกวัสดุ รวบรวมข้อมูลวัสดุ  $S_{ut}$ ,  $S_y$ ,  $S_e$
- รวบรวมข้อมูลแรงที่เกิดจากชิ้นส่วนที่ประกอบบนเพลา เขียน FBD (วิเคราะห์แรงบิด) SFD และ BMD (วิเคราะห์การโก่ง) และรวม Torque และ Bending moment ในระนาบต่างๆ เข้าด้วยกัน
- หาดำแหน่งวิกฤต (อาจมีหลายตำแหน่ง) ได้แก่ตำแหน่งที่ Torque หรือ Bending moment มาก และเป็นตำแหน่งที่เพลาเกิดการเปลี่ยนรูป เช่น บ่าเพลา ร่องลิ้ม ร่อง retaining ring

# Shaft Design Procedure (2)

- กำหนดขนาดเพลาในตำแหน่งวิกฤต ปรับค่า  $K_t$ ,  $K_{ts}$  ให้เหมาะสมตามจริง และคำนวณซ้ำเพื่อตรวจสอบ
- ตรวจสอบประเด็นอื่นๆ เช่น มุมตัด ระยะโค้ง มุมบิด รวมถึงความเร็ววิกฤตของเพลา
- กำหนดรายละเอียดของเพลา ขนาดลิ้ม ร่อง retaining ring (ต้องรู้ขนาดเพลา ก่อน)
- กำหนดค่า tolerance และความเรียบผิว โดยส่วนที่ประกอบกับชิ้นอื่นต้องมีความเรียบมาก

# Example

[Ex.16-2 Shigley's Mechanical Engineering Design 9<sup>th</sup> Edition.

Richard G. Budynas and J. Keith Nisbett]

$$W_{23}^t = 540 \text{ lbf}$$

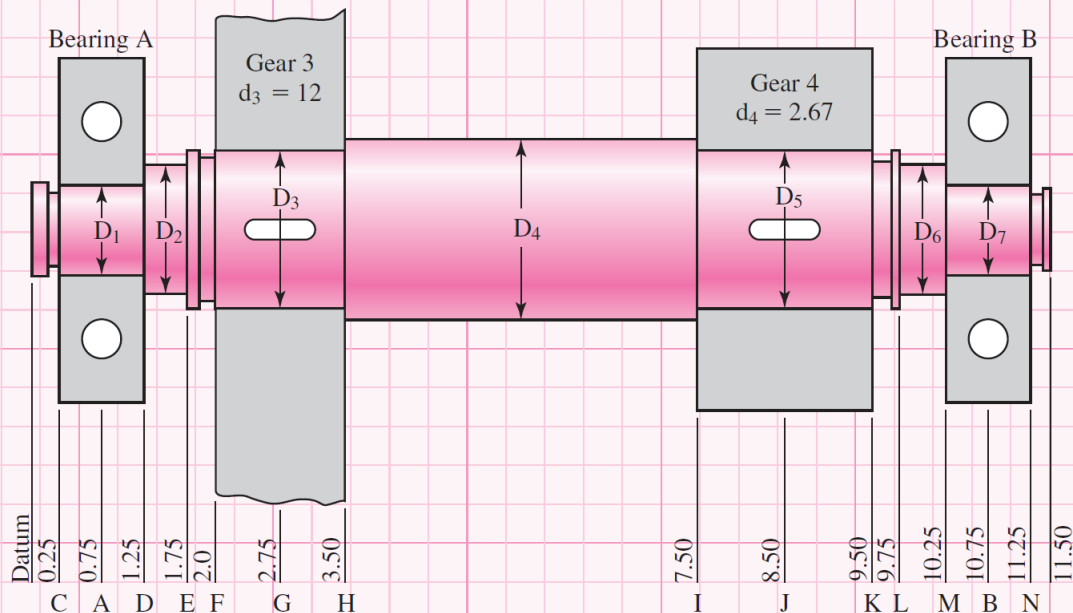
$$W_{54}^t = 2431 \text{ lbf}$$

$$W_{23}^r = 197 \text{ lbf}$$

$$W_{54}^r = 885 \text{ lbf}$$

where the superscripts  $t$  and  $r$  represent tangential and radial directions, respectively; and, the subscripts 23 and 54 represent the forces exerted by gears 2 and 5 (not shown) on gears 3 and 4, respectively.

Proceed with the next phase of the design, in which a suitable material is selected, and appropriate diameters for each section of the shaft are estimated, based on providing sufficient fatigue and static stress capacity for infinite life of the shaft, with minimum safety factors of 1.5.



Dimensions in inches

## Solution

Perform free body diagram analysis to get reaction forces at the bearings.

$$R_{Az} = 115.0 \text{ lbf}$$

$$R_{Ay} = 356.7 \text{ lbf}$$

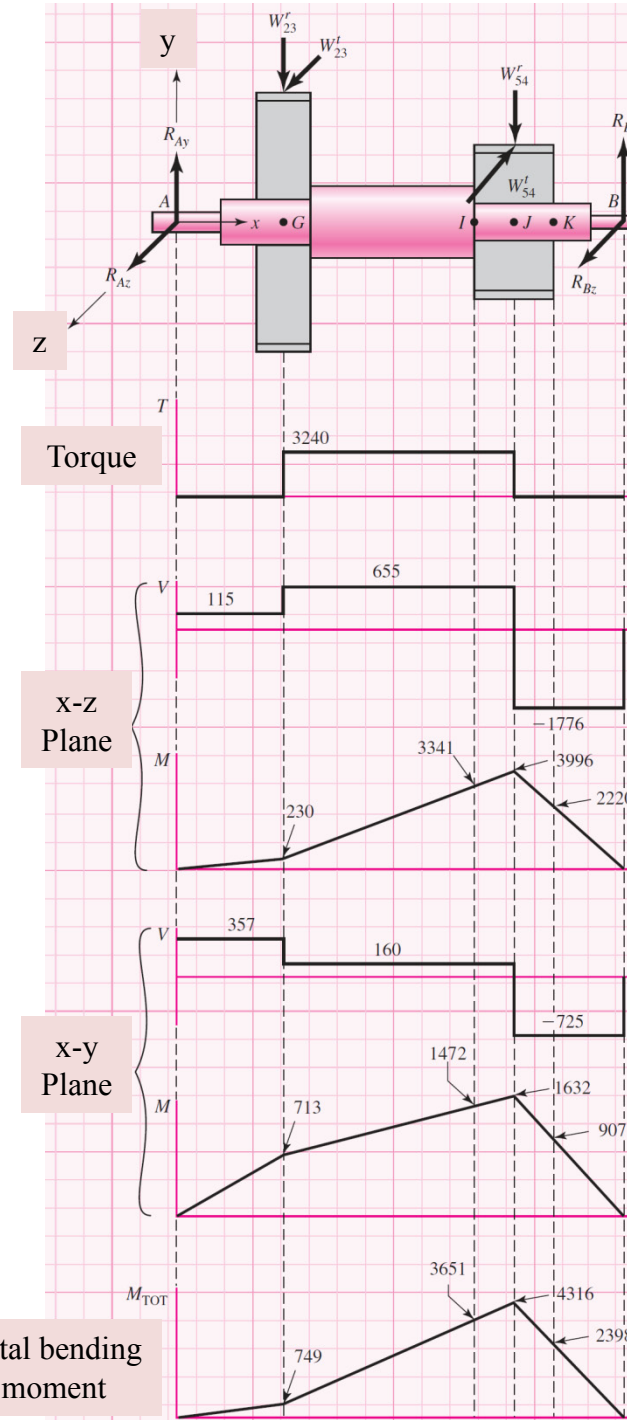
$$R_{Bz} = 1776.0 \text{ lbf}$$

$$R_{By} = 725.3 \text{ lbf}$$

From  $\Sigma M_x$ , find the torque in the shaft between the gears,  
 $T = W_{23}^t(d_3/2) = 540(12/2) = 3240 \text{ lbf} \cdot \text{in.}$

Generate shear-moment diagrams for two planes.

Combine orthogonal planes as vectors to get total moments, e.g., at J,  $\sqrt{3996^2 + 1632^2} = 4316 \text{ lbf} \cdot \text{in.}$



Total bending moment

Start with Point I, where the bending moment is high, there is a stress concentration at the shoulder, and the torque is present.

$$\text{At } I, M_a = 3651 \text{ lbf} \cdot \text{in}, T_m = 3240 \text{ lbf} \cdot \text{in}, M_m = T_a = 0$$

คิดจุด I ซึ่งมี M สูง และมี shoulder ที่จุดนี้จะได้ D5

Assume generous fillet radius for gear at I.

From Table 7-1, estimate  $K_t = 1.7$ ,  $K_{ts} = 1.5$ . For quick, conservative first pass, assume  $K_f = K_t$ ,  $K_{fs} = K_{ts}$ .

Choose inexpensive steel, 1020 CD, with  $S_{ut} = 68 \text{ kpsi}$ . For  $S_e$ ,

$$\text{Eq. (6-19)} \quad k_a = aS_{ut}^b = 2.7(68)^{-0.265} = 0.883$$

Guess  $k_b = 0.9$ . Check later when  $d$  is known.

$$k_c = k_d = k_e = 1$$

$$\text{Eq. (6-18)} \quad S_e = (0.883)(0.9)(0.5)(68) = 27.0 \text{ kpsi}$$

For first estimate of the small diameter at the shoulder at point I, use the DE-Goodman criterion of Eq. (7-8). This criterion is good for the initial design, since it is simple and conservative. With  $M_m = T_a = 0$ , Eq. (7-8) reduces to

$$d = \left\{ \frac{16n}{\pi} \left( \frac{2(K_f M_a)}{S_e} + \frac{[3(K_{fs} T_m)^2]^{1/2}}{S_{ut}} \right) \right\}^{1/3}$$

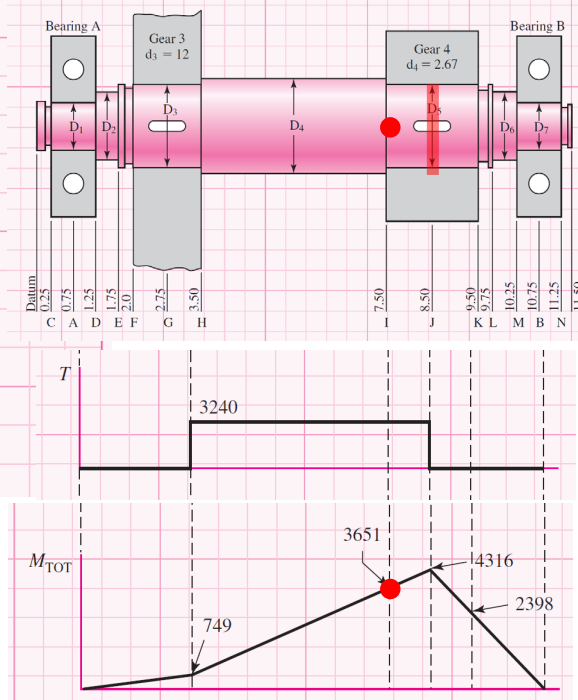
$$d = \left\{ \frac{16(1.5)}{\pi} \left( \frac{2(1.7)(3651)}{27000} + \frac{\{3[(1.5)(3240)]^2\}^{1/2}}{68000} \right) \right\}^{1/3}$$

$$d = 1.65 \text{ in}$$

ไม่รู้ขนาดเพลลา จึงต้องสมมุติค่า  $K_t$ ,  $K_{ts}$  โดยดูจากตารางก่อน

เลือกวัสดุและหาค่า  $S_{ut}$ ,  $S_e$

เลือก criteria สำหรับคำนวณความเสียหาย  
คำนวณขนาดเพลลา



All estimates have probably been conservative, so select the next standard size below 1.65 in. and check,  $d = 1.625$  in.

A typical  $D/d$  ratio for support at a shoulder is  $D/d = 1.2$ , thus,  $D = 1.2(1.625) = 1.95$  in. Increase to  $D = 2.0$  in. A nominal 2 in. cold-drawn shaft diameter can be used. Check if estimates were acceptable.

$$D/d = 2/1.625 = 1.23$$

Assume fillet radius  $r = d/10 \cong 0.16$  in.  $r/d = 0.1$

$$K_t = 1.6 \text{ (Fig. A-15-9)}, q = 0.82 \text{ (Fig. 6-20)}$$

$$\text{Eq. (6-32)} \quad K_f = 1 + 0.82(1.6 - 1) = 1.49$$

$$K_{ts} = 1.35 \text{ (Fig. A-15-8)}, q_s = 0.85 \text{ (Fig. 6-21)}$$

$$K_{fs} = 1 + 0.85(1.35 - 1) = 1.30$$

$$k_a = 0.883 \text{ (no change)}$$

$$\text{Eq. (6-20)} \quad k_b = \left( \frac{1.625}{0.3} \right)^{-0.107} = 0.835$$

$$S_e = (0.883)(0.835)(0.5)(68) = 25.1 \text{ kpsi}$$

$$\text{Eq. (7-5)} \quad \sigma'_a = \frac{32K_f M_a}{\pi d^3} = \frac{32(1.49)(3651)}{\pi(1.625)^3} = 12910 \text{ psi}$$

$$\text{Eq. (7-6)} \quad \sigma'_m = \left[ 3 \left( \frac{16K_{fs} T_m}{\pi d^3} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{3}(16)(1.30)(3240)}{\pi(1.625)^3} = 8659 \text{ psi}$$

Using Goodman criterion

$$\frac{1}{n_f} = \frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} = \frac{12910}{25100} + \frac{8659}{68000} = 0.642$$

$$n_f = 1.56$$

เลือกขนาดเพลลา D5

กำหนดขนาดเพลลา D4

กำหนดค่า fillet radius

หาค่า  $K_t$ ,  $K_{ts}$  ที่ตรงกับรูปร่างจริง

$k_b$  เปลี่ยนตามรูปร่าง จึงคำนวณใหม่  
หาค่า  $S_e$  ใหม่

ตรวจสอบ stress ที่ D5 ที่เลือก

หา factor of safety ตามเงื่อนไข

Goodman criterion

ตรวจสอบว่าไม่พังจากความล้า

Note that we could have used Eq. (7-7) directly.  
Check yielding.

$$n_y = \frac{S_y}{\sigma'_{\max}} > \frac{S_y}{\sigma'_a + \sigma'_m} = \frac{57\,000}{12\,910 + 8\,659} = 2.64$$

Also check this diameter at the end of the keyway, just to the right of point *I*, and at the groove at point *K*. From moment diagram, estimate *M* at end of keyway to be  $M = 3750$  lbf-in.

Assume the radius at the bottom of the keyway will be the standard  $r/d = 0.02$ ,  $r = 0.02 d = 0.02 (1.625) = 0.0325$  in.

$$K_t = 2.14 \text{ (Table 7-1)}, q = 0.65 \text{ (Fig. 6-20)}$$

$$K_f = 1 + 0.65(2.14 - 1) = 1.74$$

$$K_{ts} = 3.0 \text{ (Table 7-1)}, q_s = 0.71 \text{ (Fig. 6-21)}$$

$$K_{fs} = 1 + 0.71(3 - 1) = 2.42$$

$$\sigma'_a = \frac{32K_f M_a}{\pi d^3} = \frac{32(1.74)(3750)}{\pi (1.625)^3} = 15\,490 \text{ psi}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{3}(16) \frac{K_{fs} T_m}{\pi d^3} = \frac{\sqrt{3}(16)(2.42)(3240)}{\pi (1.625)^3} = 16\,120 \text{ psi}$$

$$\frac{1}{n_f} = \frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} = \frac{15\,490}{25\,100} + \frac{16\,120}{68\,000} = 0.854$$

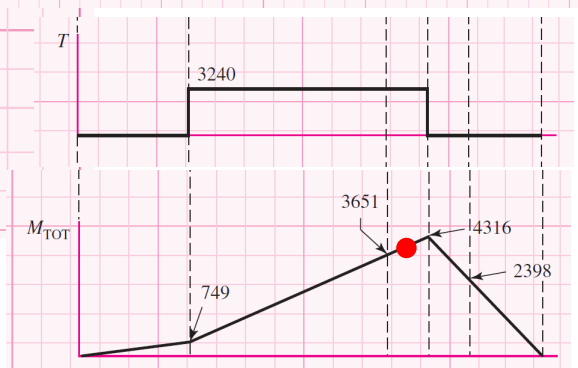
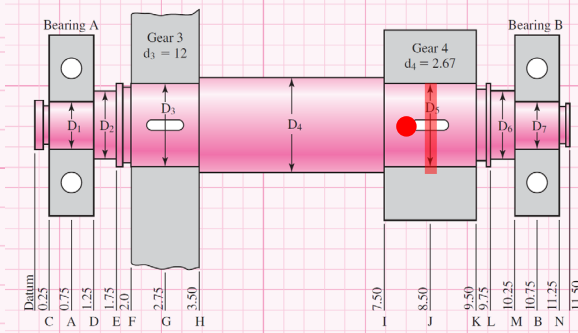
$$n_f = 1.17$$

The keyway turns out to be more critical than the shoulder. We can either increase the diameter or use a higher strength material. Unless the deflection analysis shows a need for larger diameters, let us choose to increase the strength. We started with a very low strength and can afford to increase it some to avoid larger sizes. Try 1050 CD with  $S_{ut} = 100$  kpsi.

Safety factor ที่รื่องลิมมีค่าน้อย อาจแก้โดยเพิ่ม diameter หรือเปลี่ยนวัสดุ  
ในที่นี้เปลี่ยนวัสดุ

Check yielding

ตรวจสอบตำแหน่งวิกฤตอื่น ที่  
เส้นผ่าศูนย์กลาง D5 ได้แก่จุดปลาย  
รื่องลิม



Recalculate factors affected by  $S_{ut}$ , i.e.,  $k_a \rightarrow S_e$ ;  $q \rightarrow K_f \rightarrow \sigma'_a$

$$k_a = 2.7(100)^{-0.265} = 0.797, \quad S_e = 0.797(0.835)(0.5)(100) = 33.3 \text{ kpsi}$$

$$q = 0.72, \quad K_f = 1 + 0.72(2.14 - 1) = 1.82$$

$$\sigma'_a = \frac{32(1.82)(3750)}{\pi(1.625)^3} = 16\,200 \text{ psi}$$

$$\frac{1}{n_f} = \frac{16\,200}{33\,300} + \frac{16\,120}{100\,000} = 0.648$$

$$n_f = 1.54$$

Since the Goodman criterion is conservative, we will accept this as close enough to the requested 1.5.

Check at the groove at K, since  $K_t$  for flat-bottomed grooves are often very high. From the torque diagram, note that no torque is present at the groove. From the moment diagram,  $M_a = 2398 \text{ lbf} \cdot \text{in}$ ,  $M_m = T_a = T_m = 0$ . To quickly check if this location is potentially critical, just use  $K_f = K_t = 5.0$  as an estimate, from Table 7-1.

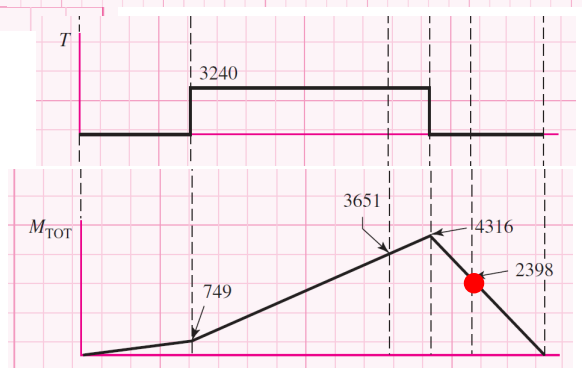
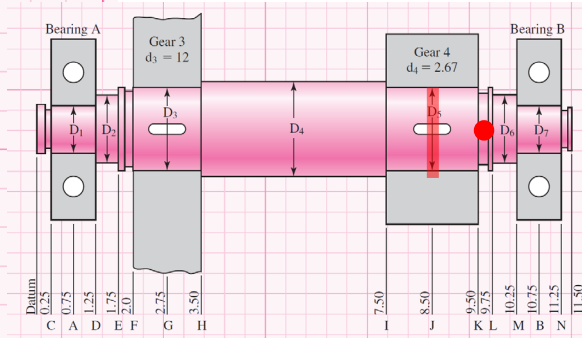
$$\sigma_a = \frac{32K_f M_a}{\pi d^3} = \frac{32(5)(2398)}{\pi(1.625)^3} = 28\,460 \text{ psi}$$

$$n_f = \frac{S_e}{\sigma_a} = \frac{33\,300}{28\,460} = 1.17$$

ตรวจสอบที่จุด K เพราะร่องที่มีพื้นด้านล่างเรียบ (ใช้ประกอบกับ retaining ring) มักมี stress concentration สูง

เมื่อเปลี่ยนวัสดุ และค่า  $S_{ut}$   
จะต้องคำนวณค่า  $k_a$  และค่า  $K_f$  ใหม่

หาความเค้น และ safety factor  
ใหม่อีกครั้ง



This is low. We will look up data for a specific retaining ring to obtain  $K_f$  more accurately. With a quick online search of a retaining ring specification using the website [www.globalspec.com](http://www.globalspec.com), appropriate groove specifications for a retaining ring for a shaft diameter of 1.625 in are obtained as follows: width,  $a = 0.068$  in; depth,  $t = 0.048$  in; and corner radius at bottom of groove,  $r = 0.01$  in. From Fig. A-15-16, with  $r/t = 0.01/0.048 = 0.208$ , and  $a/t = 0.068/0.048 = 1.42$

$$K_t = 4.3, q = 0.65 \text{ (Fig. 6-20)}$$

$$K_f = 1 + 0.65(4.3 - 1) = 3.15$$

$$\sigma_a = \frac{32K_f M_a}{\pi d^3} = \frac{32(3.15)(2398)}{\pi(1.625)^3} = 17\,930 \text{ psi}$$

$$n_f = \frac{S_e}{\sigma_a} = \frac{33\,300}{17\,930} = 1.86$$

ตรวจหาขนาดจริงของร่อง retaining ring  
หาค่า  $K_t$   
คำนวณความเค้น และ safety factor

Quickly check if point  $M$  might be critical. Only bending is present, and the moment is small, but the diameter is small and the stress concentration is high for a sharp fillet required for a bearing. From the moment diagram,

$$M_a = 959 \text{ lbf} \cdot \text{in}, \text{ and } M_m = T_m = T_a = 0.$$

Estimate  $K_t = 2.7$  from Table 7-1,  $d = 1.0$  in, and fillet radius  $r$  to fit a typical bearing.

$$r/d = 0.02, \quad r = 0.02(1) = 0.02$$

$$q = 0.7 \text{ (Fig. 6-20)}$$

$$K_f = 1 + (0.7)(2.7 - 1) = 2.19$$

$$\sigma_a = \frac{32K_f M_a}{\pi d^3} = \frac{32(2.19)(959)}{\pi(1)^3} = 21\,390 \text{ psi}$$

$$n_f = \frac{S_e}{\sigma_a} = \frac{33\,300}{21\,390} = 1.56$$

Should be OK. Close enough to recheck after bearing is selected.

With the diameters specified for the critical locations, fill in trial values for the rest of the diameters, taking into account typical shoulder heights for bearing and gear support.

$$D_1 = D_7 = 1.0 \text{ in}$$

$$D_2 = D_6 = 1.4 \text{ in}$$

$$D_3 = D_5 = 1.625 \text{ in}$$

$$D_4 = 2.0 \text{ in}$$

The bending moments are much less on the left end of shaft, so  $D_1$ ,  $D_2$ , and  $D_3$  could be smaller. However, unless weight is an issue, there is little advantage to requiring more material removal. Also, the extra rigidity may be needed to keep deflections small.

ตรวจสอบจุด  $M$  ซึ่งเป็นป่าเพลลาของเพลลาส่วนที่เล็กที่สุด

กำหนดขนาด D7, fillet radius แล้วจึงหา Safety factor

