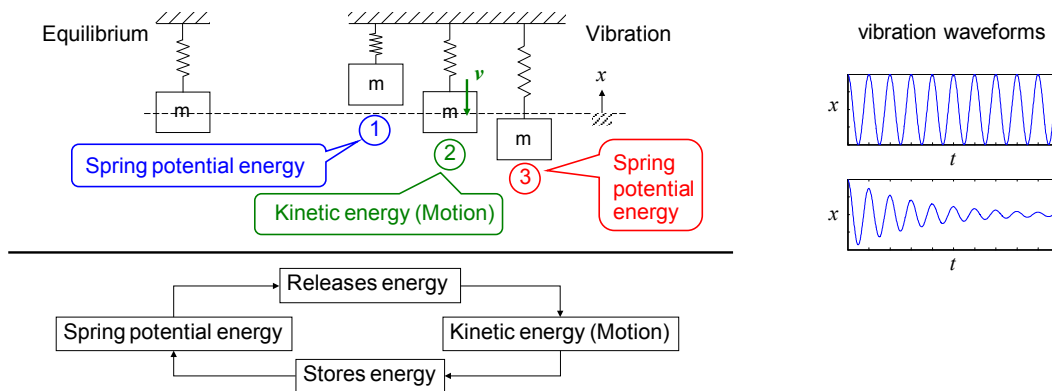


## บทที่ 2

### หลักการและความรู้พื้นฐาน

#### 1. หลักการพื้นฐานของการสั่นสะเทือน

หลักการพื้นฐานของการสั่นสะเทือนอาจจะอธิบายได้โดยใช้หลักการของพลังงานดังแสดงในรูปที่ 2-2 โดยระบบที่แสดงในรูปประกอบด้วยสปริงและมวลเพียง 2 ชิ้น โดยเมื่อดันมวล  $m$  ขึ้นด้านบนจะทำให้สปริงหดตัว งานจากแรงภายนอกที่ใช้ดันมวลจะถูกสะสมในรูปของพลังงานศักย์สปริง เมื่อปล่อยมือออกสปริงจะคลายตัวดันให้มวล  $m$  เคลื่อนที่ลงมาด้านล่าง ในขั้นตอนนี้พลังงานศักย์สปริงจะถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์ในการเคลื่อนที่ของมวล พลังงานจลน์จะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนที่ตำแหน่งสมดุล (แสดงโดยเส้นประในรูป) ซึ่งสปริงไม่มีการยืดหด ในตำแหน่งนี้เนื่องจากไม่มีพลังงานศักย์สปริงแสดงให้เห็นว่าพลังงานทั้งหมดถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์ ดังนั้นในตำแหน่งนี้มวลจึงมีความเร็วมากที่สุด



รูปที่ 2-2 หลักการพื้นฐานของการสั่นสะเทือน

เมื่อมวล  $m$  เคลื่อนที่ต่ำลงมาจากตำแหน่งสมดุลในตอนแรก สปริงจะยืดตัวออก ในช่วงนี้พลังงานจลน์จะมีค่าลดลง และถูกเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานศักย์สปริงอีกครั้งหนึ่ง พลังงานศักย์สปริงจะมีค่ามากที่สุดเมื่อสปริงเคลื่อนที่ลงมาต่ำที่สุด ซึ่งในตำแหน่งนี้พลังงานจลน์จะถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานศักย์สปริงทั้งหมด เมื่อไม่มีพลังงานจลน์ดังนั้นในตำแหน่งนี้ความเร็วในการเคลื่อนที่จึงเป็นศูนย์ เมื่อมวลเริ่มเคลื่อนที่ขึ้นอีกครั้ง พลังงานศักย์ที่สะสมอยู่ก็จะเปลี่ยนแปลงมาเป็นพลังงานจลน์ ทำให้วัตถุมีความเร็วเพิ่มขึ้นอีกครั้ง การเปลี่ยนรูปพลังงานจากพลังงานจลน์เป็นพลังงานศักย์นี้จะเกิดขึ้นซ้ำไปซ้ำมา ทำให้เกิดการสั่นสะเทือนขึ้น

กราฟทางด้านขวามือของรูปที่ 2-2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะ  $x$  ซึ่งวัดจากตำแหน่งสมดุลที่เวลาต่างๆ โดยกราฟด้านบนจะแสดงการสั่นสะเทือนเมื่อระบบไม่มีการสูญเสียพลังงานเลย งานจากแรงภายนอกถูกเปลี่ยนเป็นผลรวมของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ทั้งหมด เนื่องจากการสูญเสียพลังงาน ดังนั้นขนาดของการสั่นสะเทือนจะไม่ลดลงแม้ว่าเวลาจะผ่านไปเท่าใดก็ตาม แต่ในความเป็นจริงแล้วทุกๆ

ระบบจะมีการสูญเสียพลังงาน ทำให้หลังจากการเปลี่ยนรูปพลังงานจากพลังงานจลน์เป็นพลังงานศักย์ หรือจากพลังงานศักย์เป็นพลังงานจลน์ มีพลังงานที่ลดลงเสมอ ดังนั้นขนาดของการสั่นสะเทือน จึงค่อยๆ ลดลง ดังแสดงในกราฟด้านล่าง

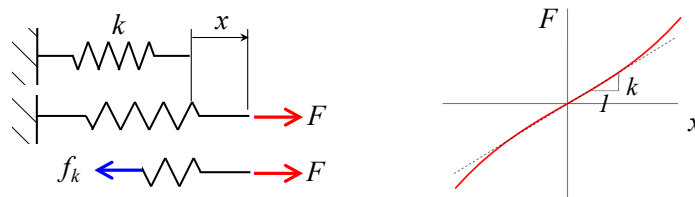
## 2. ส่วนประกอบของระบบการสั่นสะเทือน

จากที่กล่าวมาในหัวข้อที่แล้ว จะพบว่าระบบการสั่นสะเทือนประกอบด้วยส่วนประกอบพื้นฐานอย่างน้อย 2 ส่วน ได้แก่ 1. ส่วนประกอบที่ใช้เก็บและปล่อยพลังงานศักย์ ซึ่งได้แก่สปริงในตัวอย่าง และ 2. ส่วนประกอบที่ใช้เก็บหรือปล่อยพลังงานจลน์ ซึ่งได้แก่มวล  $m$  ในตัวอย่าง ในกรณีที่มีการสูญเสียพลังงานด้วย ระบบการสั่นสะเทือนจะมีส่วนประกอบที่แทนการสูญเสียพลังงานเพิ่มขึ้นมาด้วย ดังจะได้อธิบายต่อไป

### 2.1 ชิ้นส่วนยืดหยุ่น (Elastic component)

ชิ้นส่วนยืดหยุ่นทำหน้าที่เก็บและปล่อยพลังงานศักย์ระหว่างการสั่นสะเทือน ตัวอย่างของชิ้นส่วนยืดหยุ่น ได้แก่ สปริงชนิดต่างๆ รวมถึงชิ้นส่วนอื่นๆ ที่ทำหน้าที่คล้ายสปริง รูปที่ 2-3 แสดงถึงแรงภายในสปริง  $f_k$  และความสัมพันธ์ระหว่างระยะยืด  $x$  กับแรงภายนอกที่กระทำ  $F$  จากรูปจะเห็นว่าแรงในสปริงมีความสัมพันธ์กับแรงภายนอกและระยะยืดดังสมการ

$$f_k = -F = -kx \quad (2-1)$$



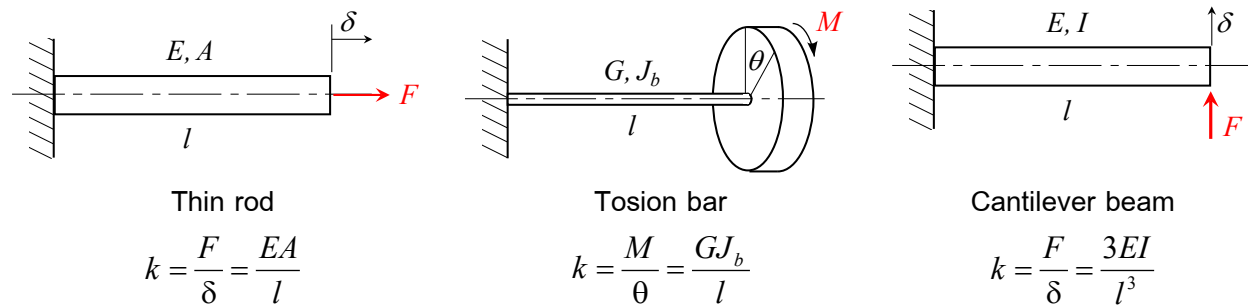
รูปที่ 2-3 แรงภายในสปริง และความสัมพันธ์ระหว่างสปริงกับระยะยืด

โดย  $k$  คือค่าคงที่สปริง (spring stiffness) ซึ่งอาจทราบค่าได้จากทดลอง ค่าคงที่สปริงนี้จะทำให้ทราบว่าสปริงเสียรูปได้ง่ายหรือยากเพียงใดเมื่อมีแรงหรือแรงบิดกระทำ โดยหากค่า  $k$  น้อยแสดงว่าสปริงเสียรูปง่ายหรืออาจเรียกว่าสปริงอ่อน แต่ถ้า  $k$  มีค่ามากแสดงว่าสปริงเสียรูปได้ยาก หรืออาจเรียกว่าสปริงแข็ง ส่วนเครื่องหมายลบในสมการที่ (2-1) แสดงถึงทิศทางที่แรงในสปริงกระทำ จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของแรงภายนอกเสมอ

ส่วนพลังงานศักย์  $V$  ที่สะสมอยู่ในสปริงสามารถหาได้จากสมการ

$$V = \int_0^x (kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2-2)$$

นอกจากสปริงชนิดที่พบเห็นกันได้ทั่วไปแล้ว ชิ้นส่วนยืดหยุ่นอื่นๆ ที่ทำหน้าที่ทำนองเดียวกับสปริง ก็สามารถพิจารณาว่าเป็นสปริงในระบบการสั่นสะเทือนได้เช่นกัน เพื่อความสะดวกในที่นี้จะเรียกชิ้นส่วนยืดหยุ่นอื่นๆ เหล่านี้ว่า “สปริง” ด้วยเช่นกัน ตัวอย่างของชิ้นส่วนเหล่านี้แสดงในรูปที่ 2-4



รูปที่ 2-4 ตัวอย่างชิ้นส่วนอื่นๆ ที่ประพฤติตัวเช่นเดียวกับสปริง

### Thin rod

Thin rod เมื่อได้รับแรงในแนวแกนแล้วจะยืดออก เมื่อไม่มีแรงกระทำ Thin rod จะหดลงมาเหลือความยาวเท่าเดิม ค่าคงที่สปริงในกรณีของ Thin rod สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ของโมดูลัสยืดหยุ่น  $E$  ความเค้น  $\sigma$  และความเครียด  $\epsilon$  ดังสมการ

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/A}{\delta/l}$$

ดังนั้น

$$F = \left( \frac{EA}{l} \right) \cdot \delta = k\delta \quad (2-3)$$

จากสมการ (2-3) จะได้ว่า

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{EA}{l} \quad (2-4)$$

### Torsion bar

เมื่อมีแรงบิดมากระทำกับ Torsion bar ซึ่งยาว  $l$  ดังแสดงในรูปที่ 2-4 Torsion bar จะถูกบิดไปเป็นมุม  $\theta$  เมื่อไม่มีแรงบิดกระทำแล้ว Torsion bar จะบิดคืนตัวกลับมาที่รูปร่างเดิม ค่าคงที่สปริงของ Torsion bar สามารถได้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิด  $M$  กับมุมบิด  $\theta$  ดังสมการ  $\theta = \frac{Ml}{GJ_b}$

ดังนั้น

$$M = \left( \frac{GJ_b}{l} \right) \cdot \theta = k\theta \quad (2-5)$$

จากสมการ (2-5) จะได้ว่า

$$k = \frac{M}{\theta} = \frac{GJ_b}{l} \quad (2-6)$$

เนื่องจากในกรณีนี้เป็นค่าคงที่ของสปริงบิด ดังนั้นหน่วยของค่าคงที่สปริงจะเป็น N.m/rad ซึ่งแตกต่างจากค่าคงที่สปริงในกรณีเชิงเส้น ซึ่งจะมีหน่วยเป็น N/m

### Cantilever beam

คานแบบ Cantilever หรือคานแบบอื่นๆ ก็ประพฤติตัวเช่นเดียวกับสปริงเช่นกัน โดยเมื่อออกแรงกดในทิศทางตั้งฉากกันแกนคาน จะทำให้คานโก่งออก  $\delta$  แต่เมื่อไม่มีแรงกระทำ คานจะคืนตัวสู่สภาพเดิม ค่าคงตัวสปริงในกรณีนี้สามารถหาได้ จากสมการแสดงความสัมพันธ์ของระยะโก่งกับแรงกระทำ ในกรณีของคาน

แบบ Cantilever ดังแสดงในรูปที่ 2-4 จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการ  $\delta = \frac{Fl^3}{3EI}$

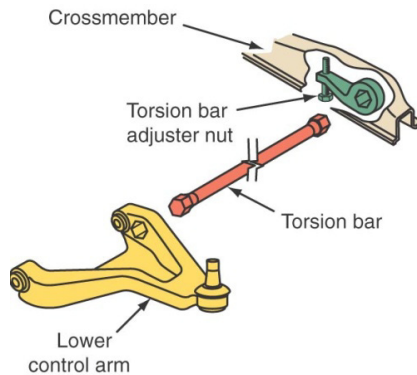
ดังนั้น 
$$F = \left( \frac{3EI}{l^3} \right) \cdot \delta = k\delta \quad (2-7)$$

จากสมการ (2-7) จะได้ 
$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{3EI}{l^3} \quad (2-8)$$

รูปที่ 2-5 แสดงชิ้นส่วนที่ทำหน้าที่เช่นเดียวกับสปริง โดยรูป (ก) แสดง torsion spring ซึ่งใช้กันทั่วไปในบานพับต่างๆ ส่วนรูป (ข) แสดง Torsion bar ที่ใช้ในระบบรองรับ (suspension system) ของรถยนต์ โดยส่วนของ Lower control arm จะติดกับล้อรถยนต์ เมื่อรถยนต์วิ่งชนเนินลูกระนาด หรือตกหลุม ส่วน Lower control arm จะมีการเคลื่อนที่ขึ้นลง และส่งผลให้ Torsion bar บิด เพื่อรองรับการเคลื่อนที่และส่งผ่านการเคลื่อนที่มีขนาดเล็กไปยังตัวรถยนต์และห้องโดยสารต่อไป สำหรับรูป (ค) ก็แสดงถึงการใช้แหวนสปริง ซึ่งก็คือคานที่ทำหน้าที่เป็นสปริงในระบบรองรับของรถยนต์เช่นกัน



(ก) Torsion spring



(ข) Torsion bar

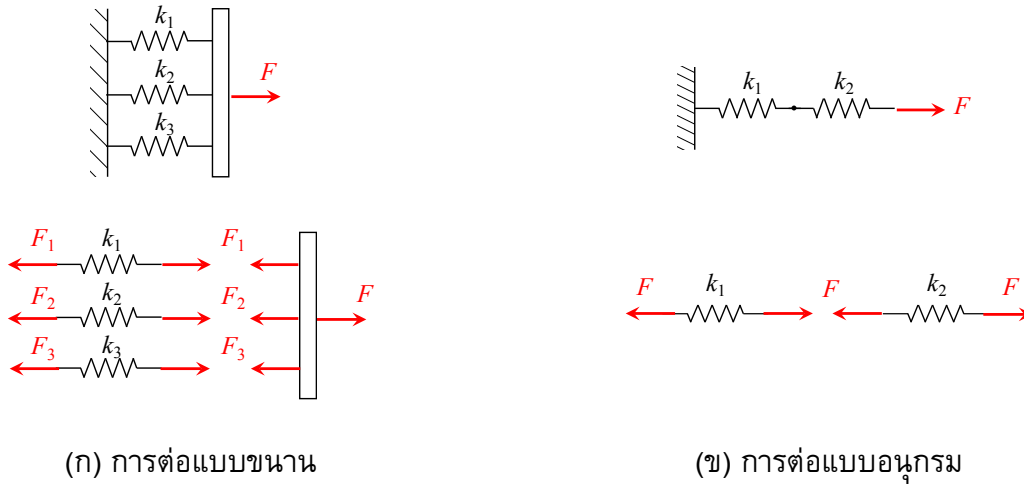


(ค) แหวนในรถยนต์

รูปที่ 2-5 ตัวอย่างสปริงและชิ้นส่วนที่ทำหน้าที่เช่นเดียวกับสปริง

### ระบบที่ประกอบด้วยสปริงหลายตัว

ในระบบการสั่นสะเทือนนั้นอาจจะประกอบด้วยชิ้นส่วนยืดหยุ่นต่างๆ ประกอบอยู่ด้วยกัน ในการวิเคราะห์จะพิจารณาการประกอบกันของชิ้นส่วนยืดหยุ่น เป็นเช่นเดียวกับการต่อกันของสปริง ซึ่งมีรูปแบบการต่อพื้นฐานอยู่ 2 แบบ ได้แก่การต่อแบบขนาน และการต่อแบบอนุกรม



รูปที่ 2-6 การต่อสปริงแบบขนานและแบบอนุกรม

การต่อแบบขนาน

การต่อสปริงแบบขนานแสดงดังรูปที่ 2-6(ก) จะเห็นว่าระยะยืดของสปริงทุกๆ ตัวจะมีค่าเท่ากัน และเมื่อพิจารณาแรงที่กระทำจะพบว่า ผลรวมของแรงที่กระทำกับสปริงแต่ละตัวจะมีค่าเท่ากับแรงรวมที่กระทำกับระบบดังแสดงด้วยสมการ

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \tag{2-9}$$

แทนความสัมพันธ์ของแรงกับค่าคงที่สปริงและระยะยืดลงในสมการ (2-9) จะได้

$$k_{eq} \delta = k_1 \delta + k_2 \delta + k_3 \delta$$

ดังนั้น

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 \tag{2-10}$$

โดย  $k_{eq}$  หมายถึงค่าคงที่สปริงของระบบรวมทั้งหมด จะเห็นว่าในการต่อแบบขนานนั้น ค่าคงที่สปริงจะเท่ากับผลบวกของค่าคงที่สปริงแต่ละตัว และสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังสมการ

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i \tag{2-11}$$

โดย  $n$  คือจำนวนสปริง

การต่อแบบอนุกรม

การต่อสปริงแบบอนุกรมแสดงดังรูปที่ 2-6(ข) ในกรณีนี้แรงที่กระทำกับสปริงแต่ละตัวจะมีค่าเท่ากัน แต่ระยะยืดของสปริงแต่ละตัวจะต่างกันหากค่าคงที่ของสปริงไม่เท่ากัน โดยระยะยืดรวมจะเท่ากับผลรวมระยะยืดของสปริงแต่ละตัว ดังนั้น

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \tag{2-12}$$

แทนความสัมพันธ์ของแรงกับค่าคงที่สปริงและระยะยืด จะได้

$$\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \quad (2-13)$$

หรือเขียนในรูปทั่วไปได้ดังสมการ

$$k_{eq} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^{-1} \quad (2-14)$$

การต่อกันของชิ้นส่วนยืดหยุ่นในระบบการสั่นสะเทือนมักจะพิจารณาเป็นการต่อกันแบบขนาน หรือแบบอนุกรม อย่างไรก็ตามหากการต่อกันไม่สอดคล้องกับรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง ค่าคงที่ของสปริงรวมก็จะต้องหาได้โดยการพิจารณาความสัมพันธ์ของแรง ระยะยืดหด โดยตรง

## 2.2 ส่วนประกอบที่แทนความเฉื่อย (Inertia component)

ส่วนประกอบที่แทนความเฉื่อยได้แก่ มวล  $m$  ในการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ และโมเมนต์ความเฉื่อย  $J$  ในการเคลื่อนที่แบบหมุน ส่วนประกอบเหล่านี้ทำหน้าที่เก็บและปล่อยพลังงานจลน์ในระบบการสั่นสะเทือน โดยพลังงานจลน์  $T$  ของมวลเมื่อเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่หาได้จาก

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2-15)$$

โดย  $\dot{x}$  คือความเร็วการเคลื่อนที่

ส่วนพลังงานจลน์ในกรณีการหมุนหาได้จาก

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (2-16)$$

โดย  $\dot{\theta}$  คือความเร็วเชิงมุมของการหมุน

## 2.3 ส่วนประกอบที่แทนการสูญเสียพลังงานของระบบ

ตามที่ได้อธิบายมาแล้วว่า สำหรับการสั่นสะเทือนที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานจากระบบเลย การสั่นจะเกิดขึ้นตลอดไปโดยไม่หยุด หากไม่มีพลังงานภายนอกใส่เข้ามาเพื่อเปลี่ยนแปลงระบบ อย่างไรก็ตามในความเป็นจริงแล้วระบบการสั่นสะเทือนจะสูญเสียพลังงานไปกับสาเหตุต่างๆ เช่นการสูญเสียพลังงานในการเสียดทานของสปริง แรงเสียดทาน หรือแรงต้านทานการเคลื่อนที่จากอากาศ เป็นต้น โดยพลังงานที่สูญเสียจะเปลี่ยนรูปเป็นรูปของความร้อน หรือเสียง ด้วยเหตุนี้พลังงานในระบบการสั่นสะเทือนจึงน้อยลงเรื่อยๆ ทำให้อัตราการสั่นสะเทือนน้อยลงจนกระทั่งหยุดสั่น

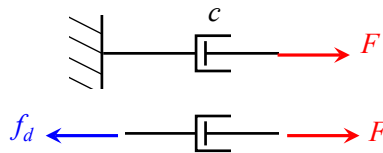
ระบบการสั่นสะเทือนโดยทั่วไปมักจะแทนการสูญเสียพลังงานจากสาเหตุต่างๆ ว่าเป็นการสูญเสียจากตัวหน่วงการสั่นสะเทือน (Damper) โดยตัวหน่วงการสั่นสะเทือนที่ใช้กันมากในการวิเคราะห์ปัญหาการ

สั่นสะเทือนได้แก่ viscous damper ซึ่งเป็นตัวหน่วงซึ่งเป็นผลจากความต้านทานการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อเคลื่อนที่ในตัวกลางที่เป็นของไหล เช่น อากาศ ก๊าซ หรือของเหลว ตัวอย่างของ viscous damper ในงานทางวิศวกรรม เช่น (1) ฟิล์มของสารหล่อลื่นบนพื้นผิวที่มีการเคลื่อนที่สัมผัสกัน ใน journal bearing หรือน้ำมันหล่อลื่นระหว่างกระบอกสูบและลูกสูบ (2) การเคลื่อนที่ของของไหลผ่านรูขนาดเล็ก (orifice)

สำหรับ viscous damper แรงต้านทานการเคลื่อนที่  $f_d$  จะมีขนาดแปรผันตรงกับความเร็วกการเคลื่อนที่ ตามสมการ

$$f_d = -F = -c\dot{x} \quad (2-17)$$

โดย  $c$  คือสัมประสิทธิ์ความหน่วง (damping coefficient) เครื่องหมายลบแสดงให้เห็นว่าแรงที่เกิดขึ้นเป็นแรงต้านทานการเคลื่อนที่และมีทิศตรงกันข้ามกับทิศของความเร็ว รูปที่ 2-7 แสดงสัญลักษณ์ของ viscous damper ซึ่งเป็นรูปกระบอกสูบและลูกสูบ (dashpot)

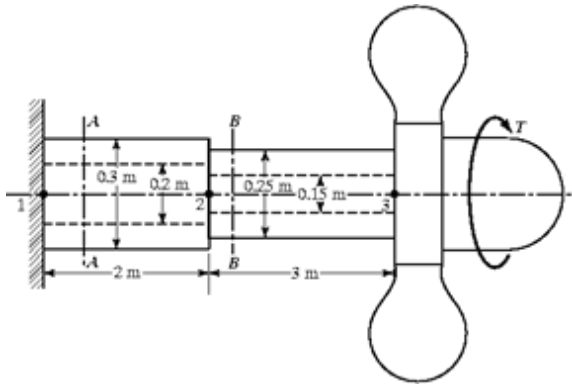


รูปที่ 2-7 สัญลักษณ์ของตัวหน่วงการสั่นสะเทือนในระบบการสั่นสะเทือน

สมการที่เกี่ยวข้องกับส่วนประกอบของระบบการสั่นสะเทือนซึ่งได้แก่ ชิ้นส่วนยืดหยุ่น ความเฉื่อยหรือมวล และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ที่แสดงข้างต้นจะใช้สำหรับระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่ สำหรับระบบที่เป็นการหมุน รูปแบบของสมการจะเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย โดย แรงจะถูกเปลี่ยนเป็นแรงบิด การเคลื่อนที่เชิงเส้นจะถูกเปลี่ยนเป็นการเคลื่อนที่เชิงมุม ตารางที่ 2-1 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างสมการที่ใช้ในระบบเชิงเส้นกับระบบเชิงมุม

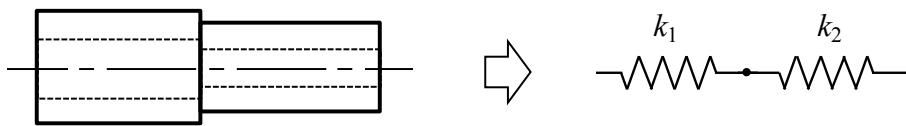
ตารางที่ 2-1 สมการในระบบเชิงเส้นและเชิงมุม

สมการ	เชิงเส้น	เชิงมุม
แรงจากสปริง	$F_k = kx$	$M_k = k_T \theta$
แรงจากตัวหน่วงการสั่นสะเทือน	$F_d = c\dot{x}$	$M_d = c_T \dot{\theta}$
สมการการเคลื่อนที่	$F = m\ddot{x}$	$M = J\ddot{\theta}$



ตัวอย่างที่ 2-1 Determine the torsional spring constant of the steel propeller shaft shown in the figure. (Shear modulus  $G = 80 \text{ GPa}$ )

เนื่องจากเมื่อมีแรงบิดกระทำกับเพลลา propeller แรงบิดที่กระทำกับเพลลาทั้งสองส่วนจะมีขนาดเท่ากัน ส่วนมุมบิดทั้งหมดในระบบ จะเป็นผลรวมของมุมบิดของเพลลาแต่ละเพลลา ดังนั้นจึงได้ว่าการต่อกันของเพลลา propeller สองส่วนเป็นการต่อกันของของสปริงแบบอนุกรม (แรงที่กระทำกับสปริงแต่ละตัวเท่ากัน ระยะยืดของสปริงเท่ากับผลรวมระยะยืดของสปริงแต่ละตัว) ดังรูป



เนื่องจากเพลลาแต่ละช่วงเป็น Torsion bar กลวง ค่า  $k$  จะหาได้จาก  $k = \frac{GJ}{l}$

โดยค่า  $J$  หาได้จาก  $J = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$

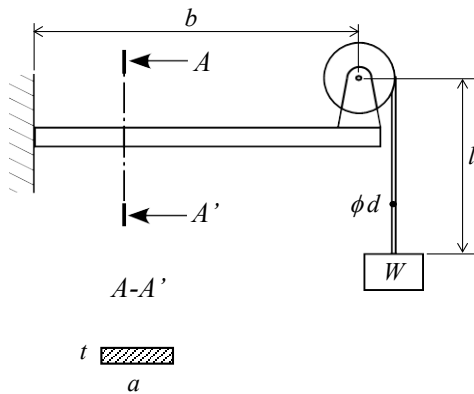
ดังนั้น  $k$  จะหาได้จาก  $k = \frac{GJ}{l} = \frac{G\pi(D^4 - d^4)}{32l}$

เพราะฉะนั้น  $k_1 = \frac{(80 \times 10^9)\pi(0.3^4 - 0.2^4)}{32 \times 2} = 25.5255 \times 10^6 \text{ Nm/rad}$

$k_2 = \frac{(80 \times 10^9)\pi(0.25^4 - 0.15^4)}{32 \times 3} = 8.9012 \times 10^6 \text{ Nm/rad}$

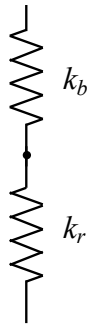
สปริงต่อกันแบบอนุกรม ดังนั้น  $k_{eq} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

$k_{eq} = \frac{(25.5255 \times 10^6)(8.9012 \times 10^6)}{25.5255 \times 10^6 + 8.9012 \times 10^6} = 6.6 \times 10^6 \text{ Nm/rad}$  **ANS**



ตัวอย่างที่ 2-2 A hoisting drum, carrying a steel wire rope, is mounted at the end of a cantilever beam as shown in the figure. Determine the equivalent spring constant of the system when the suspended length of the wire rope is  $l$ . Assume that the net cross-sectional diameter of the wire rope is  $d$  and the Young's modulus of the beam and the wire rope is  $E$ .

ในข้อนี้แรงเนื่องจากน้ำหนัก  $W$  ทำให้ wire rope ยืดออก และแรงเดียวกันนี้ทำให้คานโก่งลงด้วย โดยระยะที่มวล  $W$  เคลื่อนที่ลงมาเท่ากับผลรวมของระยะยืดของ wire rope และระยะที่คานแอ่น ดังนั้นจึงอาจพิจารณาระบบนี้เป็นการต่อกันของสปริงแบบอนุกรม โดย  $k_b$  แทนค่าคงที่สปริงของคาน ส่วน  $k_r$  แทนค่าคงที่สปริงของ wire rope ดังแสดงในรูป



ค่า  $k_b$  ของคานหาได้จากความสัมพันธ์ของระยะโก่งของคานและแรงกระทำ ดังสมการ

$$k_b = \frac{3EI}{b^3} = \frac{3E}{b^3} \left( \frac{1}{12} at^3 \right) = \frac{Eat^3}{4b^3}$$

ค่า  $k_r$  หาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงและระยะยืดของ wire rope ดังสมการ

$$k_r = \frac{AE}{l} = \frac{\pi d^2 E}{4l}$$

ค่า  $k_{eq}$  ของระบบหาได้จากการรวมค่า  $k_b$  และ  $k_r$  แบบอนุกรมดังนี้

$$k_{eq} = \left( \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r} \right)^{-1} = \left( \frac{4b^3}{Eat^3} + \frac{4l}{\pi d^2 E} \right)^{-1}$$

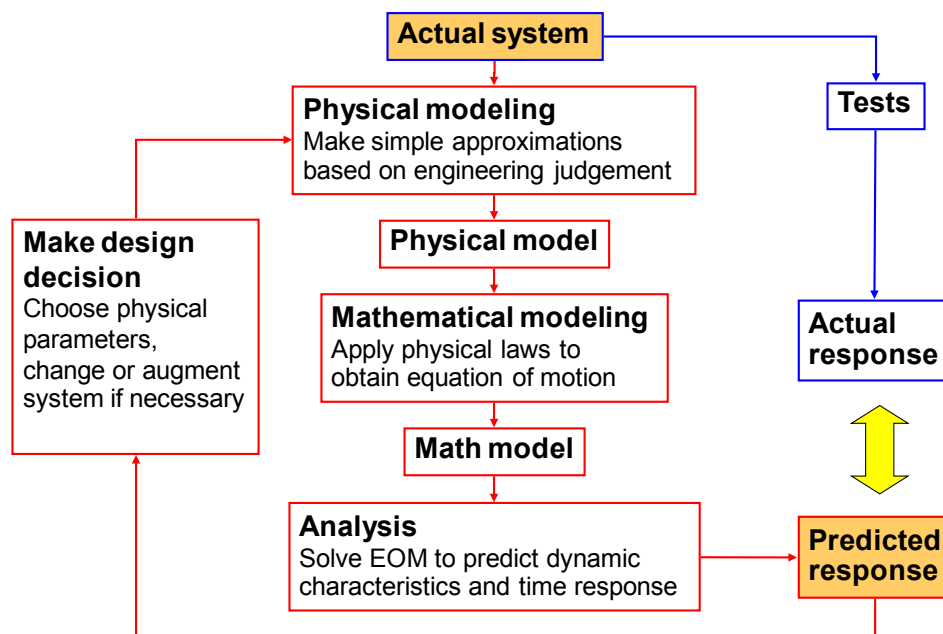
$$k_{eq} = \frac{\pi at^3 d^2}{\pi d^2 b^3 + lat^3}$$

ANS

### 3. การสร้างแบบจำลองระบบการสั่นสะเทือน

ในปัญหาการสั่นสะเทือนจริงนั้นมักมีความซับซ้อน มีปัจจัยที่ส่งผลต่อการสั่นสะเทือนจำนวนมาก การวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนจึงต้องเริ่มจากจำลองระบบจริงที่มีความซับซ้อน ให้เป็นระบบที่ง่ายต่อการวิเคราะห์เสียก่อน จึงจะสามารถวิเคราะห์โดยใช้หลักการทางฟิสิกส์และทางคณิตศาสตร์ต่อไปได้

รูปที่ 2-8 แสดงถึงแผนผังตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือน จากระบบจริงที่มีความซับซ้อน ปัญหาจะถูกทำให้มีความซับซ้อนลดน้อยลงโดยการตั้งสมมุติฐานต่างๆ และสร้างเป็นแบบจำลองกายภาพ (Physical model) ซึ่งมักประกอบด้วยส่วนประกอบที่เป็นมวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน จากแบบจำลองกายภาพ ผู้วิเคราะห์สามารถใช้ทฤษฎี กฎ ทางฟิสิกส์ต่างๆ เช่น กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน หรือใช้วิธีการทางพลังงาน สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model) และสมการคณิตศาสตร์ออกมาได้ เมื่อแก้สมการทางคณิตศาสตร์นี้จะทำให้ทราบลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบการสั่นสะเทือนได้ ความถูกต้องของการสั่นสะเทือนที่คำนวณได้นี้จะทราบได้โดยการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลการทดสอบการสั่นสะเทือน และหากต้องการให้ผลที่ได้ใกล้เคียงกับผลการวัดการสั่นสะเทือนมากยิ่งขึ้น ก็อาจจำเป็นที่จะต้องพิจารณาเพิ่มปัจจัยต่างๆ ในขั้นตอนการสร้างแบบจำลองทางกายภาพให้ใกล้เคียงกับปัญหาจริงยิ่งขึ้น ซึ่งก็มักจะเพิ่มความซับซ้อนในการคำนวณมากขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือน ผู้วิเคราะห์จึงต้องคำนึงถึงความถูกต้องแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้รวมถึงความซับซ้อนยุ่งยากในการคำนวณประกอบกันไปด้วย

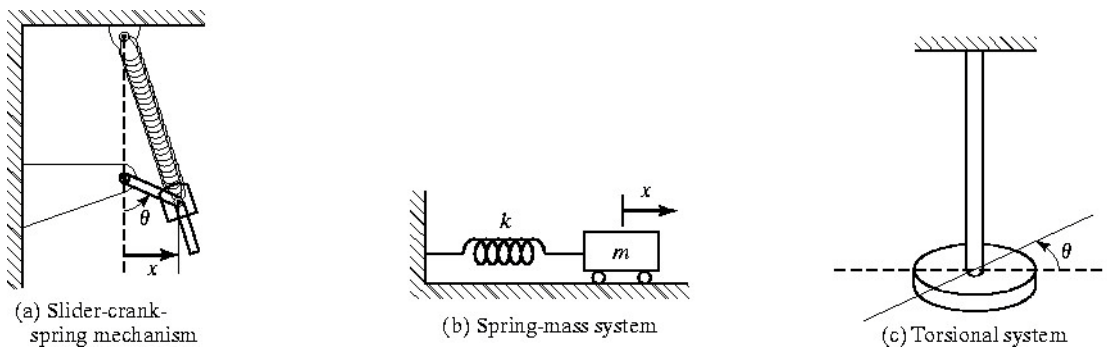


รูปที่ 2-8 แผนผังตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือน

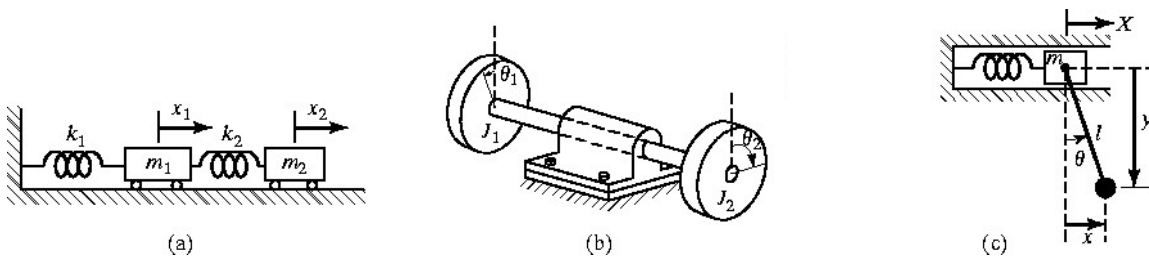
### 3.1 องศาอิสระ

องศาความเป็นอิสระ (Degree of freedom) คือตัวเลขแสดงจำนวนพิกัดที่เป็นอิสระต่อกันที่น้อยที่สุด ที่สามารถใช้อธิบายตำแหน่งของส่วนต่างๆ ของระบบได้ ที่เวลาใดๆ รูปที่ 2-9 ถึงรูปที่ 2-12 แสดงระบบที่มีองศาความเป็นอิสระต่างๆ กัน

รูปที่ 2-9 แสดงระบบที่มี 1 องศาอิสระ ตำแหน่งที่แน่นอนของระบบเหล่านี้สามารถบอกได้โดยใช้ตัวแปรแสดงพิกัดเพียงตัวแปรเดียวเท่านั้น เช่น ตำแหน่งของ Slider ในกลไก Slider-crank-spring ในรูป (a) สามารถบอกได้โดยใช้พิกัด  $x$  หรือ  $\theta$  ตัวใดตัวหนึ่ง ( $x$  และ  $\theta$  ไม่เป็นอิสระต่อกัน) มวล  $m$  ในรูป (b) ก็สามารถบอกพิกัดได้โดยใช้พิกัด  $x$  เพียงตัวเดียว เช่นเดียวกับตำแหน่งของจานหมุนในรูป (c) ก็แสดงได้โดยพิกัด  $\theta$  เพียงตัวเดียวเช่นกัน



รูปที่ 2-9 ระบบที่มี 1 องศาอิสระ



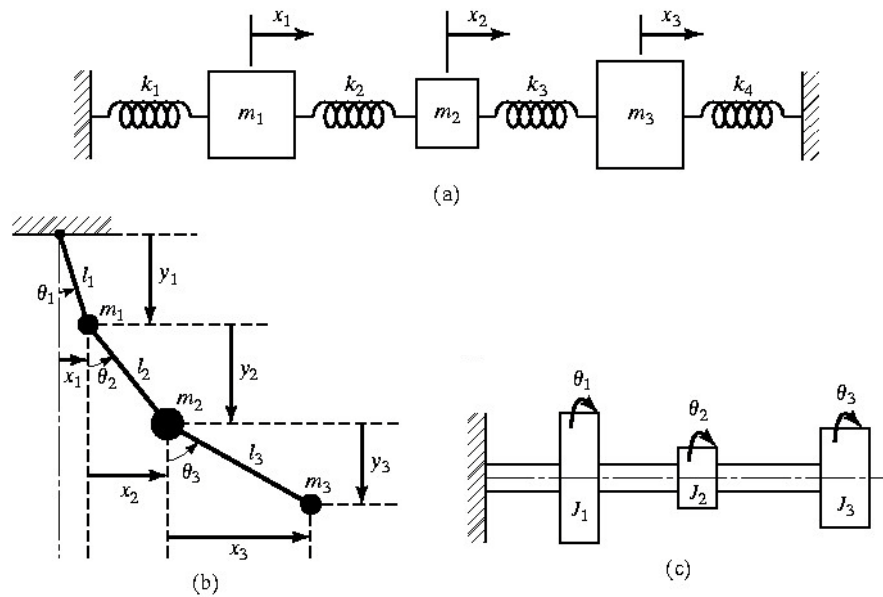
รูปที่ 2-10 ระบบที่มี 2 องศาอิสระ

รูปที่ 2-10 แสดงระบบที่มี 2 องศาอิสระ ในระบบเหล่านี้จำเป็นต้องใช้ตัวแปร 2 ตัวเพื่อบอกตำแหน่งที่แน่นอนของส่วนประกอบต่างๆ ของระบบ ในรูป (a) มวลทั้ง 2 ก้อนเชื่อมต่อกันด้วยสปริงยืดหยุ่นได้ ดังนั้นการบอกตำแหน่งของมวลจึงต้องบอกทั้ง 2 ก้อน ( $x_1$  และ  $x_2$ ) จึงจะทราบตำแหน่งที่แน่นอนทำนองเดียวกับรูป (b) จานหมุนทั้งสองจานเชื่อมต่อกันด้วยเฟลาที่ยืดหยุ่นได้ ดังนั้นการหมุนของจานทั้งคู่ก็อาจจะไม่หมุนไปพร้อมกันได้ ดังนั้นจึงต้องใช้ตัวแปร  $\theta_1$  และ  $\theta_2$  เพื่อบอกมุมที่จานแต่ละตัวหมุน ส่วนในรูป (c) จำเป็นจะต้องใช้พิกัด  $x$  บอกตำแหน่งของมวล  $m$  และใช้มุม  $\theta$  เพื่อบอกพิกัดการแกว่งของลูกตุ้ม รูปที่ 2-

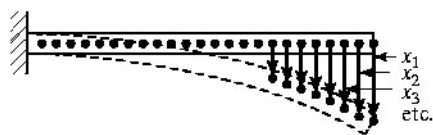
11 แสดงระบบที่มี 3 องศาอิสระ ทำนองเดียวกับระบบที่มี 2 องศาอิสระ การบอกตำแหน่งของมวล ลูกตุ้ม หรือ จาน ทั้งสามอันในแต่ละรูป ก็ต้องใช้ตัวแปรบอกตำแหน่ง 3 ตัวเช่นกัน

รูปที่ 2-12 แสดงระบบที่มีจำนวนองศาอิสระไม่จำกัด (Infinite-number-of-degrees-of-freedom system) หรือ Continuous or distributed systems ตัวอย่างที่แสดงในรูปคือคานที่ปลายด้านหนึ่งยึดแน่น จะพบว่าตำแหน่งต่างๆ อาจมีการเสียรูปที่แตกต่างกันได้ หากมีแรงกระทำรูปแบบต่างกันมากกระทำ ดังนั้น การแสดงลักษณะการเสียรูปของคานจึงต้องใช้ระบบพิกัดแบบที่มีองศาอิสระไม่จำกัด

แท้จริงแล้ววัตถุทุกชนิดที่มีการเสียรูปได้ ควรจะถูกพิจารณาเป็นวัตถุที่มีจำนวนองศาอิสระไม่จำกัด ทั้งหมด อย่างไรก็ตามการพิจารณาแบบนี้ถึงแม้ว่าจะให้ความแม่นยำสูง แต่ก็มีปริมาณการคำนวณที่ละเอียดสูงขึ้นไปตามไปด้วย ดังนั้นในการสร้างแบบจำลองการสั่นสะเทือนในหลายๆ ครั้ง จึงมักตั้งสมมุติฐานให้วัตถุที่พิจารณาเป็นวัตถุแข็งเกร็ง ไม่มีการเสียรูป ทำให้ระบบสามารถพิจารณาเป็นระบบที่มีองศาอิสระน้อยๆ ซึ่งมีการคำนวณซับซ้อนน้อยกว่าได้



รูปที่ 2-11 ระบบที่มี 3 องศาอิสระ

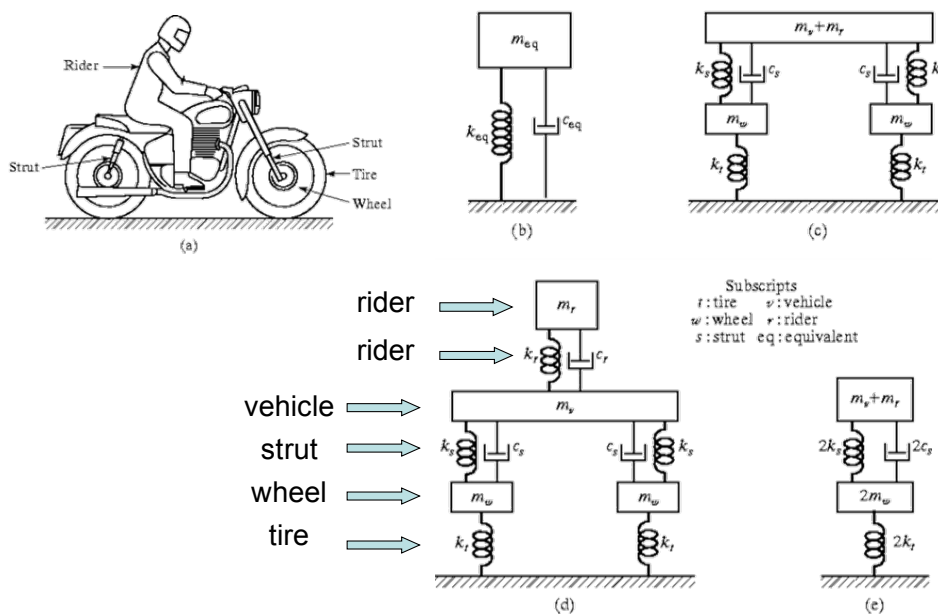


รูปที่ 2-12 ระบบที่มีจำนวนองศาอิสระไม่จำกัด

### 3.2 แบบจำลองกายภาพ

แบบจำลองกายภาพเป็นการจำลองระบบจริงที่มีความซับซ้อน ให้เป็นระบบอย่างง่าย ที่สามารถนำไปวิเคราะห์การสั่นสะเทือนต่อไปได้ โดยระบบที่จำลองจะประกอบด้วยความเฉื่อยหรือมวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ตัวอย่างของการสร้างแบบจำลองกายภาพแสดงดังต่อไปนี้

การสั่นสะเทือนของรถมอเตอร์ไซด์  
 รูปที่ 2-13 แสดงการจำลองการสั่นสะเทือนของรถมอเตอร์ไซด์ ให้กลายเป็นแบบจำลองกายภาพอย่างง่าย จะเห็นว่าการสร้างแบบจำลองกายภาพอาจทำได้หลายแบบ ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการศึกษา ความแม่นยำที่ต้องการ และความซับซ้อนในการคำนวณ



รูปที่ 2-13 ตัวอย่างการจำลองปัญหาจริงให้เป็นระบบกายภาพ

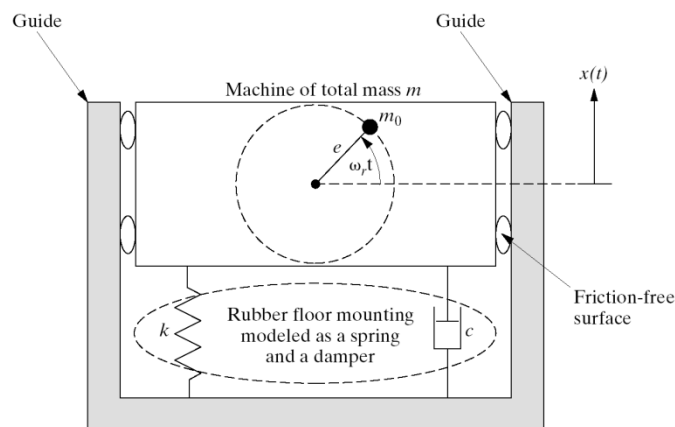
รูปที่ 2-13 (b) แสดงระบบอย่างง่ายที่สุดโดยรวมมวลของคนขับ ตัวรถ และล้อรถ เป็นมวล  $m_{eq}$  เพียงตัวเดียว ส่วนค่า  $k_{eq}$  ก็รวมผลของความยืดหยุ่นของยาง strut รวมทั้งคนขับเข้าด้วยกัน ทำนองเดียวกันค่า  $c_{eq}$  ก็เป็นผลมาจากทั้ง strut และคนขับ ระบบนี้มีจำนวนองศาอิสระเพียง 1 เท่านั้น ซึ่งพิกัดที่บอกการเคลื่อนที่ขึ้นลงแสดงถึงภาพรวมของการสั่นสะเทือนขึ้น-ลงของคนและรถทั้งหมด ถึงแม้แบบจำลองนี้จะมีข้อดีที่มีความซับซ้อนน้อย แต่ก็ไม่สามารถอธิบายได้ว่าด้านหน้ารถและด้านหลังรถจะสั่นขึ้นลงอย่างไร และไม่สามารถบอกได้ว่า strut ช่วยลดการส่งผ่านการสั่นสะเทือนได้อย่างไร ถ้าผู้วิเคราะห์ต้องการพิจารณาถึงประเด็นเหล่านี้ จะต้องปรับปรุงแบบจำลองกายภาพให้คำนึงถึงผลของการสั่นสะเทือนของล้อหน้าและหลัง และแยกผลของยางกับ strut ออกจากกัน ดังแบบจำลองในรูป (c) ซึ่งแยกล้อหน้าและหลังออกจากกัน และแยกผลของมวลล้อ  $m_w$  ออกจากมวลรวมของคนและตัวรถ หากพิจารณาว่า strut มีสัมประสิทธิ์

ความหน่วง  $c_s$  มากกว่าอย่างมากๆ ก็อาจจะละสัมพันธ์ความหน่วงของยางได้ ดังแสดงในรูป ค่า  $k_s$  และ  $k_t$  แสดงค่าคงที่สปริงของ strut และยางตามลำดับ การพิจารณาประเด็นเหล่านี้เพิ่มขึ้นมาทำให้องศาความอิสระของระบบนี้เพิ่มเป็น 4 ซึ่งเพิ่มความซับซ้อนในการคำนวณขึ้นอย่างมาก อย่างไรก็ตามในแบบจำลองในรูป (c) ก็ยังไม่สามารถอธิบายถึงการส่งผ่านการสั่นสะเทือนระหว่างตัวรถกับคนขับได้ หากต้องการอธิบายส่วนนี้จะต้องสร้างแบบจำลองให้คนขับแยกออกจากตัวรถ ดังแสดงในรูป (d) โดย  $m_r$  คือมวลของคนขับ  $m_v$  คือมวลของตัวรถ  $k_r$  และ  $c_r$  คือค่าคงที่สปริง และสัมพันธ์ความหน่วงของคนขับตามลำดับ ส่งผลให้ระบบนี้มีจำนวนองศาอิสระเพิ่มขึ้นเป็น 5 แต่ถ้าไม่ต้องการทราบผลการสั่นสะเทือนด้านหน้าและหลังของรถมอเตอร์ไซค์ แต่ต้องการทราบผลของ strut ต่อการส่งผ่านการสั่นสะเทือนไปที่คนกับรถ ก็อาจจะสร้างแบบจำลองแบบในรูป (e) ซึ่งมีองศาความอิสระ 2 ก็ได้ โดยรวมมวลล้อหน้าและหลังเข้าด้วยกัน และรวมค่าคงที่สปริงและค่าความหน่วงด้านหน้าและหลังเข้าด้วยกัน

จะเห็นว่าแบบจำลองต่างๆ ที่สร้างขึ้นมีจำนวนองศาอิสระต่างกัน จำนวนองศาอิสระที่เพิ่มมากขึ้นส่งผลอย่างมากต่อความซับซ้อนในการคำนวณ ดังนั้นในการวิเคราะห์โดยทั่วไปมักจะเลือกแบบจำลองที่มีจำนวนองศาอิสระน้อยที่สุดที่ยังสามารถตอบวัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์ได้

### เครื่องซักผ้า

รูปที่ 2-14 แสดงแบบจำลองกายภาพของเครื่องซักผ้าแบบฝาหน้า ที่แกนหมุนของถังซักผ้าอยู่ในแนวนอนขนานกับพื้นโลก จะเห็นว่าถังเครื่องซักผ้าถูกจำลองด้วยกล่องมวล  $m$  ส่วนของยางที่ติดตั้งกับฐานถูกจำลองด้วยสปริงและตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ส่วนแรงที่เกิดจากการหมุนปั่นผ้า ถูกรวมด้วยแรงไม่สมดุลที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของมวล  $m_0$  โดย  $e$  และ  $\omega_r t$  จะสัมพันธ์กับขนาดของถังซักผ้า และความเร็วรอบหมุนในการซักตามลำดับ อย่างไรก็ตามแบบจำลองนี้จะพิจารณาการสั่นขึ้นลงของถังซักผ้าเพียงอย่างเดียว โดยไม่ได้คำนึงถึงการสั่นสะเทือนในทิศทางด้านข้าง



รูปที่ 2-14 แบบจำลองกายภาพของเครื่องซักผ้าแบบฝาหน้า

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า การสร้างแบบจำลองของระบบการสั่นสะเทือนไม่ได้มีรูปแบบที่ถูกต้องเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น แต่สามารถสร้างได้หลากหลายรูปแบบ ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์และสมมุติฐานต่าง ๆ ที่ใช้ แบบจำลองที่ซับซ้อนอาจจะสามารถทำนายพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนได้ถูกต้องแม่นยำกว่า แต่ก็ต้องใช้การคำนวณที่ซับซ้อนกว่าเช่นกัน ดังนั้นในการสร้างแบบจำลองของระบบการสั่นสะเทือนจะต้องพิจารณาประเด็นต่าง ๆ ทั้งวัตถุประสงค์ที่ต้องการ สมมุติฐานที่สมเหตุสมผล ความซับซ้อนของแบบจำลอง และวิธีการคำนวณที่จะใช้แก้ปัญหาประกอบกันด้วย

#### 4. สมการการเคลื่อนที่

ในหัวข้อที่ 3 ได้กล่าวถึงขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือน และได้กล่าวถึงการสร้างแบบจำลองกายภาพ ซึ่งจำลองระบบจริงให้เป็นระบบอย่างง่ายที่ประกอบด้วยมวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ในหัวข้อนี้จะแสดงถึงการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสมการหรือระบบสมการที่แสดงการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นสะเทือนนั้นๆ จากแบบจำลองกายภาพ เนื่องจากสมการที่สร้างขึ้นจะใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ จึงอาจเรียกสมการที่สร้างขึ้นว่า สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion) โดยทั่วไปสมการการเคลื่อนที่ที่สร้างขึ้นโดยอาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน หรือโดยอาศัยหลักการของพลังงาน

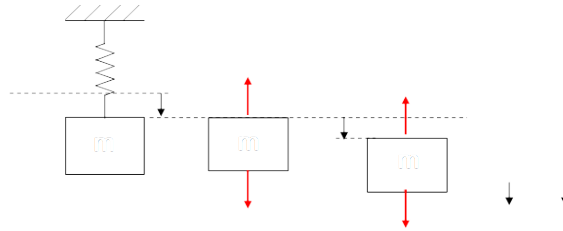
##### 4.1 การสร้างสมการการเคลื่อนที่โดยอาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

การสร้างสมการการเคลื่อนที่โดยวิธีนี้มีขั้นตอนสรุปได้ดังนี้

1. พิจารณาจำนวนองศาความอิสระ และกำหนดพิกัดที่จะใช้และทิศทางบวกของพิกัดนั้นๆ โดยพิกัดที่กำหนดจะต้องวัดเทียบกับแกนหยุดนิ่ง ไม่ติดไปกับวัตถุที่เคลื่อนที่
2. เขียนความสัมพันธ์ของรูปร่าง และการเคลื่อนที่
3. เขียน Free body diagram (FBD) และสร้างสมการโดยใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน ซึ่งอาจเป็นสมการนิวตันสำหรับปัญหาเชิงเส้น  $\sum F = m\ddot{x}$  หรือเชิงมุม  $\sum T = J\ddot{\theta}$  โดยจำนวนสมการที่จำเป็นต้องสร้างจะเท่ากับจำนวนองศาอิสระของระบบ
4. รวมสมการทั้งหมดเข้าด้วยกัน

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการสร้างสมการการเคลื่อนที่ เพื่อให้เข้าใจถึงขั้นตอนต่างๆ ชัดเจนยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 2-3 ระบบที่ประกอบด้วยมวลและสปริง



ระบบที่ประกอบด้วยมวลและสปริง

1. ระบบในรูปเป็นระบบที่มีองศาความอิสระ 1 (1-dof) กำหนดพิกัด  $x$  โดยวัดจากตำแหน่งสมดุลของวัตถุ โดยมีทิศทางชี้ลงด้านล่างเป็นทิศทางบวก
2. เมื่อกำหนดพิกัด  $x$  ตามข้อ 1 จะได้ความเร็วและความเร่ง เป็น  $\dot{x}$  และ  $\ddot{x}$  ตามลำดับ
3. สมมุติให้วัตถุเคลื่อนที่ในทิศทางที่การเคลื่อนที่  $x$  เป็นบวก และเขียน FBD จะได้ FBD ดังแสดงในรูป จาก FBD จะสามารถเขียนสมการแสดงการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

ที่สมดุล จาก 
$$\left[ \sum F = 0 \right] \quad mg - k\Delta = 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad mg = k\Delta$$

ขณะเคลื่อนที่ จาก 
$$\left[ \sum F = ma \right] \quad mg - k(\Delta + x) = m\ddot{x}$$

4. แทนความสัมพันธ์ในสมการที่สมดุลลงในสมการขณะการเคลื่อนที่จะได้สมการการเคลื่อนที่ดังนี้ 
$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{ANS}$$

Note

I. ในตัวอย่างนี้ อาจจะสมมุติให้พิกัด  $x$  ชี้ขึ้นด้านบนก็ได้ และเพื่อไม่ให้เกิดความสับสนในการกำหนดทิศทาง จึงขอแนะนำให้สมมุติวัตถุเคลื่อนที่ตามทิศทางบวกของ  $x$  สำหรับทิศทางของแรงจะต้องพิจารณาด้วยว่าขณะนั้นสปริงยืดหรือหด โดย

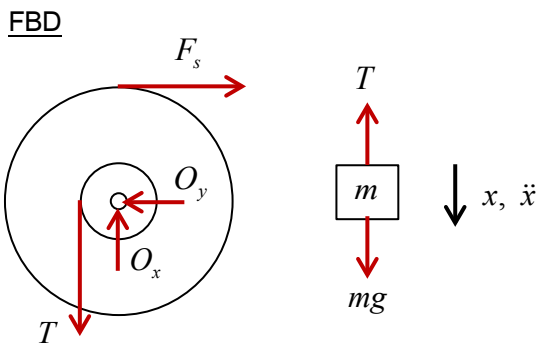
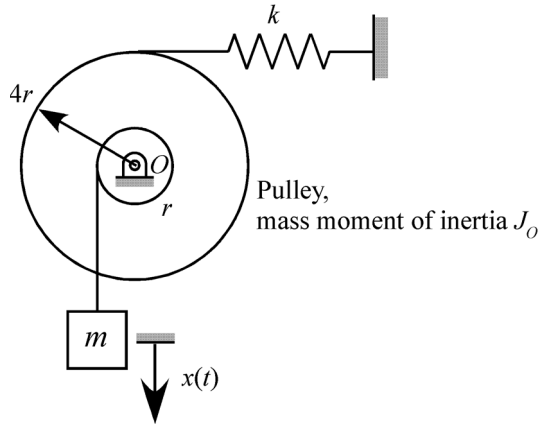
1. ในกรณีที่  $x$  หดมากกว่าระยะ  $\Delta$  ที่เป็นระยะยืดจากสมดุล สปริงจะหด ส่งผลให้เกิดแรงสปริงดึงมวลลงด้านล่าง
2. ในกรณีที่  $x$  หดน้อยกว่าระยะ  $\Delta$  สปริงจะยังยืดอยู่ ส่งผลให้เกิดแรงสปริงดึงมวลขึ้นด้านบน

II. กรณีที่มีแรงภายนอก  $F(t)$  มากระทำกับมวล  $m$  สมการขณะเคลื่อนที่จะกลายเป็น

$$mg - k(\Delta + x) + F(t) = m\ddot{x}$$

และจะได้สมการการเคลื่อนที่เป็น 
$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

จะเห็นว่าทางด้านซ้ายมือของสมการจะเหมือนกับกรณีที่ไม่มีแรงมากระทำ คือจะแสดงลักษณะของระบบว่ามีมวล ความแข็งสปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน (ถ้ามี) เท่าไร ส่วนด้านขวาของสมการจะแสดงถึงแรงภายนอกที่กระทำกับระบบ



ตัวอย่างที่ 2-4 เขียนสมการการเคลื่อนที่ของระบบที่แสดงในรูป โดยกำหนดให้รอกตัวเล็กมีรัศมี  $r$  ส่วนตัวใหญ่มีรัศมี  $4r$  รอกทั้งระบบหมุนไปด้วยกันและมีโมเมนต์ความเฉื่อย  $J_o$

ถึงแม้ว่าระบบนี้จะมีมวล 2 ก้อน อย่างไรก็ตามการเคลื่อนที่ของมวล  $m$  กับรอกมีความเกี่ยวเนื่องกัน ทำให้เมื่อบอกตำแหน่งของมวล  $m$  จะทราบการเคลื่อนที่ของรอกได้ ดังนั้นระบบนี้จึงเป็นระบบที่มีองศาอิสระ 1 หรือ 1-dof เมื่อสมมุติให้มวลเคลื่อนที่ไปทางบวก  $x$  รอกจะหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกา ในสภาวะนี้จะเขียน FBD ได้ดังรูป

ที่สมจุด จาก  $[\sum M_o = 0]$   $T_o r - F_{s0}(4r) = 0$   
 $T_o r - (k\Delta)(4r) = 0$  (1)

$[\sum F_x = 0]$   $T_o - mg = 0$  (2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้  $mg = 4k\Delta$  (3)

เมื่อมีการเคลื่อนที่ ระยะยืดสปริงจะเปลี่ยนจาก  $\Delta$  เป็น  $\Delta + 4r\theta$

จาก  $[\sum F_x = m\ddot{x}]$   $mg - T = m\ddot{x}$  (4)

$[\sum M_o = J_o\ddot{\theta}]$   $Tr - k(\Delta + 4r\theta)(4r) = J_o\ddot{\theta}$  (5)

แทน  $T$  จากสมการ (4) และความสัมพันธ์ในสมการ (3) ลงสมการ (5) จะได้

$$(mg - m\ddot{x})r - k(\Delta + 4r\theta)(4r) = J_o\ddot{\theta}$$

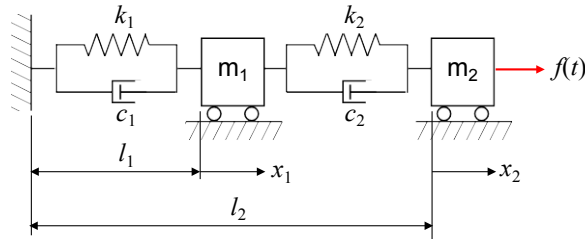
~~$$4k\Delta r - m\ddot{x}r - 4k\Delta r - 16r^2k\theta = J_o\ddot{\theta}$$~~

$$J_o\ddot{\theta} + m\ddot{x}r + 16r^2k\theta = 0$$
 (6)

แต่  $x = r\theta$  ดังนั้น จาก (6) จะได้  $(J_o + mr^2)\ddot{x} + 16r^2kx = 0$

ANS

ตัวอย่างที่ 2-5 ระบบที่ประกอบด้วยมวลสองก้อนดังแสดงในรูป



1. ระบบที่แสดงในรูปประกอบด้วยมวล 2 ก้อน ที่การเคลื่อนที่ของแต่ละก้อนเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นการบอกตำแหน่งของระบบ จึงต้องบอกตำแหน่งของมวลทั้งสองก้อน ระบบนี้จึงเป็นระบบที่มีองศาอิสระ 2 หรือ 2-dof และมีสมการการเคลื่อนที่ 2 สมการ
2. กำหนดการเคลื่อนที่ของมวล  $m_1$  และ  $m_2$  เป็น  $x_1$  และ  $x_2$  ตามลำดับ และมีทิศทางบวกชี้ไปทางขวามือดังแสดงในรูป
3. สมมุติให้มวลทั้งสองก้อนเคลื่อนที่ไปในทิศทางบวก และ  $x_2 > x_1$  จะได้ว่าแรงในสปริงที่กระทำระหว่างมวล  $m_1$  และ  $m_2$  จะเป็นแรงดึง ดังนั้นจะเขียน FBD และสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

FBD

$$\left[ \sum F_x = ma_x \right]$$

	มวล $m_1$	$k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 = m_1\ddot{x}_1$
		$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$
	มวล $m_2$	$f(t) - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2\ddot{x}_2$
		$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = f(t)$

เขียนเป็นรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

ANS

หรือ  $M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$

โดย **M** คือ “mass or inertia matrix”

**C** คือ “damping matrix”

**K** คือ “stiffness matrix”

**x** คือ position vector

**F** คือ input vector

#### 4.2 การสร้างสมการการเคลื่อนที่โดยอาศัยหลักการของพลังงาน

สมการการเคลื่อนที่ที่สามารถสร้างได้โดยอาศัยหลักการของพลังงาน ในที่นี้จะกล่าวถึงการใช้หลักการพลังงานสำหรับระบบที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำและไม่มีการสูญเสียพลังงาน (ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะท้อน) ซึ่งเป็นกรณีที่ง่ายที่สุดเท่านั้น

สำหรับระบบที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ และไม่มีการสูญเสียพลังงาน จะได้ว่าพลังงานทั้งหมดของระบบจะเป็นผลรวมของพลังงานศักย์  $U$  และพลังงานจลน์  $T$  และผลรวมนี้จะมีค่าคงที่ ความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$T + U = \text{Constant} \quad (2-18)$$

หรือ 
$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \quad (2-19)$$

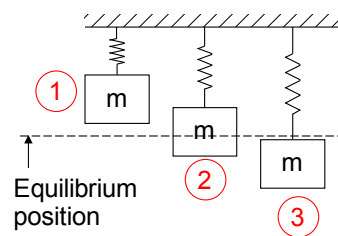
พิจารณาระบบที่ประกอบด้วยสปริงและมวล ดังแสดงในรูปที่ 2-15

1. ที่ตำแหน่ง 1 ซึ่งเป็นตำแหน่งสูงสุด และตำแหน่ง 3 ซึ่งเป็นตำแหน่งต่ำสุด ทั้งสองตำแหน่งนี้สปริงยืดเต็มที่ จึงมีพลังงานศักย์มากที่สุด ( $U_1 = U_3 = U_{\max}$ ) ส่วนพลังงานจลน์นั้น เนื่องจากตำแหน่งที่ 1 และตำแหน่งที่ 3 มวลไม่มีการเคลื่อนที่ดังนั้นพลังงานจลน์จึงเป็นศูนย์ ( $T = 0$ )

2. ที่ตำแหน่ง 2 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่สมดุลและเป็นตำแหน่งอ้างอิง ที่ตำแหน่งนี้สปริงไม่มีการยืดหด ดังนั้นพลังงานศักย์จึงมีค่าเป็น 0 ( $U = 0$ ) พลังงานทั้งหมดของตำแหน่งนี้จึงเป็นพลังงานจลน์ ( $T = T_{\max}$ )

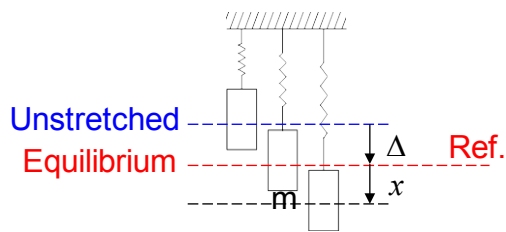
เมื่อแทนความสัมพันธ์ของพลังงานในข้อ 1 และ 2 ลงในสมการที่ (2-19) จะได้

$$U_{\max} = T_{\max} \quad (2-20)$$



รูปที่ 2-15 ระบบที่ประกอบด้วยมวลและสปริง

ตัวอย่างที่ 2-6 ระบบที่ประกอบด้วยมวลและสปริง



เพื่อไม่ให้เกิดความสับสน จะสมมติให้มวลเคลื่อนที่ตามทิศทาง  $+x$  ซึ่งต่ำลงกว่าจุดอ้างอิง และทำให้สปริงยืดออก  $\Delta+x$

พลังงานศักย์ของระบบนี้แบ่งออกเป็นสองส่วนคือพลังงานศักย์โน้มถ่วงและพลังงานศักย์สปริง ดังนี้

$$U_{Spring} = \frac{1}{2}k(\Delta + x)^2$$

$$U_{Grav} = -mgx$$

พลังงานจลน์หาได้จาก  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$[T + U = const.] \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}k(\Delta + x)^2 = const.$$

Differentiating  $m\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x} + k(\Delta + x)\dot{x} = 0$

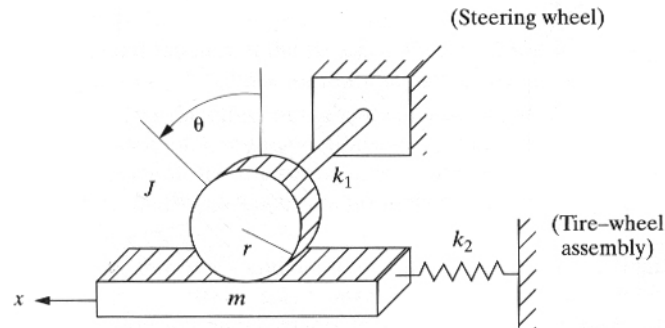
$$(m\ddot{x} - mg + k\Delta + kx)\dot{x} = 0$$

เนื่องจากที่สมดุล  $mg = k\Delta$  และที่ตำแหน่งทั่วไป  $\dot{x} \neq 0$

ดังนั้นจะได้ EOM  $m\ddot{x} + kx = 0$

ANS

ตัวอย่างที่ 2-7 Derive the EOM of an airplane's steering-gear mechanism for the nose wheel of its landing gear. The mechanism is modeled as the single-degree-of-freedom system illustrated in the figure. [Inman/1.49]



พลังงานจลน์ของระบบนี้แบ่งออกเป็นสองส่วนคือพลังงานจลน์จากการหมุนเฟืองที่มีค่าโมเมนต์ความเฉื่อย  $J$  และจากการเคลื่อนที่ของ rack มวล  $m$  ดังนี้

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

พลังงานศักย์ของระบบแบ่งออกเป็นสองส่วนคือพลังงานศักย์จากการบิดของเฟลาที่มีค่า  $k = k_1$  และพลังงานศักย์สปริงของสปริงที่มีค่า  $k = k_2$

$$U = \frac{1}{2} k_1 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2$$

$$[T + U = const.] \quad \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k_1 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 = const.$$

$$\text{Differentiating} \quad J \ddot{\theta} + m \ddot{x} + k_1 \theta \dot{\theta} + k_2 x \dot{x} = 0$$

$$\text{จากความสัมพันธ์} \quad \theta = -\frac{x}{r}, \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{r}, \quad \ddot{\theta} = -\frac{\ddot{x}}{r}$$

$$\text{แทนในสมการด้านบนจะได้} \quad J \left( -\frac{\ddot{x}}{r} \right) \left( -\frac{\dot{x}}{r} \right) + m \ddot{x} + k_1 \left( -\frac{x}{r} \right) \left( -\frac{\dot{x}}{r} \right) + k_2 x \dot{x} = 0$$

$$\text{จัดรูปได้} \quad \dot{x} \left[ \left( m + \frac{J}{r^2} \right) \ddot{x} + \left( \frac{k_1}{r^2} + k_2 \right) x \right] = 0$$

$$\dot{x} \neq 0 \text{ ในตำแหน่งต่างๆ ไป ดังนั้น} \quad \left( m + \frac{J}{r^2} \right) \ddot{x} + \left( \frac{k_1}{r^2} + k_2 \right) x = 0$$

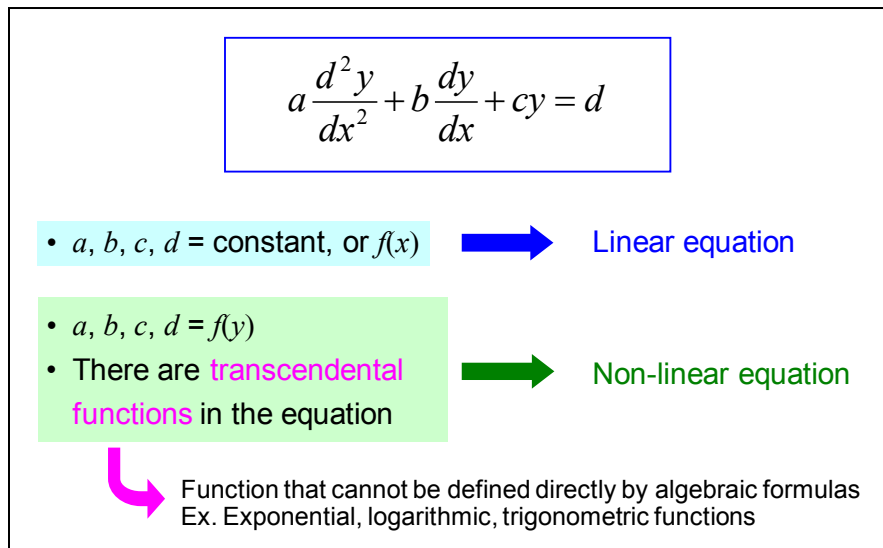
$$\text{หรือ} \quad (J + mr^2) \ddot{x} + (k_1 + k_2 r^2) x = 0$$

ANS

## 5. การประมาณเชิงเส้น (Linearization)

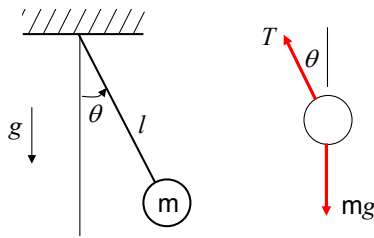
สมการการเคลื่อนที่ที่สร้างขึ้นจากหัวข้อที่ผ่านมาจะอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับ 2 เมื่อแก้สมการ หรือระบบสมการที่แสดงการเคลื่อนที่แล้ว จะทำให้ทราบว่าจะระบบที่ต้องการศึกษามีลักษณะการสั่นสะเทือนอย่างไร อย่างไรก็ตามการแก้สมการอนุพันธ์อันดับ 2 นั้น จะสามารถทำได้ง่ายหากสมการนั้นเป็นสมการเชิงเส้น (Linear equation) แต่ถ้าสมการที่ได้ไม่เป็นสมการเชิงเส้น (Non-linear equation) การแก้สมการจะทำได้ยาก หรืออาจทำไม่ได้เลย นอกจากนี้หลักการ Superposition ซึ่งใช้ได้ในระบบเชิงเส้น ยังใช้ไม่ได้ในสมการที่ไม่ใช่เชิงเส้นอีกด้วย

รูปแบบสมการที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นสรุปอยู่ในรูปที่ 2-16 สำหรับสมการอนุพันธ์อันดับสองดังรูปแบบที่แสดงในรูปที่ 2-16 นั้น หากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตาม เป็นค่าคงที่หรือเป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้น จะถือว่าสมการนั้นเป็นสมการเชิงเส้น แต่ถ้าหากว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรตามแล้ว จะถือว่าสมการนั้นไม่เป็นสมการเชิงเส้น และถ้าหากว่าในสมการอนุพันธ์มีพจน์ที่เป็นฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental function) อยู่ เช่นมีฟังก์ชัน exponential, logarithmic หรือฟังก์ชันตรีโกณมิติอยู่ ก็ถือว่าไม่เป็นสมการเชิงเส้นเช่นกัน



รูปที่ 2-16 สมการเชิงเส้นและสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น

พิจารณาระบบต่อไปนี้



รูปที่ 2-17 การสั่นสะเทือนของลูกตุ้ม

ระบบดังรูปสามารถหาสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \sum M = J\ddot{\theta} & \qquad - mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta & = 0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสมการที่ได้มีฟังก์ชันตรีโกณมิติอยู่ สมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนี้จึงไม่ใช่สมการแบบเชิงเส้น การแก้สมการเพื่อหาคำตอบจึงทำได้ยาก และไม่สามารถใช้หลักการ Superposition ได้ เพื่อให้การแก้ปัญหาของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น เช่นที่พบในระบบการสั่นสะเทือนของลูกตุ้มนี้ทำได้ง่ายขึ้น สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะถูกประมาณให้เป็นสมการเชิงเส้น โดยใช้หลักการของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ดังนี้

อนุกรมเทย์เลอร์  
ฟังก์ชัน  $f(x)$  ใดๆ ซึ่งมีอนุพันธ์ทุกอันดับที่จุด  $x_0$  จะสามารถเขียนฟังก์ชันนั้นให้อยู่ในรูปผลบวกของอนุกรมอนันต์ ซึ่งเรียกว่าอนุกรมเทย์เลอร์ได้ดังสมการ

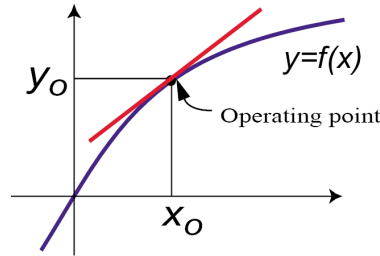
$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (2-21)$$

ในกรณีที่  $x_0$  มีค่าแตกต่างจาก  $x$  มากๆ ค่าของ  $f(x)$  จะเท่ากับผลบวกของอนุกรมทางด้านขวามือซึ่งมีจำนวนพจน์เป็นอนันต์ หรือถ้าต้องการค่าโดยประมาณก็อาจจะต้องใช้พจน์ทางด้านขวามือจำนวนมากเพื่อจะทำให้ค่าทางด้านขวามือมีค่าใกล้เคียงกับ  $f(x)$  แต่ถ้าหากเลือกจุด  $x_0$  ให้มีค่าใกล้ๆ กับจุด  $x$  ที่ต้องการประมาณค่า จะได้ว่าพจน์หลังๆ ทางด้านขวามือของอนุกรมเทย์เลอร์จะมีค่าน้อย จนสามารถละทิ้งได้ การประมาณค่า  $f(x)$  จึงอาจจะใช้พจน์ทางด้านขวามือของสมการที่ (2-21) เพียงแค่ 2 พจน์เท่านั้น ก็สามารถประมาณค่าอย่างแม่นยำได้ ดังสมการ

$$f(x) \cong f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) \quad (2-22)$$

การประมาณค่าดังแสดงในสมการที่ (2-22) จะเรียกว่า First-order approximation รูปที่ 2-18 แสดงถึงการประมาณค่าตามสมการที่ (2-22) โดยจุด  $x_0$  (Operating point) เป็นจุดที่ทราบค่า  $f(x_0)$  หากต้องการทราบค่าของ  $f(x)$  ที่จุด  $x$  ใกล้ๆ จะทำได้โดยนำค่า  $f(x_0)$  หรือ  $y_0$  ในรูปมาบวกด้วยผลคูณระหว่างค่าความชันของเส้นสัมผัสโค้ง ซึ่งก็คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน กับระยะห่างระหว่างจุด  $x$  กับ  $x_0$  เนื่องจาก

การประมาณค่าแบบนี้เป็นการประมาณค่าโดยใช้เส้นตรงที่สัมผัสกับจุด  $x_0$  เป็นตัวประมาณ จึงเรียกการประมาณเช่นนี้ว่าการประมาณเชิงเส้น (Linearization) การประมาณแบบนี้จะทำได้แม่นยำ ก็ต่อเมื่อเป็นการประมาณที่จุด  $x_0$  ใกล้กับจุด  $x$  เท่านั้น



รูปที่ 2-18 การประมาณแบบเชิงเส้น

เพื่อให้เข้าใจถึงการประมาณเชิงเส้น พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ฟังก์ชัน  $y = \sin(x)$

จาก  $f(x) \cong f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$

ดังนั้น  $\sin(x) \cong \sin(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{d(\sin(x))}{dx} \right|_{x=x_0}$

$$\sin(x) \cong \sin(x_0) + (x - x_0)\cos(x_0)$$

ถ้าให้  $x_0 = 0$  จะได้  $\sin(x) \cong \sin(0) + (x - 0)\cos(0) = x$   
ซึ่งหมายถึง  $\sin(x) \cong x$  เมื่อ  $x$  มีค่าใกล้ 0

ถ้าให้  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  จะได้  $\sin(x) \cong \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + (x - \frac{\pi}{2})\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$   
ซึ่งหมายถึง  $\sin(x) \cong 1$  เมื่อ  $x$  มีค่าใกล้  $\frac{\pi}{2}$

ดังนั้นสำหรับสมการการแกว่งของลูกตุ้ม  $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right)\sin\theta = 0$

เมื่อทำการประมาณเชิงเส้นเมื่อมุม  $\theta$  มีค่าน้อยๆ ( $\theta \rightarrow 0$ ) จะได้  $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0$

ซึ่งหมายถึงหากลูกตุ้มแกว่งเบาๆ ที่มุมเล็กๆ จะสามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มได้โดยประมาณด้วย

สมการ  $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0$  ซึ่งเป็นสมการแบบเชิงเส้น

## 6. สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงหลักการพื้นฐาน และส่วนประกอบที่สำคัญของระบบการสั่นสะเทือน ซึ่งประกอบด้วย มวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน เมื่อทราบถึงส่วนประกอบที่สำคัญแล้ว ในบทนี้ได้กล่าวถึงวิธีการในการแก้ปัญหาการสั่นสะเทือนในภาพรวม ตั้งแต่การสร้างแบบจำลองทางกายภาพอย่างง่ายจากระบบการสั่นสะเทือนจริงๆ ที่มีความซับซ้อน ซึ่งการสร้างแบบจำลองต้องคำนึงถึงความแม่นยำตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการศึกษา รวมถึงความซับซ้อนในการคำนวณประกอบกัน โดยระบบที่มีองศาอิสระมากมักจะมีความแม่นยำมาก แต่ก็มีความยุ่งยากในการแก้สมการเพิ่มมากขึ้น เมื่อได้แบบจำลองทางกายภาพแล้ว ขั้นตอนต่อมาของการแก้ปัญหาคือ การสร้างสมการการเคลื่อนที่ ซึ่งสามารถสร้างได้โดยใช้สมการการเคลื่อนที่ของนิวตัน หรืออาจใช้วิธีการพลังงานก็ได้ สมการที่ได้จะอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับสอง ถ้าสมการการเคลื่อนที่เป็นสมการเชิงเส้นจะสามารถแก้สมการได้ง่าย และสามารถให้หลักการของ Superposition ในการคำนวณได้ แต่ถ้าหากสมการไม่เป็นสมการเชิงเส้น ก็สามารถประมาณเป็นสมการเชิงเส้นได้ โดยใช้การประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 1