บทที่ 3
การสั่นสะเทือนแบบอิสระ

1. บทนำ

การสั่นสะเทือนแบบอิสระ (Free vibration) หมายถึงการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นเนื่องจากมีแรง หรือแรงบิดมารบกวนสภาวะสมดุลในตอนแรกทำให้เริ่มสั่นสะเทือน แต่ขณะที่สั่นสะเทือนเป็นการสั่นอย่างอิสระไม่มีแรงหรือแรงบิดภายนอกใดมากระทำต่อระบบเลย ตัวอย่างของการสั่นสะเทือนแบบอิสระ ได้แก่ การสั่นของลูกตุ้มนาฬิกา การแกว่งของชิงช้า เป็นต้น (ในตัวอย่างเหล่านี้จะพิจารณาให้แรงต้านทานอากาศ ซึ่งกระทำตลอดเวลาที่วัตถุสั่นสะเทือนมีค่าน้อย และละไว้จากการวิเคราะห์) สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงการสั่นสะเทือนแบบอิสระของระบบที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับหนึ่งเท่านั้น สำหรับปัญหาการสั่นสะเทือนที่มีองศาความเป็นอิสระมากกว่าหนึ่งนั้นจะกล่าวถึงในบทต่อๆ ไป โดยจะเริ่มจากสมการการเคลื่อนที่ของการสั่นสะเทือนแบบอิสระ รูปแบบผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง และจะได้กล่าวถึงลักษณะการสั่นสะเทือนแบบอิสระของระบบที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และไม่มีการสั่นสะเทือนต่อไป

2. สมการการเคลื่อนที่ของการสั่นแบบอิสระ

จากที่กล่าวมาในบทที่ 2 (หัวข้อที่ 4 และตัวอย่างที่ 2-3) จะได้ว่าสมการการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นสะเทือนใดๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังสมการ

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \tag{3-1}$$

โดยทางด้านซ้ายมือของสมการจะเป็นส่วนที่แสดงถึงลักษณะของระบบ ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลของมวล ตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และค่าคงที่ของสปริง ส่วนทางด้านขวามือจะแสดงถึงแรง (หรือแรงบิด) ภายนอกที่กระทำกับระบบ สำหรับการสั่นอย่างอิสระ เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบขณะสั่นทางด้านขวามือจึงมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (3-1) จะกลายเป็น

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{3-2}$$

ลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบจะสามารถทราบได้โดยการแก้สมการอนุพันธ์ (3-2) ในหัวข้อต่อไปจะทบทวนถึงผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ที่มีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการที่ (3-2)

<u>ทบทวนการแก้สมการอนุพันธ์อันดับสอง</u>

พิจารณาสมการอนุพันธ์อันดับสองที่มีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ (3-2) ดังแสดงในสมการ

$$a_1 \frac{d^2y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = 0 \tag{3-3}$$

การแก้สมการ (3-3) ในขั้นแรกจะต้องหาผลเฉลยของสมการช่วย (Auxiliary equation) เสียก่อน โดยสมการช่วยจะเป็นสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เหมือนสมการที่ (3-3) และแทนอนุพันธ์อันดับสอง ($\frac{d^2y}{dx^2}$) ด้วยตัว

แปรกำลังสอง (r^2) แทนอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ($\frac{dy}{dx}$) ด้วยตัวแปรกำลังหนึ่ง (r) และแทนตัวแปร y ในสมการที่ (3-3) ด้วยหนึ่ง ดังแสดงในสมการ

$$a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0 \tag{3-4}$$

ให้ r_1 และ r_2 เป็นคำตอบของสมการช่วย (3-4) ค่าของ r_1 และ r_2 มีโอกาสเป็นไปได้ 3 กรณีคือ 1) r_1 และ r_2 เป็นจำนวนจริงที่มีค่าไม่เท่ากัน 2) r_1 และ r_2 เป็นจำนวนจริงที่มีค่าเท่ากัน และ 3) r_1 และ r_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน สำหรับคำตอบของสมการอนุพันธ์ (3-3) ก็จะมีรูปแบบแตกต่างกัน 3 รูปแบบ ตามรูปแบบคำตอบ r_1 และ r_2 ของสมการช่วยดังนี้

<u>กรณีที่ 1: r_1 และ r_2 เป็นจำนวนจริงที่มีค่าไม่เท่ากัน ($r_1 \neq r_2$)</u>

ในกรณีนี้จะได้คำตอบของสมการอนุพันธ์ (3-3) เป็น

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{3-5}$$

โดย C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่

<u>กรณีที่ 2: r_1 และ r_2 เป็นจำนวนจริงที่มีค่าเท่ากัน ($r_1 = r_2$)</u>

ในกรณีนี้จะได้คำตอบของสมการอนุพันธ์ (3-3) เป็น

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x} \tag{3-6}$$

โดย C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่

<u>กรณีที่ 3: r_1 และ r_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน</u>

ให้ $r_1 = a + bi$ เนื่องจากคำตอบเป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่าจะได้ว่าคอนจูเกตของ r_1 จะเป็นคำตอบด้วย ดังนั้น $r_2 = a - bi$ ในกรณีนี้จะได้คำตอบของสมการอนุพันธ์ (3-3) เป็น

$$y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x} \tag{3-7}$$

โดย C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่

จากสมการเอกลักษณ์ของออยเลอร์ $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

แทนในสมการ (3-7) และจัดรูปจะได้

$$y = e^{ax}(A_1 \cos(bx) + A_2 \sin(bx)) \tag{3-8}$$

หรือ

$$y = Ae^{ax} \sin(bx + \phi) \tag{3-9}$$

โดย A_1, A_2 หรือ A, ϕ เป็นค่าคงที่

รูปแบบของสมการผลลัพธ์ต่างๆ ข้างต้น จะแสดงรูปแบบต่างๆ ของการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นสะเทือน ดังจะกล่าวถึงการสั่นสะเทือนแบบต่างๆ ในหัวข้อต่อๆ ไป

3. การสั่นแบบอิสระของระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

จากรูปแบบสมการของการสั่นอย่างอิสระในสมการที่ (3-2) หากไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน จะเขียนได้เป็น

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad (3\text{-}10)$$

ลักษณะการสั่นสะเทือนในกรณีนี้หาได้จากการแก้สมการอนุพันธ์ (3-10) ในกรณีนี้สมการช่วยคือ

$$mr^2 + k = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

ซึ่งจะได้คำตอบของสมการช่วยเป็น $\pm i\left(\sqrt{k/m}\right)$

เนื่องจากค่าความแข็งสปริง k และมวล m เป็นจำนวนบวกเสมอ ดังนั้นคำตอบของสมการ (3-11) จึงเป็นจำนวนจินตภาพเสมอ จากสมการที่ (3-8) และ (3-9) จะได้ว่าคำตอบของสมการอนุพันธ์ (3-10) ซึ่งแสดงถึงการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน แสดงได้ดังสมการ

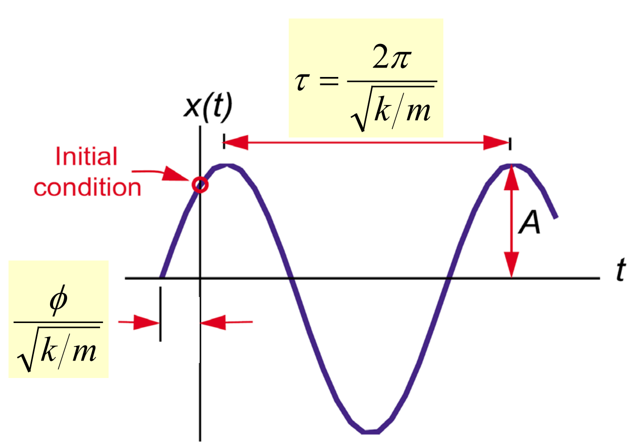
$$x = A_1 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + A_2 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \qquad (3\text{-}12)$$

หรือ

$$x = A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) \qquad (3\text{-}13)$$

โดย A_1, A_2 หรือ A, ϕ เป็นค่าคงที่ซึ่งได้จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (initial condition) ของการสั่นสะเทือน เช่น ตอนเริ่มสั่น ตำแหน่งของมวล x อยู่ที่ใด หรือมวลเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าใด การหาค่าคงที่เหล่านี้จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อๆ ไป สำหรับในสมการที่ (3-13) ตัวแปร A แสดงถึงขนาดของการสั่นสะเทือน ส่วน ϕ แสดงถึงเฟสของการสั่นสะเทือน

รูปที่ 3-1 แสดงกราฟการสั่นสะเทือนของระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ซึ่งเขียนตามรูปแบบสมการที่ (3-13) เนื่องจากรูปแบบของสมการเป็นฟังก์ชั่นไซน์ ดังนั้นการสั่นสะเทือนจะเกิดขึ้นตลอด โดยขนาดการสั่นสะเทือนจะมีค่าเท่ากับ A และจะไม่ลดลง ในทางกายภาพอาจอธิบายได้ว่า การไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนทำให้ไม่มีการสูญเสียพลังงานออกจากระบบ พลังงานการสั่นสะเทือนในระบบจึงคงที่ ขนาดการสั่นจึงไม่ลดลง ส่วนตำแหน่งบนกราฟไซน์ที่แสดงจุดเริ่มต้นของการสั่นสะเทือนสัมพันธ์กับตัวแปร ϕ นอกจากนี้ยังจะเห็นว่าคาบการสั่นสะเทือน τ จะมีความสัมพันธ์กับค่าความแข็งสปริงและมวลดังสมการ



รูปที่ 3-1 กราฟการสั่นสะเทือนแบบอิสระของระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \tag{3-14}$$

แต่จากที่คาบการสั่นสะเทือน τ มีความสัมพันธ์กับความถี่การสั่นสะเทือน f (frequency) และความเร็วเชิงมุมของการสั่น ω (angular velocity of the cyclic motion หรือ circular frequency) ดังสมการ

$$\tau = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\omega = \sqrt{k/m} \tag{3-15}$$

จะเห็นว่าความเร็วเชิงมุมการสั่น ความถี่การสั่น หรือคาบการสั่นสะเทือนในกรณีการสั่นอย่างอิสระนั้นจะขึ้นอยู่กับค่าความแข็งของสปริง k และมวล m ของระบบเท่านั้น ไม่ขึ้นกับสภาวะเริ่มต้นของการสั่นสะเทือนเลย พิจารณาตัวอย่างระบบที่มีมวลและสปริงเพียงสองส่วนประกอบเท่านั้น ระบบนี้ก็จะมีความถี่การสั่นสะเทือนอยู่ค่าหนึ่งซึ่งสัมพันธ์กับค่าความแข็งสปริงและมวล ถึงแม้ว่าจะยืดสปริงหรือกดสปริงในตอนเริ่มต้นเพื่อปล่อยให้สปริงสั่นแตกต่างกันอย่างไร ระบบนี้ก็ยังสั่นที่ความถี่เท่าเดิมซึ่งคำนวณได้ตามสมการที่ (3-15) เสมอไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ เนื่องจากค่าความถี่นี้เป็นสมบัติของระบบการสั่นสะเทือน จึงเรียกความถี่นี้ว่า ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) และเขียนโดยใช้ตัวอักษร n ห้อยท้ายตัวแปรไว้ ดังนั้นสมการที่ (3-15) จึงอาจเขียนได้ว่า

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \tag{3-16}$$

และ

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m} \tag{3-17}$$

จากที่กล่าวมาข้างต้น อาจสรุปการอธิบายความหมายของความถี่ธรรมชาติได้ว่า ความถี่ธรรมชาติเป็นความถี่การสั่นของระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ที่ปล่อยให้เกิดการสั่นอย่างอิสระ หรืออาจกล่าวอีกอย่างว่า ถ้าให้ระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนสั่นอย่างอิสระแล้ว ระบบนั้นจะสั่นด้วยความถี่เท่ากับความถี่ธรรมชาติ

Note

ในวิชาการสั่นสะเทือนนั้น คำว่าความถี่การสั่นสะเทือนอาจหมายถึง ความเร็วเชิงมุมของการสั่น ω ซึ่งมีหน่วยเป็น rad/s หรืออาจหมายถึงความถี่การสั่นสะเทือน f ซึ่งมีหน่วยเป็น Hz ก็ได้ บ่อยครั้งที่เรียกค่า $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ว่าเป็นความถี่ธรรมชาติ ทั้งที่ปริมาณจริงเป็นความเร็วเชิงมุมของการสั่น ดังนั้นในการกล่าวถึงค่าของความถี่ธรรมชาติ จำเป็นที่จะต้องพิจารณาหน่วยของความถี่ธรรมชาติด้วย

สภาวะเริ่มต้นสั่นสะเทือนและลักษณะการสั่นสะเทือน

สภาวะเริ่มต้นสั่นสะเทือน (Initial condition) หมายถึงสภาวะของระบบตอนที่เริ่มพิจารณาการสั่นสะเทือน (ที่เวลา $t = 0$) ซึ่งได้แก่ ตำแหน่งของมวล และความเร็วของมวลในขณะนั้น เพื่อให้เข้าใจถึงความสัมพันธ์ของสภาวะเริ่มต้นสั่นสะเทือนต่อลักษณะการสั่นสะเทือน พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3-1

กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$

และกำหนดสภาวะเริ่มต้นสั่นสะเทือนเป็น

1. ที่เวลา $t=0$ ให้มวลของระบบอยู่ที่ตำแหน่ง x_0 หรือ $x(0)=x_0$
2. ที่เวลา $t=0$ ให้มวลของระบบมีความเร็ว v_0 หรือ $\dot{x}(0)=v_0$

จากสมการการเคลื่อนที่จะได้ $\ddot{x}(t)+\dfrac{k}{m}x(t)=0$

หรือเขียนได้ในรูป $\ddot{x}(t)+\omega_n^2 x(t)=0$

สมการการเคลื่อนนี้มีคำตอบของสมการเป็น $x(t)=A\sin(\omega_n t+\phi)$ (1)

หาอนุพันธ์สมการ (1) เทียบเวลาจะได้ความเร็ว $\dot{x}(t)=A\omega_n\cos(\omega_n t+\phi)$ (2)

แทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นที่ $t=0$ ลงในสมการที่ (1) และ (2) จะได้

เงื่อนไข $x(0)=x_0$ จะได้ $x_0=A\sin(\phi)$ (3)

และ เงื่อนไข $\dot{x}(0)=v_0$ จะได้ $v_0=A\omega_n\cos(\phi)$ (4)

สมการที่ (3) และ (4) มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัวคือ A และ ϕ เมื่อแก้ระบบสมการ (3) และ (4) จะได้

$$A=\frac{\sqrt{\omega_n^2x_0^2+v_0^2}}{\omega_n} \qquad \text{และ} \qquad \phi=\tan^{-1}\frac{\omega_n x_0}{v_0}$$

เมื่อแทนค่า A และ ϕ ลงในสมการแสดงลักษณะการสั่นสะเทือน สมการ (1) จะได้

$$x(t)=\frac{\sqrt{\omega_n^2x_0^2+v_0^2}}{\omega_n}\sin\left(\omega_n t+\tan^{-1}\frac{\omega_n x_0}{v_0}\right)$$ ANS

Note

จะเห็นว่าสภาวะเริ่มต้นสั่นสะเทือนจะส่งผลต่อขนาดของการสั่นสะเทือน และเฟสของการสั่นสะเทือน ในกรณีของระบบที่ประกอบด้วยมวลและสปริง อาจยกตัวอย่างสภาวะเริ่มต้นให้เห็นภาพชัดเจนขึ้นได้ดังนี้

1. หากดึงมวลหรือกดมวลให้สปริงยืดหรือหดมาก (x_0 มาก) ขนาดการสั่นสะเทือน A จะมาก หากดึงน้อย (x_0 น้อย) ขนาดการสั่นสะเทือน A จะน้อย
2. ค่า x_0 อาจจะมีค่าเท่ากับศูนย์ได้ แต่ในขณะนั้น v_0 ต้องไม่เท่ากับศูนย์
3. ถ้าทั้ง x_0 และ v_0 มีค่าเป็นศูนย์ทั้งคู่ จะไม่เกิดการสั่นสะเทือน นั่นคือระบบมวลและสปริงที่สมดุลอยู่ เมื่อไม่ทำให้ตำแหน่งของมวลออกจากสมดุล และไม่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ ระบบก็ยังสมดุลอยู่เช่นเดิม จึงไม่เกิดการสั่นสะเทือน

ตัวอย่างที่ 3-2

A vehicle wheel, tire, and suspension assembly can be modeled crudely as a single-degree-of-freedom spring-mass system. The mass of the assembly is measured to be about 300 kilograms (kg). Its frequency of oscillation is observed to be 10 rad/s. What is the approximate stiffness of the tire, wheel, and suspension assembly? [Inman ex1.1.2]

ระบบของรถ ล้อ ยาง และระบบรองรับของรถยนต์ สามารถจำลองอย่างง่ายให้เป็นระบบ 1-dof ที่ประกอบด้วยมวลและสปริง ดังนั้นเมื่อสั่นสะเทือนระบบจะสั่นสะเทือนที่ความถี่เท่ากับความถี่ธรรมชาติของระบบ ตามที่โจทย์กำหนดจะได้

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad/s}$$

ดังนั้น $$k = m\omega_n^2 = 300 \times 10^2 = 30{,}000 \text{ N/m}$$ ANS

ความสัมพันธ์ระหว่างการขจัด ความเร็ว และความเร่ง ระหว่างการสั่นสะเทือน

การขจัดของการสั่นสะเทือนในระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$x(t) = A\sin(\omega_n t + \phi) \tag{3-18}$$

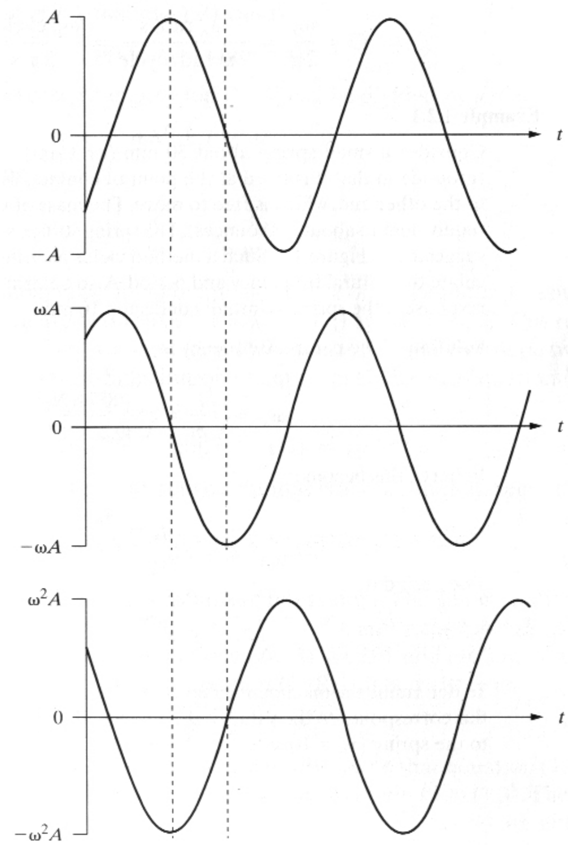
ความเร็วสามารถหาได้โดยหาอนุพันธ์ของการขจัดเทียบกับเวลา ดังแสดงในสมการ

$$\dot{x}(t) = \omega_n A\cos(\omega_n t + \phi) \tag{3-19}$$

ทำนองเดียวกัน ความเร่งก็สามารถหาได้โดยหาอนุพันธ์ของความเร็วเทียบกับเวลา ดังแสดงในสมการ

$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 A\sin(\omega_n t + \phi) \tag{3-20}$$

รูปที่ 3-2 แสดงกราฟเปรียบเทียบการขจัด ความเร็ว และความเร่งของการสั่นสะเทือน ตามสมการที่ (3-18) ถึง (3-20) จากกราฟจะเห็นว่าขนาดของการสั่นสะเทือนจะแตกต่างกัน โดยมีค่าเท่ากับ A , $\omega_n A$ และ $\omega_n^2 A$ สำหรับ การขจัด ความเร็ว และความเร่งตามลำดับ สำหรับเฟสของการสั่นสะเทือนนั้น เฟสของการขจัด ความเร็ว และความเร่ง จะต่างกันอยู่อย่างละ 90° และการขจัดจะมีเฟสตรงข้ามกับความเร่ง



รูปที่ 3-2 การเปรียบเทียบการขจัด กับความเร็ว และความเร่ง ของการสั่นสะเทือน

4. การสั่นแบบอิสระของระบบที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

ในหัวข้อที่ 3 ได้กล่าวถึงการสั่นแบบอิสระของระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ซึ่งจะพบว่าในระบบเหล่านั้นขนาดของการสั่นสะเทือนจะมีขนาดคงที่ไม่ลดลง เนื่องจากไม่มีการสูญเสียพลังงานในระบบเลย อย่างไรก็ตามในระบบจริงแล้ว จะมีการสูญเสียพลังงานเนื่องจากสาเหตุต่างๆ เช่น จากแรงเสียดทาน แรงต้านทานการเคลื่อนที่ของของไหล การสูญเสียพลังงานในการเสียรูปของวัสดุ เป็นต้น ดังนั้นการจำลองระบบการสั่นสะเทือนจึงมักจะต้องรวมตัวหน่วงการสั่นสะเทือนเข้าไปด้วย รูปที่ 3-3 แสดงระบบการสั่นสะเทือนอย่างง่าย ซึ่งประกอบด้วยมวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน สมการการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นสะเทือนนี้คือ

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad (3\text{-}21)$$

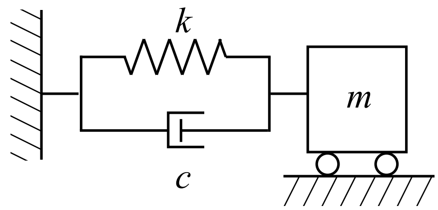
ในการแก้สมการอนุพันธ์ที่ (3-21) เพื่อหาสมการแสดงการสั่นสะเทือนนั้น สามารถเขียนสมการช่วยได้เป็น

$$mr^2 + cr + k = 0$$

คำตอบของสมการช่วย (3-21) คือ

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad (3\text{-}22)$$

คำตอบของสมการนี้เป็นไปได้สามกรณีคือ



รูปที่ 3-3 ระบบอย่างง่ายที่ประกอบด้วยมวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

1. กรณี $c^2 - 4mk < 0$: กรณีนี้คำตอบจะเป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีส่วนจริงเป็นจำนวนจริงลบ ในกรณีนี้คำตอบของสมการอนุพันธ์จะอยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการ (3-9) คือ

$$y = Ae^{ax}\sin(bx + \phi) \tag{3-9}$$

2. กรณี $c^2 - 4mk = 0$: กรณีนี้คำตอบของสมการช่วย r_1 และ r_2 จะเป็นจำนวนจริงลบที่มีค่าเท่ากัน โดย $r_1 = r_2 = r = -\dfrac{c}{2m}$

   ดังนั้นคำตอบของสมการอนุพันธ์ในกรณีนี้จึงอยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการ (3-6) คือ

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x} \tag{3-6}$$

3. กรณี $c^2 - 4mk > 0$: กรณีนี้คำตอบของสมการช่วย r_1 และ r_2 จะเป็นจำนวนจริงลบ 2 จำนวนที่แตกต่างกัน ทั้งนี้เนื่องจากค่า m, c และ k มีค่าเป็นบวกเสมอ จึงทำให้ $c > \sqrt{c^2 - 4mk}$ เสมอ ดังนั้นคำตอบของสมการอนุพันธ์ในกรณีนี้จึงอยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการ (3-5) คือ

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{3-5}$$

เมื่อพิจารณารูปแบบสมการ (3-5), (3-6) และ (3-9) ซึ่งแสดงถึงลักษณะการเคลื่อนที่ y ของมวล m จะพบว่า สมการที่ (3-9) มวลจะมีการสั่นสะเทือน (มีการเคลื่อนที่กลับไปกลับมา) เนื่องจากในสมการมีเทอมของฟังก์ชั่นไซน์ประกอบอยู่ ส่วนสมการที่ (3-5) และ (3-6) จะไม่มีการสั่นสะเทือนเนื่องจากในสมการมีแต่เทอมของฟังก์ชั่น exponential เท่านั้น จะเห็นว่ากรณีที่ 2 จะเป็นกรณีที่เปลี่ยนผ่านจากระบบที่มีการสั่นไปเป็นไม่มีการสั่น พิจารณาสมการ $c^2 - 4mk = 0$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขของกรณีที่สอง หรืออาจเขียนได้ว่า

$$c = c_{cr} = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n \tag{3-23}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงการสั่นสะเทือน c ในสมการ (3-23) นี้เรียกว่าเป็นค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงการสั่นสะเทือนวิกฤต (Critical damping coefficient, c_{cr}) ซึ่งเป็นค่าตัวหน่วงที่ทำให้ระบบเปลี่ยนจากระบบที่มีการสั่นไปเป็นระบบที่ไม่มีการสั่น หากสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงการสั่นสะเทือนมีค่าน้อยกว่าค่าในสมการที่ (3-23) แล้วจะพบว่าระบบจะมีการสั่นสะเทือน แต่ถ้าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงการสั่นสะเทือนมีค่ามากกว่าค่าในสมการที่ (3-23) แล้ว ระบบจะไม่มีการสั่นสะเทือน

อัตราส่วนระหว่างสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงการสั่นสะเทือนกับค่าตัวหน่วงวิกฤต จะถูกเรียกว่าอัตราส่วนการหน่วง (Damping ratio, ζ) ดังแสดงในสมการ

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (3\text{-}24)$$

อัตราส่วนการหน่วงนี้จะบอกให้ทราบว่าระบบที่พิจารณาจะมีการสั่นสะเทือนหรือไม่ ดังจะอธิบายต่อไป

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ (3-1) เมื่อแทนค่า c ตามสมการที่ (3-24) และค่าความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติกับมวล และค่าคงที่สปริง ในสมการที่ (3-16) ลงไปจะได้สมการการเคลื่อนที่ในอีกรูปแบบหนึ่งดังสมการ

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (3\text{-}25)$$

ทำนองเดียวกันคำตอบของสมการช่วย (3-22) ก็สามารถเขียนได้เป็น

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3\text{-}26)$$

และคำตอบที่เป็นไปได้สามกรณีที่กล่าวข้างต้นอาจเขียนได้ดังนี้

1. กรณี $c^2 - 4mk < 0$ หรืออาจเขียนได้เป็น $\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$ หรือ $0 < \zeta < 1$
   กรณีนี้ค่าตัวหน่วงมีค่าน้อยจึงเกิดการสั่นสะเทือน เรียกกรณีนี้ว่า Under damped motion
2. กรณี $c^2 - 4mk = 0$ หรืออาจเขียนได้เป็น $\sqrt{\zeta^2 - 1} = 0$ หรือ $\zeta = 1$
   กรณีนี้ค่าตัวหน่วงมีค่าเท่ากับค่าตัวหน่วงวิกฤต ซึ่งเปลี่ยนจากระบบที่สั่นเป็นระบบที่ไม่สั่น เรียกกรณีนี้ว่า Critically damped motion
3. กรณี $c^2 - 4mk > 0$ หรืออาจเขียนได้เป็น $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$ หรือ $1 < \zeta$
   กรณีนี้ค่าตัวหน่วงมีค่ามากกว่าค่าวิกฤตจึงไม่เกิดการสั่นสะเทือน เรียกกรณีนี้ว่า Over damped motion

4.1 Under damped motion

กรณีนี้เกิดเมื่อค่าอัตราส่วนการหน่วง ζ มีค่าระหว่างศูนย์ถึงหนึ่ง ($0 < \zeta < 1$) คำตอบของสมการช่วย (3-26) สามารถเขียนได้เป็น

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\, j$$

และคำตอบของสมการอนุพันธ์ ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ตามรูปแบบสมการ (3-9) สามารถเขียนได้เป็น

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi) \quad (3\text{-}27)$$

เมื่อ

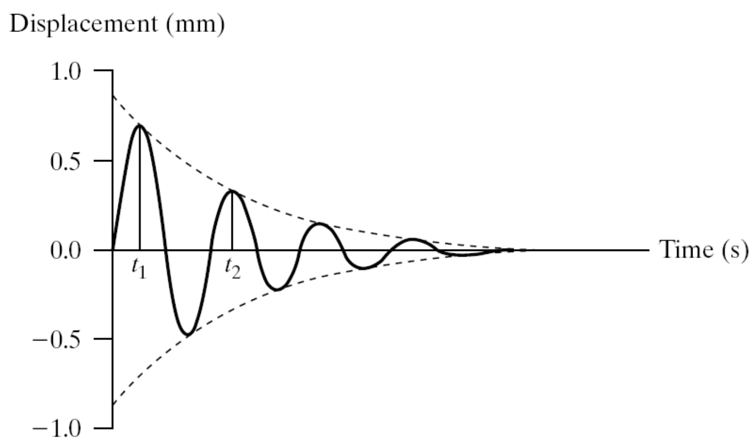
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3\text{-}28)$$

และ A และ ϕ เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นการสั่น

สมการที่ (3-27) ประกอบจากผลคูณของเทอมฟังก์ชั่น exponential ที่ยกกำลังติดลบ ซึ่งทำให้ค่าของฟังก์ชั่นมีค่าลดลงเมื่อเวลา t เพิ่มมากขึ้น กับเทอมฟังก์ชั่นไซน์ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการสั่นกลับไปกลับมา ดังนั้นลักษณะการสั่นสะเทือนในกรณีนี้ จะเป็นการสั่นกลับไปกลับมา และขนาดการสั่นมีค่าลดลงเมื่อเวลา t

เพิ่มมากขึ้นเนื่องจากการสูญเสียพลังงานไปกับตัวหน่วงการสั่นสะเทือน สมการ (3-27) สามารถนำมาเขียนเป็นกราฟแสดงการเคลื่อนที่ได้ดังแสดงในรูปที่ 3-4

เมื่อพิจารณาถึงความถี่การสั่นสะเทือน ซึ่งดูได้จากความถี่ของฟังก์ชั่นไซน์ในสมการ (3-27) จะพบว่าความถี่การสั่นสะเทือนจะมีค่าเท่ากับ ω_d ซึ่งแตกต่างจากความถี่ธรรมชาติกรณีการสั่นที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนเล็กน้อย อย่างไรก็ตามค่า ω_d จะขึ้นอยู่กับลักษณะของระบบ ได้แก่ค่ามวล ความแข็งสปริง และ ค่าความหน่วงการสั่นสะเทือน เท่านั้น ดังนั้นหากมีระบบหนึ่งซึ่งมีค่าเหล่านี้คงที่ ระบบนี้ก็จะสั่นอย่างอิสระด้วยความถี่ ω_d เท่านั้น ด้วยเหตุนี้จึงเรียกค่า ω_d ว่าความถี่ธรรมชาติของระบบที่มีตัวหน่วง (Damped natural frequency) และหากระบบไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน หรือ ζ มีค่าเท่ากับ 0 สมการที่ (3-27) และ (3-28) ก็จะลดรูปได้เป็นสมการ (3-13) ซึ่งแสดงลักษณะการสั่นสะเทือนในกรณีที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน เช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 3



รูปที่ 3-4 การสั่นสะเทือนแบบ Under damped motion

4.2 Critically damped motion

กรณีนี้เกิดเมื่อค่าอัตราส่วนการหน่วง ζ มีค่าเท่ากับหนึ่ง ($\zeta = 1$) คำตอบของสมการช่วย (3-26) สามารถเขียนได้เป็น

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n = -\omega_n$$

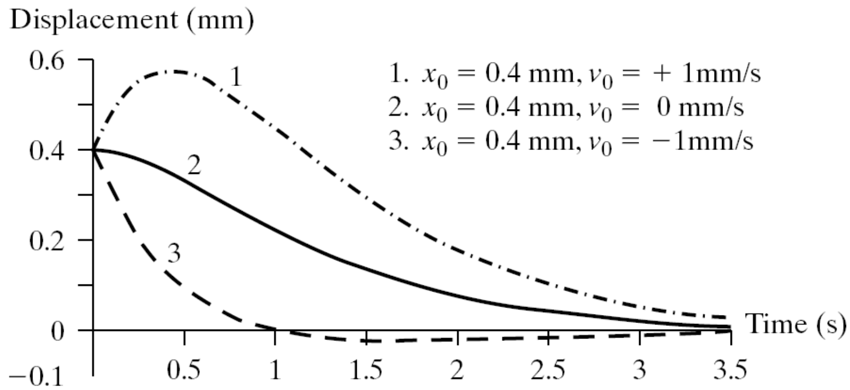
คำตอบของสมการอนุพันธ์ ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ตามรูปแบบสมการ (3-6) สามารถเขียนได้เป็น

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\omega_n t} \tag{3-29}$$

โดย a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นการสั่น

เนื่องจากไม่มีเทอมฟังก์ชั่นไซน์ในสมการ (3-29) ดังนั้นจึงไม่เกิดการสั่นขึ้น มวล m ที่ถูกกระทำโดยเงื่อนไขเริ่มต้นให้ออกจากสภาวะสมดุล จะค่อยๆ เคลื่อนที่กลับสู่สภาวะสมดุลโดยไม่สั่น รูปที่ 3-5 แสดงถึงการเคลื่อนที่ของมวลตามสมการที่ (3-29) กราฟเส้นต่างๆ แสดงถึงลักษณะการเคลื่อนที่เมื่อมีเงื่อนไขเริ่มต้น

แตกต่างกัน ตัวหน่วงการสั่นสะเทือนในกรณีนี้เป็นตัวหน่วงการสั่นสะเทือนที่น้อยที่สุดที่จะไม่ทำให้เกิดการสั่นสะเทือนขึ้น



รูปที่ 3-5 การเคลื่อนที่แบบ Critically damped motion

4.3 Over damped motion

กรณีนี้เกิดเมื่อค่าอัตราส่วนการหน่วง ζ มีค่ามากกว่าหนึ่ง ($\zeta > 1$) คำตอบของสมการช่วยในกรณีนี้จะเป็นเช่นเดียวกับสมการที่ (3-26) คือ

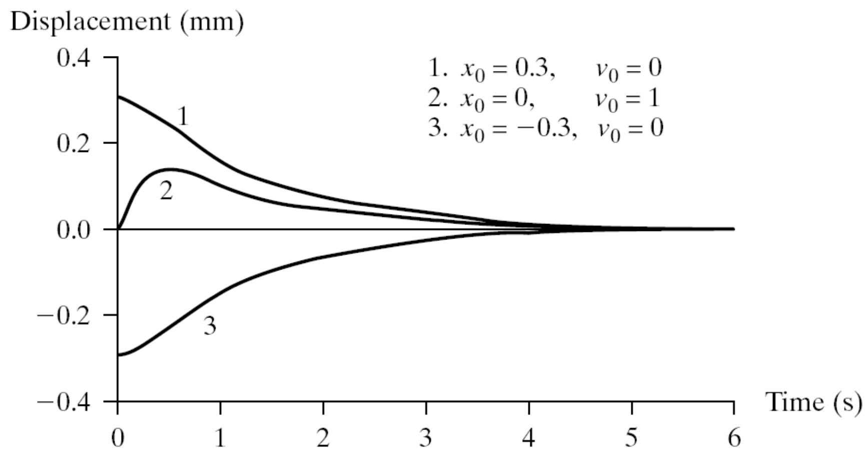
$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

คำตอบของสมการอนุพันธ์ ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ตามรูปแบบสมการ (3-5) สามารถเขียนได้เป็น

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(a_1 e^{-(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + a_2 e^{+(\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t}) \tag{3-30}$$

โดย a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นการสั่น

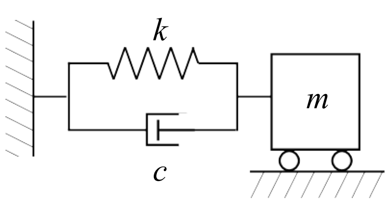
เนื่องจากไม่มีเทอมฟังก์ชั่นไซน์ในสมการ (3-30) กรณีก็ไม่มีการสั่นสะเทือนเกิดขึ้น เช่นเดียวกับกรณี Critically damped motion เนื่องจากมีสัมประสิทธิ์การหน่วงมากเกินไป ลักษณะกราฟของกรณีนี้ตามสมการที่ (3-30) แสดงในรูปที่ 3-6 เส้นกราฟเส้นต่างๆ แสดงการเคลื่อนที่เมื่อมีเงื่อนไขเริ่มต้นที่แตกต่างกัน



รูปที่ 3-6 การเคลื่อนที่แบบ Over damped motion

ถึงแม้ว่าลักษณะกราฟของกรณี Over damped motion และ Critically damped motion จะมีรูปร่างคล้ายคลึงกัน แต่ทั้งสองกรณีก็เขียนมาจากสมการที่แตกต่างกัน และเมื่อเปรียบเทียบถึงเวลาที่มวลใช้เพื่อกลับคืนสู่สภาวะสมดุลแล้ว จะพบว่ากรณี Critically damped motion มวลจะกลับเข้าสู่ตำแหน่งสมดุลได้เร็วกว่ากรณี Over damped motion

ตัวอย่างที่ 3-3 A Spring-mass-damper system has mass of 100 kg, stiffness of 3000 N/m and damping coefficient of 300 kg/s. Calculate the undamped natural frequency, the damping ratio and the damped natural frequency. Does the solution oscillate? This system is given a zero initial velocity and an initial displacement of 0.1 m. Calculate the vibration response. [inman 1.40, 1.42]



รูปทางด้านซ้ายมือแสดงระบบ มวล-สปริง-และตัวหน่วงการสั่นสะเทือนตามรูปโจทย์ การเคลื่อนที่ของระบบนี้สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Undamped natural frequency หาได้จาก $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3000}{100}} = 5.477 \text{ rad/s}$ ANS

Damping ratio หาได้จาก $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{300}{2\sqrt{(3000)(100)}} = 0.274$ ANS

เนื่องจากอัตราส่วนการหน่วงมีค่าน้อยกว่า 1 ดังนั้นระบบจึงเป็นแบบ Under-damped motion และมีการสั่นสะเทือน โดยความถี่การสั่นสะเทือนเท่ากับ Damped natural frequency ซึ่งหาได้จาก

Damped natural frequency $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 5.477\sqrt{1-0.274^2} = 5.27 \text{ rad/s}$ ANS

การสั่นสะเทือนเป็นแบบ Under-damped motion ดังนั้นลักษณะการสั่นสะเทือนจึงสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi) \quad (1)$$

แทนค่า ζ, ω_n และ ω_d ลงในสมการจะได้

$$x(t) = Ae^{-(0.274)(5.477)t}\sin(5.27t + \phi)$$

$$x(t) = Ae^{-1.5t}\sin(5.27t + \phi) \quad (2)$$

ค่าคงที่ A และมุมเฟส ϕ สามารถหาได้จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้นดังนี้

หาอนุพันธ์ของสมการที่ (2) เทียบกับเวลา จะได้สมการแสดงความเร็วการเคลื่อนที่ ดังนี้

$$v = \dot{x}(t) = A(-1.5)e^{-1.5t}\sin(5.27t + \phi) + Ae^{-.15t}(5.27)\cos(5.27t + \phi)$$

$$v = \dot{x}(t) = Ae^{-1.5t}\left[(-1.5)\sin(5.27t + \phi) + 5.27\cos(5.27t + \phi)\right] \quad (3)$$

แทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นลงในสมการแสดงการเคลื่อนที่ สมการที่(2) และสมการแสดงความเร็วการเคลื่อนที่ สมการที่ (3)

ที่เวลา t = 0, x = 0.1 m

$$0.1 = Ae^{0}\sin(0 + \phi) = A\sin\phi \quad (4)$$

ที่เวลา t = 0, v = 0 m/s

$$0 = Ae^{0}\left[-1.5\sin(0 + \phi) + 5.27\cos(0 + \phi)\right]$$

$$0 = A\left[-1.5\sin\phi + 5.27\cos\phi\right]$$

เนื่องจากขนาดการสั่นสะเทือน A ไม่เป็น 0 ตลอดเวลา ดังนั้น

$$0 = -1.5\sin\phi + 5.27\cos\phi \quad (5)$$

แก้สมการที่ (4) และ (5) จะได้

$$A = 0.104, \quad \phi = 1.293 \text{ rad}$$

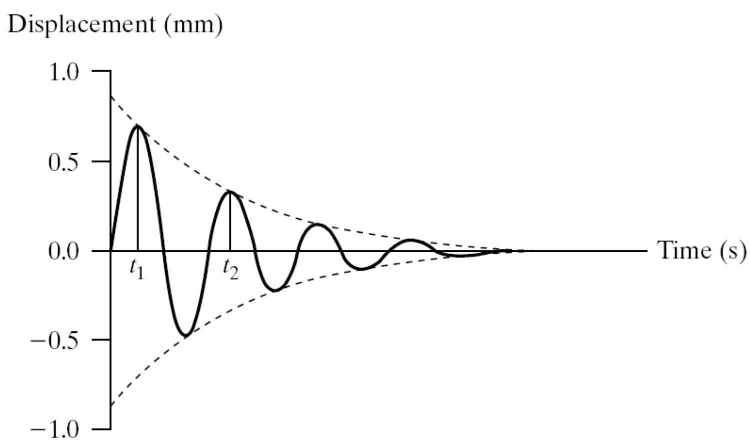
แทนในสมการการเคลื่อนที่ สมการที่ (2) จะได้สมการที่อธิบายการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นสะเทือน ดังนี้

$$x(t) = 0.104e^{-1.5t}\sin(5.27t + 1.293)$$ ANS

Note มุมที่ใช้ในสมการการเคลื่อนที่ ต้องเป็นหน่วยเรเดียนเสมอ

5. Logarithmic decrement

ในระบบการสั่นสะเทือนที่ประกอบด้วยมวล m ค่าความแข็งสปริง k และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง c นั้น ค่า m และ k ที่จะนำมาใช้ในแบบจำลองการสั่นสะเทือนนั้นมักจะหาได้ง่าย สำหรับมวล m อาจใช้การชั่งด้วยตาชั่ง หรืออาจใช้การทดสอบหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำกับระยะที่เสียรูปไปในกรณีของค่า k อย่างไรก็ตามค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงมักจะหาค่าได้ยาก โดยทั่วไปมักจะประมาณจากลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบ ในหัวนี้จะกล่าวถึงวิธีการหนึ่งที่ใช้ประมาณค่า c ของระบบที่มีความสัมประสิทธิ์ความหน่วงน้อย และเป็น under damped motion ซึ่งเป็นระบบที่พบได้มากในโครงสร้างทางวิศวกรรมทั่วไป หลักการที่ใช้เป็นการพิจารณาการลดลงของขนาดการสั่นสะเทือนของระบบ หรือที่เรียกกันว่า Logarithmic decrement



รูปที่ 3-7 Logarithmic decrement

พิจารณากราฟแสดงการสั่นสะเทือนของระบบแสดงในรูปที่ 3-7 จากรูปจะนิยาม Logarithmic decrement δ ดังนี้

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} \tag{3-31}$$

โดย $x(t)$ คือขนาดการสั่นสะเทือนที่ตำแหน่ง t ใดๆ

T คือคาบการสั่นสะเทือน

$x(t+T)$ คือขนาดการสั่นสะเทือนที่เวลาผ่านไป 1 คาบนับจากเวลา t

ตามนิยามจะใช้ขนาดการสั่นสะเทือนที่เวลา t ใดๆ ก็ได้ แต่เพื่อความสะดวกในการกำหนดจุด จึงมักจะเลือกจุดยอดเป็นตำแหน่ง t เช่น ในรูปที่ 3-7 หากให้ตำแหน่ง t_1 เป็นตำแหน่ง t แล้ว ตำแหน่ง t_2 ก็จะเป็นตำแหน่ง $t+T$

แทนค่า $x(t)$ และ $x(t+T)$ ตามความสัมพันธ์ในสมการ (3-27) ลงในสมการ (3-31) จะได้

$$\delta = \ln \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\phi)}{Ae^{-\zeta\omega_n (t+T)}\sin(\omega_d (t+T)+\phi)} \tag{3-32}$$

เนื่องจากฟังก์ชั่นไซน์ที่เวลา t ใดๆ จะมีค่าเท่ากับค่าไซน์เมื่อเวลาผ่านไป 1 คาบ ($t+T$) ดังนั้น สมการที่ (3-32) จะเขียนได้เป็น

$$\delta = \ln e^{\zeta\omega_n T} = \zeta\omega_n T \tag{3-33}$$

เนื่องจากคาบการสั่นสะเทือน $T = \dfrac{2\pi}{\omega_d}$ ดังนั้น

$$\delta = \zeta\omega_n \cdot \frac{2\pi}{\omega_d} = \zeta\omega_n \cdot \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3-34}$$

จากสมการที่ (3-34) จะพบว่าค่า Logarithmic decrement, δ จะขึ้นกับค่า damping ratio, ζ เพียงอย่างเดียว ดังนั้นจึงอาจเขียนค่า ζ ในรูปฟังก์ชั่นของ δ ได้ดังสมการ

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} \tag{3-35}$$

ในการทดลองวัดสัญญาณการสั่นสะเทือนของระบบที่สั่นสะเทือนอย่างอิสระ จะได้ลักษณะสัญญาณดังกราฟในรูปที่ 3-7 ดังนั้นจึงทราบขนาดการสั่นสะเทือน $x(t)$ และ $x(t+T)$ ทำให้สามารถคำนวณค่า Logarithmic decrement, δ และหาค่าอัตราส่วนความหน่วง ζ ได้จากสมการที่ (3-35)

ในการหาค่า Logarithmic decrement อาจใช้จำนวนคาบในการคำนวณมากกว่า 1 คาบก็ได้ หากใช้จำนวนคาบทั้งหมด n คาบ จะสามารถหาค่า δ ได้จากสมการ

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x(t)}{x(t+nT)} \tag{3-36}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3-4</u>

ระบบการสั่นสะเทือนประกอบด้วย มวล-สปริง-ตัวหน่วงการสั่นสะเทือน โดยมวลมีขนาด 2 kg ค่าความแข็งสปริงเท่ากับ 1.5 kN/m จากการทดลองสังเกตลักษณะการสั่นสะเทือน พบว่า จุดที่เกิดการสั่นสะเทือนสูงที่สุดครั้งแรก มีขนาดการสั่นสะเทือน 9 มม. ส่วนจุดที่เกิดการสั่นสะเทือนสูงที่สุดครั้งต่อมา มีขนาดการสั่นสะเทือน 1 มม. จากข้อมูลข้างต้น จงคำนวณหาขนาดสัมประสิทธิ์ความหน่วงของระบบ

จากข้อมูลที่กำหนด จะสามารถหาค่า Logarithmic decrement ได้จาก

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\frac{9}{1} = 2.1972$$

เมื่อทราบค่า Logarithmic decrement จะสามารถหาค่าอัตราส่วนการหน่วงได้จาก

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{2.1972}{\sqrt{4\pi^2 + 2.1972^2}} = 0.33$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนการหน่วง กับค่าความหน่วง ความแข็งสปริง และมวล จะสามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงได้ดังนี้

$$\zeta = 0.33 = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2\sqrt{(1.5\times10^3)(2)}}$$

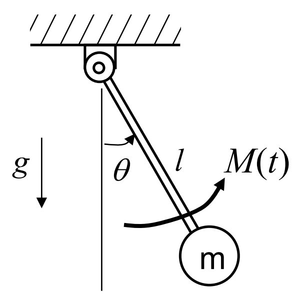
เพราะฉะนั้น $c = 36.15$ kg/s <u>ANS</u>

6. สภาพสมดุลและเสถียรภาพของระบบ

6.1 สภาพสมดุล

สภาพสมดุลหมายถึงสภาวะที่ระบบทางกลอยู่ในสภาพเดิมไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อไม่มีแรงลัพธ์ภายนอกมารบกวน เนื่องจากในสภาวะสมดุล มวลไม่มีความเร่ง และความเร็ว ดังนั้นการหาสภาพสมดุลจึงทำได้โดยกำหนดให้ $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ หรือ $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ ดังแสดงในตัวอย่างด้านล่าง

<u>ตัวอย่างที่ 3-5</u>



ระบบในรูปสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = M(t)$$

ให้ที่สภาวะสมดุล เกิดที่ $\theta = \theta_0$

และจะได้ว่าวัตถุไม่มีการเคลื่อนที่เมื่ออยู่ในสภาวะสมดุล ดังนั้น

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$$

และถ้าหากสมมุติให้ไม่มีโมเมนต์ภายนอกมากระทำ จะได้

$$mgl\sin\theta_0 = 0$$

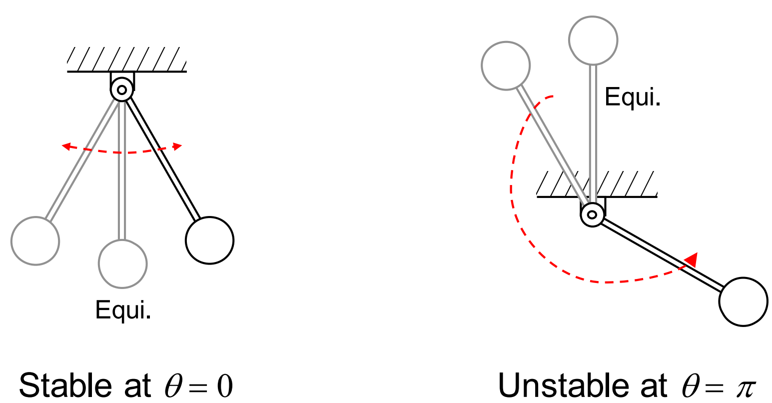
หรือได้ว่า $\sin\theta_0 = 0$

ดังนั้น $\theta_0 = \pm n\pi$ เมื่อ n = 0, 1, 2, …

ซึ่งหมายความว่า สภาพสมดุลของระบบที่แสดงในรูปเกิดขึ้นได้ 2 กรณี คือ สมดุลในสภาวะ 0 องศา และ 180 องศา

6.2 เสถียรภาพของระบบ

ระบบทางกลที่อยู่ในสภาพสมดุลจะถือว่าเป็นสภาพสมดุลที่มีเสถียรภาพ เมื่อระบบนั้นสั่นด้วยขนาดการสั่นสะเทือนที่คงที่รอบตำแหน่งสมดุลเดิม หรือสามารถกลับคืนสู่สภาวะสมดุลเดิมได้ หากมีแรงภายนอกมากระทำ รูปที่ 3-8 แสดงตัวอย่างระบบที่ประกอบด้วยลูกตุ้ม เช่นเดียวกับระบบในตัวอย่างที่ 3-x จากรูปจะเห็นว่าสมดุลที่เกิดที่มุม 0 องศา เป็นสภาพสมดุลที่มีเสถียรภาพ เนื่องจากเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำให้ระบบมีการเคลื่อนที่ ระบบจะสั่นรอบจุดสมดุลเดิม (หากพิจารณาว่าไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนในระบบ) หรือสั่นรอบจุดสมดุลเดิมด้วยขนาดที่น้อยลงเรื่อยๆ จนหยุดสั่นที่จุดสมดุลเดิม (หากพิจารณาว่ามีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน) เมื่อเปรียบเทียบกับที่มุม 180 องศา จะพบว่าที่มุม 180 องศา เป็นสภาพสมดุลที่ไม่มีเสถียรภาพ เนื่องจากเมื่อมีแรงมากระทำแล้ว ระบบจะเกิดการเคลื่อนที่ไปที่ตำแหน่งอื่น และไม่สามารถกลับคืนสู่สภาพสมดุลเดิมได้อีก



รูปที่ 3-8 สภาพสมดุลที่มีเสถียรภาพ และไม่มีเสถียรภาพ

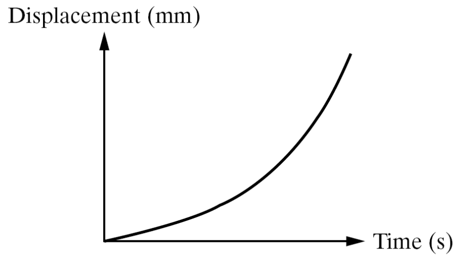
เมื่อพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นสะเทือนโดยทั่วไป ซึ่งแสดงโดยสมการ (3-2) ดังนี้

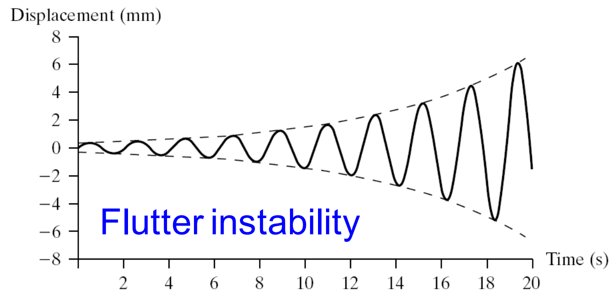
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของเทอม $\ddot{x}(t)$, $\dot{x}(t)$ และ $x(t)$ มีค่าเป็นบวกทั้งหมด (ค่ามวล m สัมประสิทธิ์การหน่วง c และค่าความแข็งสปริง k มีค่าเป็นบวกเสมอ) ดังนั้นคำตอบของสมการอนุพันธ์ (3-2) จะแสดงลักษณะการสั่นสะเทือน ซึ่งอาจจะเป็นแบบ Under damped motion, Critically damped motion หรือ Over damped motion ดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 4 จะพบว่าไม่ว่าจะเป็นในกรณีใดก็ตาม ระบบจะหยุดสั่นที่สมดุลเดิมที่ x = 0 เสมอ ดังนั้นระบบที่แสดงข้างต้นจึงเป็นระบบที่มีเสถียรภาพ

อย่างไรก็ตามหากสร้างสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบเช่นเดียวกับสมการที่ (3-2) แล้ว แต่สัมประสิทธิ์ของเทอม $\ddot{x}(t)$, $\dot{x}(t)$ และ $x(t)$ ในสมการไม่เป็นบวก (หรือลบ) ทั้งหมด เมื่อแก้สมการด้วยวิธีการที่แสดงในหัวข้อที่ 4 แล้ว จะพบว่าส่วนจริงของคำตอบของสมการช่วย (3-22) จะมีค่าเป็นบวก ซึ่งแสดงให้เห็นว่า เมื่อเวลา t เพิ่มมากขึ้น ขนาดการสั่นสะเทือนก็จะเพิ่มมากขึ้น ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 3-9

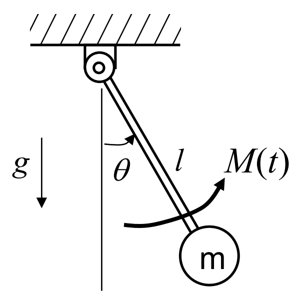
ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าระบบที่มีค่าสัมประสิทธิ์ของเทอม $\ddot{x}(t)$, $\dot{x}(t)$ และ $x(t)$ ในสมการไม่เป็นบวก (หรือลบ) ทั้งหมด เป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ





รูปที่ 3-9 การเคลื่อนที่ของระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ

<u>ตัวอย่างที่ 3-6</u>



พิจารณาระบบในตัวอย่างที่ 3-x อีกครั้ง ระบบนี้มีสมการการเคลื่อนที่เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำดังนี้

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

พิจารณาสภาพสมดุลที่เกิดที่ $\theta_0 = \pi$

ทำการประมาณเทอม $\sin\theta$ แบบเชิงเส้นรอบจุด $\theta_0 = \pi$ จะได้

$$\sin\theta \cong \sin\theta_0 + (\theta - \theta_0)\cos\theta_0$$

$$\sin\theta \cong 0 + (\theta - \pi)(-1) = (\pi - \theta)$$

แทนค่า $\sin\theta$ ลงในสมการการเคลื่อนที่ จะได้

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl(\pi - \theta) = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = -mgl\pi$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของเทอม $\dot{\theta}$ มีค่าเป็นลบ และต่างจากสัมประสิทธิ์ของเทอม $\ddot{\theta}$ ดังนั้นสภาพสมดุลที่ $\theta_0 = \pi$ จึงไม่มีเสถียรภาพ ดังแสดงในรูปที่ 3-8 ด้านขวามือ

7. การออกแบบระบบการสั่นสะเทือน

การออกแบบระบบการสั่นสะเทือนทำได้โดยเลือกส่วนประกอบของระบบการสั่นสะเทือน เช่น มวล ความแข็งสปริง และค่าความหน่วง เพื่อให้เกิดลักษณะการสั่นสะเทือนที่ต้องการ เช่น ต้องการให้ระบบสั่นแบบ Under-damped motion, Over-damped motion หรือ Critically damped motion หรือจะเป็นการออกแบบเพื่อควบคุมให้ความถี่ธรรมชาติอยู่ในช่วงที่ต้องการ โดยการเลือกขนาดมวล หรือความแข็งสปริง เป็นต้น

<u>ตัวอย่างที่ 3-7</u>

ระบบรองรับของรถยนต์ขนาดเล็กสามารถจำลองได้เป็น ระบบการสั่นสะเทือน 1-dof ซึ่งประกอบด้วย มวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และมีสมการแสดงการสั่นสะเทือนเป็น

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$$

มวลของรถมีค่าเท่ากับ 1361 kg ส่วนค่า Static deflection มีค่าเท่ากับ 0.05 ม. ให้คำนวณค่า c และ k เพื่อที่จะทำให้การสั่นสะเทือนของรถเป็นแบบ Critically damped motion และถ้ามีมวลของผู้โดยสาร และสัมภาระ m_0 รวม 290 kg เพิ่มเข้าไปในรถ จะเกิดผลกระทบต่อการสั่นสะเทือนอย่างไร

เนื่องการกำหนดระยะ Static deflection ของสปริงเท่ากับ 0.05 เมตร จาก $mg=k\Delta$ จะได้

$$k=\frac{mg}{\Delta}=\frac{1361\times 9.81}{0.05}=2.67\times 10^5\ \mathrm{N/m}$$ <u>ANS</u>

เมื่อสั่นสะเทือนแบบ Critically damped motion ค่า ζ = 1 ค่า c จะหาได้จาก

$$c=c_{cr}=2\sqrt{km}=2\sqrt{(2.67\times 10^5)(1361)}=3.81\times 10^4\ \mathrm{kg/s}$$ <u>ANS</u>

เมื่อมีมวลของผู้โดยสารและสัมภาระเพิ่มเข้าไป 290 kg มวลรวมของระบบการสั่นสะเทือนจะเพิ่มเป็น $1361+290=1651\mathrm{kg}$

ในกรณีนี้ ค่าอัตราส่วนการหน่วงจะเปลี่ยนเป็น

$$\zeta=\frac{\mathrm{c}}{2\sqrt{\mathrm{km'}}}=\frac{3.81\times 10^4}{2\sqrt{(2.67\times 10^5)(1651)}}=0.91$$

จะเห็นว่าในกรณีนี้จะเกิดการสั่นขึ้น การเปลี่ยนแปลงอื่นๆ ในระบบได้แก่

Static deflection: $\Delta=\dfrac{mg}{k}=\dfrac{1651\times 9.81}{2.67\times 10^5}=0.06\ \ \mathrm{m}$

ความถี่ธรรมชาติของระบบ: $\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m'}}=\sqrt{\dfrac{2.67\times 10^5}{1651}}=12.7\ \ \mathrm{rad/s}$

ความถี่การสั่นสะเทือนของระบบ: $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=12.7\sqrt{1-0.91^2}=5.27\ \ \mathrm{rad/s}$ <u>ANS</u>

Note ในข้อนี้ถึงแม้จะออกแบบให้ระบบรองรับของรถมีการเคลื่อนที่แบบ Critically damped motion ซึ่งไม่มีการสั่นสะเทือนเกิดขึ้น เพื่อให้รถกลับเข้าสู่สภาวะสมดุลเดิมได้เร็วที่สุดเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำ อย่างไรก็ตามหากน้ำหนักของรถเปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากน้ำหนักที่เพิ่มเข้ามาของผู้โดยสารหรือของสัมภาระ การสั่นสะเทือนของระบบก็จะเปลี่ยนแปลงไป ในข้อนี้ระบบจะเปลี่ยนจากไม่สั่นสะเทือนมาเป็นการสั่นสะเทือน

8. สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงการสั่นสะเทือนอย่างอิสระ โดยเริ่มจากระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ซึ่งในระบบนี้การสั่นจะสั่นด้วยความถี่เท่ากับความถี่ธรรมชาติของระบบ และขนาดการสั่นสะเทือนจะไม่ลดน้อยลงเนื่องจากไม่มีการสูญเสียพลังงานออกจากระบบ หลังจากนั้นจึงอธิบายถึงการสั่นสะเทือนของระบบที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ลักษณะการเคลื่อนที่ของระบบที่มีตัวหน่วงนี้จะแบ่งออกเป็น 3 กรณีขึ้นกับขนาดของสัมประสิทธิ์การหน่วง ได้แก่ 1) ระบบที่มีขนาดตัวหน่วงน้อยจะสั่นกลับไปกลับมา ด้วยความถี่เท่ากับความถี่ธรรมชาติของระบบที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และมีขนาดลดน้อยลงเรื่อยๆ จนหยุดสั่น หรือที่เรียกว่า Under damped motion 2) ระบบที่มีสัมประสิทธิ์การหน่วงเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงค่าวิกฤต หรือที่เรียกว่า Critically damped motion ในระบบนี้ขนาดการเคลื่อนที่จะค่อยๆ ลดลงจนหยุดการเคลื่อนที่ โดยไม่มีการสั่นสะเทือน และ 3) ระบบที่มีสัมประสิทธิ์การหน่วงมากหรือที่เรียกว่า Over damped motion ระบบแบบนี้ก็จะไม่เกิดการสั่นสะเทือนเช่นเดียวกับระบบที่มีสัมประสิทธิ์ความหน่วงเท่ากับค่าวิกฤต โดยขนาดการเคลื่อนที่จะลงลงจนหยุดนิ่งเมื่อเวลาผ่านไปช่วงเวลาหนึ่ง ในบทนี้ยังได้กล่าวถึงการพิจารณาสภาพสมดุล และเสถียรภาพของระบบ ซึ่งสามารถรู้ได้โดยทันทีจากรูปแบบสมการการเคลื่อนที่

ความเข้าใจผลของส่วนประกอบต่างๆ ต่อลักษณะการสั่นสะเทือนทำให้สามารถออกแบบขนาดของส่วนประกอบต่างๆ เพื่อให้ระบบมีลักษณะการสั่นสะเทือนตามที่ต้องการ เช่น สามารถออกแบบให้ระบบสั่นแบบ Over-damped motion, Critically damped motion หรือ Under-damped motion หรือออกแบบให้ระบบมีความถี่ธรรมชาติตามที่ต้องการได้