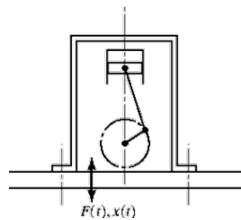


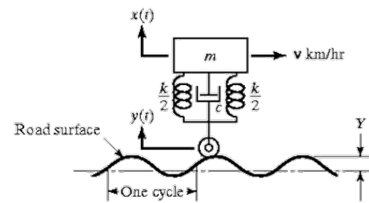
บทที่ 4 การสั่นสะเทือนแบบบังคับ

1. บทนำ

การสั่นสะเทือนแบบบังคับ (Force vibration) เป็นการสั่นสะเทือนซึ่งเกิดเนื่องจากพลังงานภายนอกกระทำกับระบบระหว่างการสั่นสะเทือน โดยพลังงานภายนอกที่กระทำนั้นอาจจะอยู่ในรูปของแรง แรงแมด หรืออาจเป็นการขจัดเพื่อบังคับให้เกิดการสั่นก็ได้ รูปที่ 4-1 แสดงตัวอย่างของพลังงานภายนอกที่ใส่ให้กับระบบ โดยในรูปทางด้านซ้าย พลังงานภายนอกอยู่ในรูปแรงกระทำ โดยแรงเกิดจากการเคลื่อนที่ขึ้นลงของกระบอกสูบ และแรงเหวี่ยงของข้อเหวี่ยง (Crank) และก้านส่ง (Connecting rod) ขณะทำงาน สำหรับรูปทางด้านขวา พลังงานภายนอกอยู่ในรูปการใส่การขจัด โดยในรูปแสดงแบบจำลองระบบการสั่นสะเทือนของรถยนต์ซึ่งเคลื่อนที่บนถนนขรุขระ ความขรุขระของถนนเปรียบเสมือนการใส่การขจัดเพื่อบังคับให้ตัวรถเคลื่อนที่ขึ้น-ลง ตามคาบความขรุขระของถนน



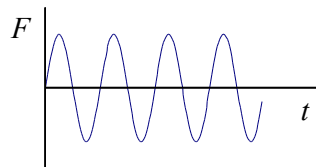
Applied force



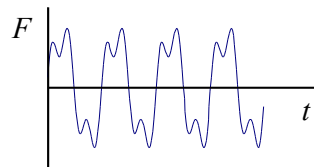
Displacement excitation

รูปที่ 4-1 ตัวอย่างพลังงานภายนอกที่ใส่เข้าไปในระบบการสั่นสะเทือน

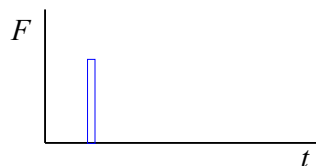
1. Harmonic (sinusoidal) input



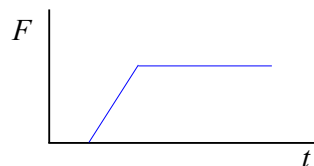
2. Arbitrary periodic input



3. Impact



4. Arbitrary nonperiodic input



รูปที่ 4-2 รูปแบบของพลังงานภายนอกที่ให้กับระบบการสั่นสะเทือน

รูปที่ 4-2 แสดงรูปแบบของพลังงานภายนอกแบบต่างๆ ที่ใส่ให้กับระบบ ได้แก่ 1) พลังงานแบบฮาร์โมนิก หรือพลังงานที่มีการแปรผันเป็นลักษณะฟังก์ชันไซน์ 2) พลังงานที่เป็นคาบรูปแบบใดๆ 3) พลังงานจากการกระแทก หรือพัลส์ (Pulse) และ 4) พลังงานรูปแบบใดๆ และไม่มีความสัมพันธ์เป็นคาบ

สำหรับเครื่องจักรกลที่ใช้ในงานทางวิศวกรรมจำนวนมากนั้นจะมีความทำงานเป็นคาบ โดยพลังงานที่กระตุ้นให้ระบบสั่น อาจจะมาจากการทำงานของเครื่องยนต์ หรือมอเตอร์ต้นกำลัง หรือมาจากกลไกการทำงานที่มีลักษณะเป็นคาบเช่น ชูตเฟือง หรือลูกเบี้ยว หรืออาจเกิดมาจากความผิดปกติของเครื่องจักรหมุน เช่น ความไม่สมดุลของเครื่องยนต์ ความเสียหายภายในตลับลูกปืน เป็นต้น ลักษณะพลังงานกระตุ้นของชิ้นส่วนกลเหล่านี้จะสอดคล้องกับที่แสดงในรูปที่ 4-2(2) อย่างไรก็ตามในการแก้ปัญหาเหล่านั้นนั้น จำเป็นที่จะต้องเข้าใจลักษณะการสั่นสะเทือนที่เป็นคาบแบบฮาร์โมนิกในรูปที่ 4-2(1) เสียก่อน ซึ่งใน Part A ของบทนี้จะกล่าวถึงหลักในการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนเนื่องจากการกระตุ้นแบบฮาร์โมนิก หลังจากนั้นใน Part B จะได้กล่าวถึงวิธีการประยุกต์ใช้หลักการใน Part A กับปัญหาทางวิศวกรรมบางปัญหา เช่น การสั่นสะเทือนจากความไม่สมดุล การกระตุ้นจากการสั่นสะเทือนของพื้น หรือการประยุกต์ใช้หลักการนี้ในการวัดการสั่นสะเทือน ส่วนการสั่นสะเทือนเนื่องจากการกระตุ้นลักษณะเป็นคาบรูปแบบใดๆ และการสั่นสะเทือนจากการกระตุ้นแบบพัลส์ ซึ่งมักเกิดจากการกระแทก และการสั่นสะเทือนเนื่องจากการกระตุ้นแบบใดๆ จะกล่าวถึงในบทต่อไป

PART A: Force vibration

2. การสั่นสะเทือนแบบบังคับที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

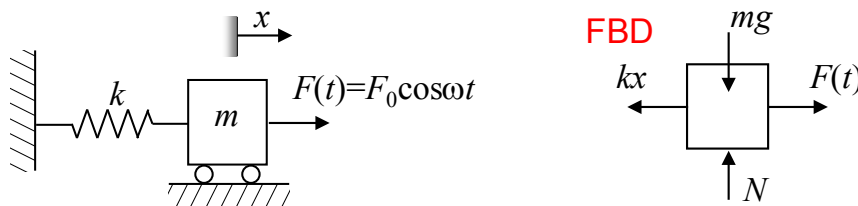
2.1 สมการการเคลื่อนที่ของการสั่นสะเทือนแบบบังคับที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนและผลเฉลย

รูปที่ 4-3 แสดงระบบการสั่นสะเทือนอย่างง่ายที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และมีแรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิกกระทำกับระบบ และแผนผังแรงที่กระทำกับมวล m สำหรับระบบในรูปจะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังสมการ

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos\omega t \quad (4-1)$$

หรือ

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = f_0 \cos\omega t \quad (4-2)$$



รูปที่ 4-3 ระบบการสั่นสะเทือนที่มีแรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิกกระทำกับระบบ

คำตอบหรือผลเฉลย $x(t)$ ของสมการ (4-1) และสมการที่ (4-2) ซึ่งแสดงลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบสามารถแบ่งออกได้เป็นสองส่วน ดังแสดงด้วยสมการ

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (4-3)$$

โดย $x_h(t)$ เรียกว่า Homogeneous solution เป็นคำตอบของสมการ $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$

$x_p(t)$ เรียกว่า Particular solution เป็นคำตอบของสมการ $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos\omega t$

ถึงแม้ว่า $x_h(t)$ จะไม่ใช่คำตอบของสมการการเคลื่อนที่ (4-1) แต่ $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ ก็เป็นคำตอบของสมการ (4-1) เช่นเดียวกับ $x_p(t)$ ดังจะเห็นได้จากเมื่อแทนค่า $x(t)$ ในสมการ (4-3) ลงในสมการ (4-1) แล้ว ก็จะทำให้สมการ (4-1) เป็นจริงเช่นกัน และเมื่อเปรียบเทียบ $x(t)$ กับ $x_p(t)$ แล้ว จะพบว่า $x(t)$ เป็นคำตอบในรูปที่สมบูรณ์กว่า สำหรับความหมายทางกายภาพของคำตอบทั้งสองส่วนจะอธิบายถึงในหัวข้อถัดๆ ไป

เนื่องจาก $x_h(t)$ เป็นคำตอบของสมการ $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$ ซึ่งเป็นสมการแสดงการสั่นสะเทือนอย่างอิสระ ดังนั้น $x_h(t)$ จึงมีรูปแบบเช่นเดียวกับการสั่นสะเทือนแบบอิสระของระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ดังแสดงด้วยสมการ

$$x_h(t) = A_1 \sin\omega_n t + A_2 \cos\omega_n t \quad (4-4)$$

หรือ

$$x_h(t) = A \sin(\omega_n t + \phi) \quad (4-5)$$

สำหรับ $x_p(t)$ ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ (4-1) นั้น จากการสังเกตพฤติกรรมการสั่นสะเทือนของวัตถุเมื่อมีการกระตุ้นที่มีความถี่ ω มากกระทำแล้ว วัตถุนั้นจะสั่นที่มีความถี่ ω ด้วย และเนื่องจากการกระตุ้นอยู่ในรูปของฟังก์ชัน cosine ลักษณะคำตอบของสมการจึงต้องเป็นฟังก์ชัน cosine ด้วย ถึงจะทำให้เมื่อแทนคำตอบ $x_p(t)$ เข้าไปในสมการ (4-1) สมการจึงเป็นจริง ด้วยเหตุผลดังกล่าว จึงได้ว่า $x_p(t)$ ซึ่งแสดงถึงลักษณะการสั่นสะเทือนจะสามารถเขียนได้ในรูปของสมการ

$$x_p(t) = X \cos\omega t \quad (4-6)$$

โดย X เป็นขนาดของ $x_p(t)$ ซึ่งสามารถหาได้โดยการแทนค่า $x_p(t)$ ลงในสมการ (4-1) เมื่อแทน $x_p(t)$ ลงในสมการ (4-1) จะได้

$$-\omega^2 m X \cos\omega t + k X \cos\omega t = F_0 \cos\omega t$$

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad (4-7)$$

ดังนั้นค่า $x_p(t)$ คือ

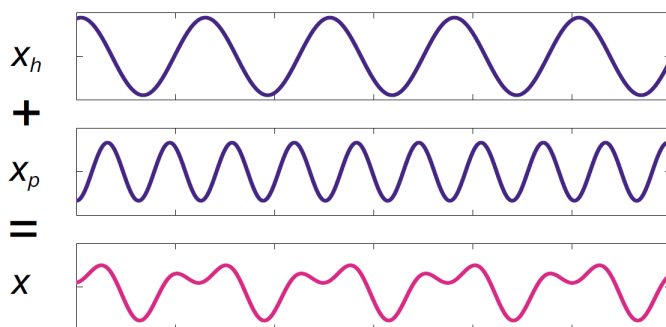
$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos\omega t \quad (4-8)$$

เมื่อรวมคำตอบทั้งสองส่วนเข้าด้วยกัน จะได้ลักษณะการสั่นสะเทือนเมื่อมีการกระตุ้นด้วยความถี่ ω มากกระทำกับระบบดังสมการ

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A_1 \sin\omega_n t + A_2 \cos\omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos\omega t \quad (4-9)$$

โดยค่าคงที่ A_1 และ A_2 สามารถหาได้จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

สำหรับสมการที่ (4-9) แสดงให้เห็นว่าเมื่อให้การกระตุ้นที่ความถี่ ω กับระบบ ระบบจะสั่นที่ความถี่สองความถี่ ได้แก่ความถี่ธรรมชาติ ω_n และความถี่ที่เท่ากับความถี่ที่มากกระตุ้นกระตุ้น ω โดยขนาดของการสั่นที่เท่ากับความถี่ที่มากกระตุ้น ω จะขึ้นอยู่กับ ขนาดของการกระตุ้น และสมบัติของระบบ ได้แก่ความแข็งสปริง และมวล ส่วนขนาดของการสั่นที่ความถี่ธรรมชาติ ω_n จะขึ้นกับสภาวะเริ่มต้นของการสั่นเท่านั้น รูปที่ 4-4 แสดงถึงลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบ x ซึ่งแสดงในรูปด้านล่าง การสั่นสะเทือนนี้เป็นผลรวมของ $x_h(t)$ และ $x_p(t)$ ที่แสดงในรูปด้านบนทั้งสองรูปตามลำดับ



รูปที่ 4-4 การสั่นสะเทือนของระบบ ซึ่งเป็นผลรวมจาก $x_h(t)$ และ $x_p(t)$

2.2 เงื่อนไขค่าเริ่มต้นกับการสั่นสะเทือนแบบบังคับสำหรับระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

ขนาดของการสั่นสะเทือนเนื่องจากการกระตุ้นภายนอก $x_p(t)$ จะขึ้นอยู่กับขนาดของการกระตุ้น และสมบัติของระบบ อย่างไรก็ตามขนาดการสั่นสะเทือน $x_h(t)$ จะขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้นการสั่นสะเทือน ดังแสดงด้วยเทอมค่าคงที่ A_1 และ A_2 ในสมการ (4-9) ค่าคงที่เหล่านี้สามารถหาได้ดังวิธีแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

สมมุติให้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นดังนี้

เงื่อนไขที่ 1 เมื่อเริ่มต้นสั่นสะเทือน วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง x_0 หรือ $x(t=0) = x_0$

เงื่อนไขที่ 2 เมื่อเริ่มต้นสั่นสะเทือน วัตถุมีความเร็ว v_0 หรือ $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = v_0$

จะสังเกตว่า ค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าในสมการที่ (4-9) มีทั้งหมด 2 ตัว ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้เงื่อนไขค่าเริ่มต้น 2 ตัวในการแก้ปัญหา

แทนเงื่อนไขที่ 1 ลงในสมการ (4-9) จะได้

$$x_0 = A_2 + \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

ดังนั้น

$$A_2 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad (4-10)$$

ความเร็วการเคลื่อนที่หาได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการที่ (4-9) ดังนี้

$$\dot{x}(t) = A_1 \omega_n \cos \omega_n t - A_2 \omega_n \sin \omega_n t - \frac{F_0 \omega}{k - m \omega^2} \sin \omega t \quad (4-11)$$

แทนเงื่อนไขที่ 2 ลงในสมการ (4-11) จะได้

$$\dot{x}_0 = v_0 = A_1 \omega_n$$

ดังนั้น

$$A_1 = \frac{v_0}{\omega_n} \quad (4-12)$$

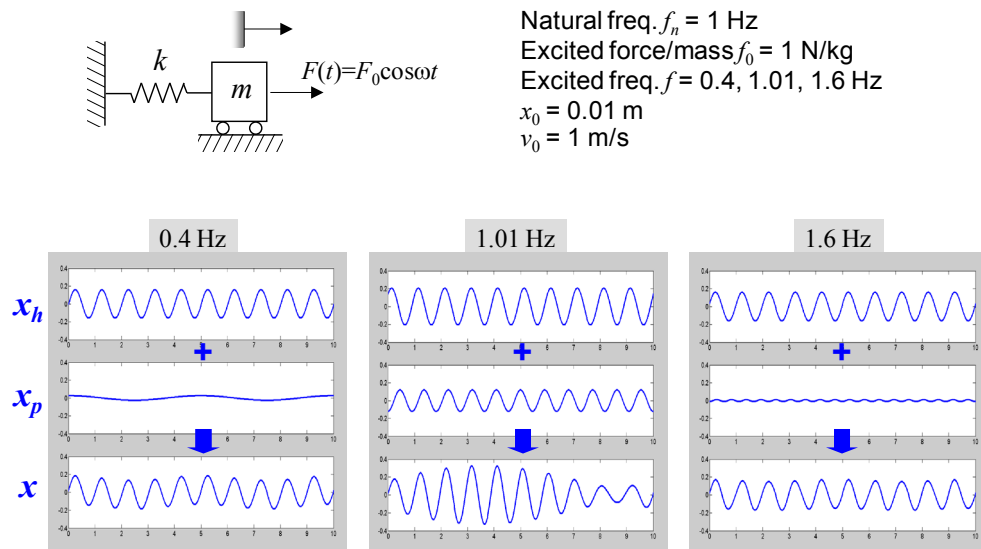
แทนค่า A_1 และ A_2 ที่หาได้ในสมการ (4-9) จะได้สมการแสดงการเคลื่อนที่ดังนี้

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m \omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{F_0}{k - m \omega^2} \cos \omega t \quad (4-13)$$

สมการที่ (4-13) อาจเขียนในอีกรูปหนึ่งได้ดังนี้

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (4-14)$$

รูปที่ 4-5 แสดงตัวอย่างผลของความถี่ของการกระตุ้นต่อลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบ โดยระบบในรูปมีความถี่ธรรมชาติ 1 Hz ระบบถูกกระตุ้นด้วยแรงที่มีขนาดเท่ากันแต่ความถี่ของการกระตุ้นต่างกัน และมีเงื่อนไขเริ่มต้นการสั่นเหมือนกัน โดยความถี่ที่กระตุ้นในตัวอย่างเป็นความถี่ที่น้อยกว่าความถี่ธรรมชาติ ความถี่ใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติ และความถี่มากกว่าความถี่ธรรมชาติ จากรูปจะเห็นว่าถึงแม้ขนาดการกระตุ้นจะมีค่าเท่าเดิมทุกๆ กรณี แต่หากมีความถี่การกระตุ้นที่แตกต่างกันแล้ว ระบบก็จะสั่นสะเทือนต่างกันได้



รูปที่ 4-5 ผลของความถี่การกระตุ้นต่อลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบ

2.3 เฟสของการสั่นสะเทือน

เฟสของการสั่นสะเทือน (Phase of the vibration response) แสดงถึงจังหวะของการสั่นสะเทือน สำหรับการสั่นสะเทือนที่เป็นแบบฮาร์โมนิกนั้น เฟสมักจะบอกด้วยมุม หน่วยเป็นองศาหรือเรเดียน โดยในการสั่นสะเทือนแบบบังคับนั้น เฟสจะหมายถึงความแตกต่างกันของจังหวะการกระตุ้นภายนอกกับจังหวะการสั่นสะเทือนของระบบ ตัวอย่างเช่น ระบบในรูปที่ 4-5 ได้รับการกระตุ้นแบบฮาร์โมนิก หากในขณะนั้นแรงกระตุ้นมีทิศทางไปทางขวา และมวลก็เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยพร้อมๆ กัน จะเรียกว่าเฟสของการกระตุ้นกับเฟสการสั่นสะเทือนตรงกัน หรือความต่างเฟส 0° แต่ถ้าหากในขณะนั้นแรงกระตุ้นมีทิศทางไปทางขวา แต่มวลเคลื่อนที่ไปทางซ้ายตรงกันข้ามกันพอดี จะเรียกกรณีนี้ว่าเฟสของการกระตุ้นตรงข้ามกับเฟสของการสั่นสะเทือน หรือความต่างเฟส 180° ความต่างเฟสอาจจะมีค่าใดๆ ก็ได้ขึ้นอยู่กับว่าจังหวะการกระตุ้น กับจังหวะการสั่นสะเทือนแตกต่างกันเท่าใด

พิจารณาเทอมที่ 3 ของสมการ (4-14) ซึ่งแสดงการสั่นสะเทือน x_p เนื่องจากแรงภายนอก $F_0(t)$ ซึ่งเขียนในรูปของแรงต่อมวล $f_0(t)$ ดังนี้

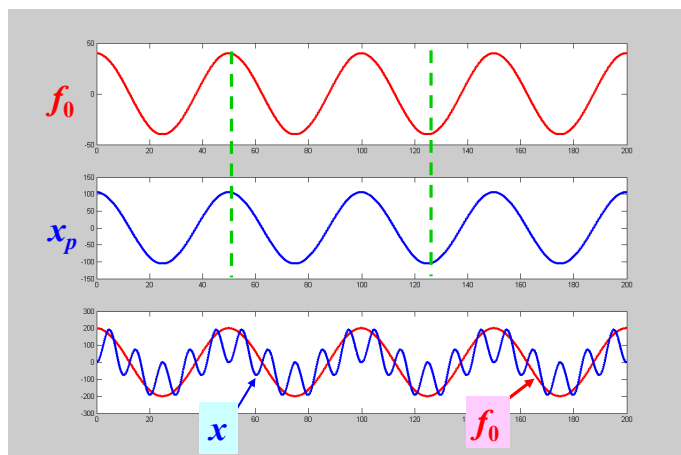
$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (4-15)$$

$$f_0(t) = f_0 \cos \omega t \quad (4-16)$$

จากสมการที่ (4-15) และ (4-16) จะเห็นว่าหากความถี่ของแรงกระตุ้นมีค่าน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติของระบบแล้ว สัมประสิทธิ์ของเทอม $\cos \omega t$ ของทั้งสองสมการจะมีค่าเป็นบวก (หรือลบ) เหมือนกัน ซึ่งแปลความได้ว่าจังหวะของแรงและการสั่นสะเทือนตรงกันหรือเฟสตรงกัน แต่หากความถี่ของแรงกระตุ้นมากกว่าความถี่ธรรมชาติ สัมประสิทธิ์ของเทอม $\cos \omega t$ จะมีค่าเป็นบวกลบต่างกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าจังหวะของแรงและการสั่นสะเทือนตรงกันข้ามกัน หรือเฟสต่างกัน 180° หรืออาจเรียกว่าเฟสตรงข้ามกัน

Natural freq. $f_n = 0.1$ Hz
 Excited force/mass $f_0 = 40$ N/kg
 Excited freq. $f = 0.02$ Hz
 $x_0 = 0.1$ m
 $v_0 = 0$ m/s

$$\omega/\omega_n = 0.2$$



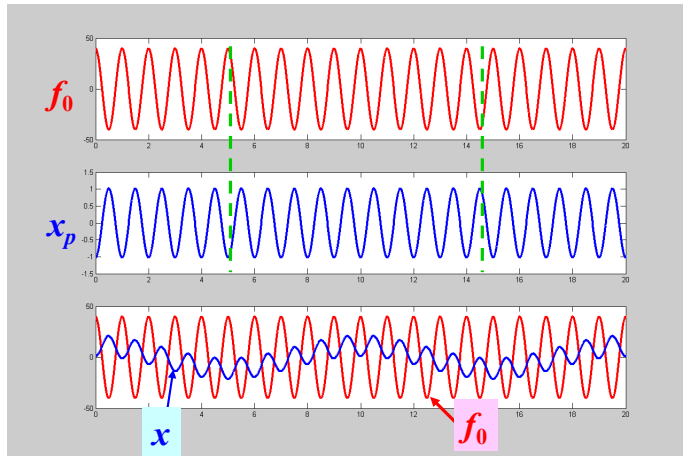
รูปที่ 4-6 การสั่นสะเทือนที่เฟสของการกระตุ้นตรงกับเฟสของการสั่นสะเทือน

รูปที่ 4-6 แสดงตัวอย่างการสั่นสะเทือนเมื่อความถี่ธรรมชาติมีค่ามากกว่าความถี่ที่มากกระตุ้น กรณีนี้จึงได้ว่าเฟสของการสั่นสะเทือนจะตรงกับเฟสของแรงกระตุ้น ซึ่งจะเห็นได้จากกราฟของ x_p ซึ่งมีเฟสตรงกับเฟสของการกระตุ้น f กราฟทั้งสองมีค่ามากและน้อยในจังหวะเดียวกัน สำหรับรูปด้านล่างแสดงกราฟระหว่างค่า x ซึ่งเป็นผลรวมของ x_h และ x_p เมื่อเทียบกับค่า f

รูปที่ 4-7 แสดงตัวอย่างการสั่นสะเทือนเมื่อความถี่ธรรมชาติมีค่าน้อยกว่าความถี่ที่มากกระตุ้น เฟสการสั่นสะเทือนในกรณีนี้จึงตรงข้ามกับเฟสของแรงกระตุ้น ซึ่งจะเห็นได้จากกราฟของ x_p และ f ที่มีค่ามากและน้อยตรงกันข้ามกัน เมื่อตัวหนึ่งมีค่ามากอีกตัวหนึ่งจะมีค่าน้อย เมื่อตัวหนึ่งมีค่าน้อยอีกตัวหนึ่งจะมีค่ามาก รูปด้านล่างแสดงกราฟระหว่างค่า x ซึ่งเป็นผลรวมของ x_h และ x_p เมื่อเทียบกับค่า f

Natural freq. $f_n = 0.1$ Hz
 Excited force/mass $f_0 = 40$ N/kg
 Excited freq. $f = 1$ Hz
 $x_0 = 0.1$ m
 $v_0 = 0$ m/s

$\omega/\omega_n = 10$



รูปที่ 4-7 การสั่นสะเทือนที่เฟสของการกระตุ้นตรงกันข้ามกับเฟสของการสั่นสะเทือน

2.4 บีท (Beat)

พิจารณาสมการแสดงการสั่นสะเทือนแบบบังคับ ในสมการที่ (4-14) ซึ่งแสดงอีกครั้งด้านล่าง

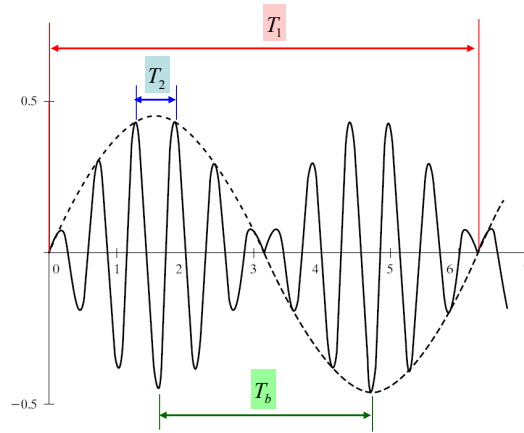
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (4-17)$$

ในกรณีที่เงื่อนไขเริ่มต้นสั่นเป็นศูนย์ คือ $x_0 = 0$ และ $v_0 = 0$ (กรณีนี้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นศูนย์ทั้งสองตัวได้ ซึ่งแสดงถึงในขณะที่ระบบหยุดนิ่ง มีแรงกระทำภายนอกให้วัตถุเริ่มสั่น) จะสามารถเขียนสมการที่ (4-17) ได้ดังนี้

$$x(t) = -\frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega_n t + \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t)$$

$$x(t) = \frac{2f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \left(\frac{\omega_n - \omega}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_n + \omega}{2} t \right) \quad (4-18)$$

หากความถี่ธรรมชาติ ω_n มีค่าใกล้เคียงกับความถี่ที่มากกระตุ้น ω สมการที่ (4-18) สามารถเขียนเป็นกราฟการสั่นสะเทือนได้ดังรูปที่ 4-8 จากรูปจะพบว่าคาบการสั่นสะเทือนจะสามารถแบ่งออกได้เป็นสองส่วน ได้แก่คาบการสั่นสะเทือน T_1 ซึ่งเป็นคาบการเปลี่ยนแปลงขนาดของกรอบ (envelope) ของสัญญาณ และคาบการสั่นสะเทือน T_2 ซึ่งเป็นคาบของการเปลี่ยนแปลงย่อยๆ โดยค่าของ T_1 และ T_2 สอดคล้องกับความถี่ในทอมฟังก์ชันไซน์ที่แสดงในสมการที่ (4-18) และสามารถหาได้จากสมการ



รูปที่ 4-8 สัญญาณบีท

$$T_1 = \frac{2\pi}{|\omega_n - \omega|/2} \quad (4-19)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{(\omega_n + \omega)/2} \quad (4-20)$$

การเปลี่ยนแปลงในลักษณะนี้อาจเรียกอีกอย่างว่า Amplitude Modulation (AM) ซึ่งหลักการนี้มีใช้ ในการส่งสัญญาณวิทยุในระยะทางไม่ไกลมากนัก นอกจากคาบเวลา T_1 และ T_2 ข้างต้นแล้ว ลักษณะ สัญญาณนี้ยังสามารถพิจารณาว่าเป็นสัญญาณคาบ โดยมีคาบของสัญญาณเท่ากับ T_b ดังแสดงในรูปที่ 4-8 และเขียนได้ตามสมการ

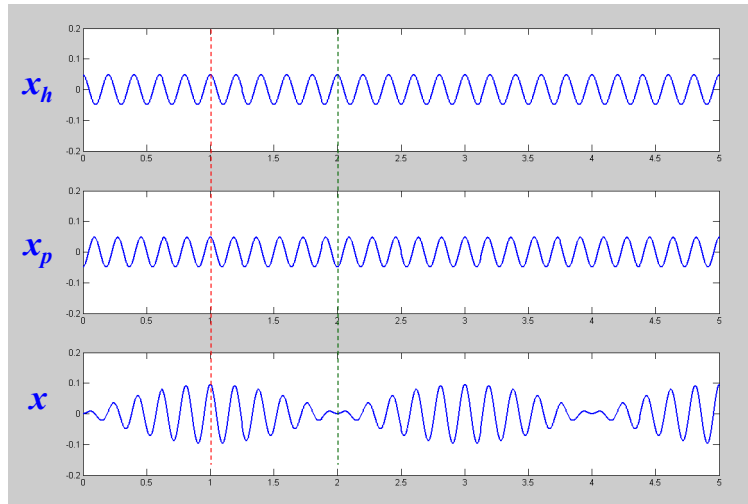
$$T_b = \frac{T_1}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_n - \omega|} \quad (4-21)$$

เรียกคาบสัญญาณนี้ว่าคาบของบีท ส่วนความถี่ที่สัมพันธ์กับคาบในสมการ (4-21) เรียกว่าความถี่บีท ดัง แสดงด้วยสมการ

$$\omega_b = |\omega_n - \omega| \quad (4-22)$$

รูปที่ 4-9 แสดงการเกิดสัญญาณบีทจากสัญญาณ x_h และ x_p ที่มีความถี่ใกล้เคียงกัน จากรูปจะ พบว่า ส่วนของสัญญาณบีทที่มีขนาดมาก (ส่วนที่แสดงด้วยเส้นสีแดง) เกิดมาจากการเสริมกันของสัญญาณ x_h และ x_p ช่วงที่มีเฟสตรงกัน และส่วนที่มีขนาดเล็กในสัญญาณบีท (ส่วนที่แสดงด้วยเส้นสีเขียว) เกิดจาก การหักล้างกันของสัญญาณ x_h และ x_p ช่วงที่มีเฟสต่างกัน

Natural freq. $f_n = 5$ Hz
 Excited force/mass $f_0 = 10$ N/kg
 Excited freq. $f = 5.5$ Hz
 $x_0 = 0$ m
 $v_0 = 0$ m/s



รูปที่ 4-9 การเกิดบีบ

2.5 การสั่นพ้อง (Resonance)

เมื่อความถี่ของการกระตุ้น ซึ่งอาจอยู่ในรูปแรง แรงบิด หรือการกระตุ้นโดยการขจัด มีค่าเท่ากับ ความถี่ธรรมชาติของระบบ ขนาดของการสั่นสะเทือนจะมีค่ามาก หากพิจารณาค่า x_p ในสมการ (4-8) จะได้ว่า ส่วนของขนาดจะมีค่ามากจนถึงอนันต์ อย่างไรก็ตามในระบบจริงเมื่อให้การกระตุ้นที่ความถี่ธรรมชาติ ขนาดการสั่นสะเทือนไม่ได้สูงจนเท่ากับอนันต์ในทันที แต่ขนาดการสั่นสะเทือนจะค่อยๆ เพิ่มขึ้น ดังนั้นสมการที่ (4-8) จึงไม่อาจแทนพฤติกรรมของการสั่นสะเทือนที่ตำแหน่งสั่นพ้องได้อย่างถูกต้อง และค่าอนันต์ในสมการคณิตศาสตร์นั้น ในความเป็นจริงก็จะไม่เกิดเหตุการณ์เช่นนั้น เนื่องจากขนาดการสั่นสะเทือนจะค่อยๆ สูงขึ้นจนเมื่อเกินกว่าค่าความแข็งแรงของวัสดุยึดหยุ่นจะรับไหวได้ ระบบก็จะพังลง ในกรณีการสั่นพ้องสมการซึ่งแสดงค่า x_p สามารถเขียนได้ดังนี้

$$x_p(t) = tX \sin \omega t \quad (4-23)$$

โดย X คือตัวแปรที่แสดงความรวดเร็วในการเพิ่มขึ้นของขนาดการสั่นสะเทือน ส่วนความถี่ $\omega = \omega_n$ จากสมการที่ (4-23) จะได้

$$\dot{x}_p(t) = X \sin \omega t + t\omega X \cos \omega t$$

และ

$$\ddot{x}_p(t) = 2\omega X \cos \omega t - t\omega^2 X \sin \omega t \quad (4-24)$$

ค่า X หาได้โดยการแทนค่า x_p และ \ddot{x}_p ลงในสมการการเคลื่อนที่ (4-2) (หรือสมการ (4-1)) ดังนั้นจะได้

$$2\omega X \cos \omega t - t\omega^2 X \sin \omega t + \omega^2 tX \sin \omega t = f_0 \cos \omega t$$

เพราะฉะนั้น

$$X = \frac{f_0}{2\omega} \quad (4-25)$$

ดังนั้น

$$x_p(t) = \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t \quad (4-26)$$

เมื่อรวมการสั่นสะเทือนทั้งหมด ซึ่งเป็นผลมาจาก x_h ในสมการ (4-4) และ x_p ในสมการ (4-26) จะได้

$$x = x_h(t) + x_p(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t \quad (4-27)$$

โดยความถี่ $\omega = \omega_n$

หากกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้ $x(0) = x_0$ และ $\dot{x}(0) = v_0$ จะสามารถหาค่าคงที่ A_1 และ A_2 ได้ดังนี้ จากสมการ (4-27) ความเร็วของการเคลื่อนที่หาได้จาก

$$\dot{x} = A_1 \omega \cos \omega t - A_2 \omega \sin \omega t + \frac{f_0}{2\omega} \sin \omega t + \frac{f_0}{2} t \cos \omega t \quad (4-28)$$

แทนเงื่อนไขค่าเริ่มต้นลงในสมการที่ (4-27) และ (4-28) จะได้

$$x_0 = A_2$$

และ

$$v_0 = A_1 \omega$$

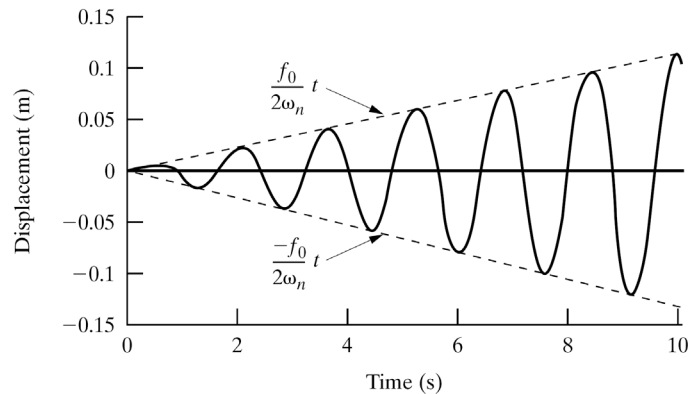
หรือ

$$A_1 = v_0 / \omega$$

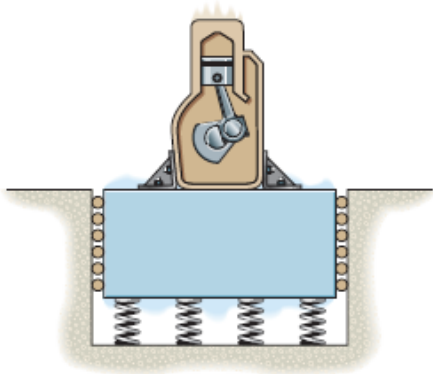
แทนค่าคงที่ลงในสมการแสดงการสั่นสะเทือนที่ตำแหน่งสั่นพ้อง (4-27) จะได้

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t + \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t \quad (4-29)$$

รูปที่ (4-10) แสดงการสั่นพ้อง เมื่อเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นศูนย์ ($x_0 = 0$ และ $v_0 = 0$)

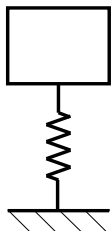


รูปที่ 4-10 การสั่นพ้องเมื่อเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นศูนย์



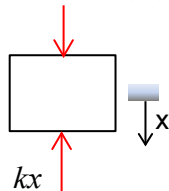
ตัวอย่างที่ 4-1 The engine is mounted on a foundation block which is spring-supported. Describe the steady-state vibration of the system if the block and engine have a total weight of 7500 N (≈ 750 kg) and the engine, when running, creates an impressed force $F = 250\sin(2t)$ N, where t is in seconds. Assume that the system vibrates only in the vertical direction, with the positive displacement measured downward, and that the total stiffness of the springs can be represented as $k = 30$ kN/m. Also determine the rotational speed ω of the engine which will cause resonance. [R. C. Hibbeler 22-55,56]

Model



FBD

$$F = 250\sin(2t)$$



จากที่โจทย์สามารถเขียนแบบจำลองแสดงระบบการสั่นสะเทือน และ FBD ได้ดังรูป และเขียน EOM ได้ดังนี้

$$[\Sigma F = m\ddot{x}] \quad m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \quad \text{EOM}$$

คำตอบของสมการ EOM แบ่งออกได้เป็น 2 ส่วน คือ x_h และ x_p เนื่องจากไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนในระบบ ดังนั้นจะเขียน x_h ได้ดังนี้

$$x_h = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t \quad (1)$$

โดย $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{30 \times 10^3 / (7500 / 9.81)} = 6.26 \text{ rad/s}$

สำหรับ x_p จะอยู่ในรูปแบบสมการ $x_p = X \sin \omega t \quad (2)$

แทนค่า x_p ลงในสมการ EOM จะได้

$$-\omega^2 mX \sin \omega t + kX \sin \omega t = F_0 \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

ดังนั้นคำตอบทั้งหมดซึ่งแสดงการสั่นสะเทือนของระบบนี้จะเขียนได้ดังสมการ

$$x = x_h + x_p = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t \quad (3)$$

เมื่อสมมุติให้ที่เวลา $t=0$ การขจัดเป็น x_0 และความเร็วเริ่มต้นเป็น v_0 จะสามารถหาค่า A_1, A_2 ได้ดังนี้

เมื่อ $t=0$, $x=x_0$ แทนในสมการ (3) จะได้ $x_0 = A_2$

หาอนุพันธ์ของสมการ (3) จะได้

$$\dot{x} = v = A_1 \omega_n \cos \omega_n t - A_2 \omega_n \sin \omega_n t + \frac{F_0 \omega}{k - m \omega^2} \cos \omega t \quad (4)$$

เมื่อ $t=0$, $v=v_0$ แทนลงในสมการ (4) จะได้

$$v_0 = A_1 \omega_n + \frac{F_0 \omega}{k - m \omega^2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{v_0}{\omega_n} - \frac{F_0}{k - m \omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

แทนค่าคงที่ที่หาได้ลงในสมการ (3) จะได้สมการแสดงการสั่นสะเทือนของระบบ ดังนี้

$$x = \left[\frac{v_0}{\omega_n} - \frac{F}{k - m \omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right] \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t + \frac{F_0}{k - m \omega^2} \sin \omega t \quad \underline{\text{ANS}}$$

เนื่องจากไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนในระบบ ทั้ง x_n และ x_p จึงเป็นการสั่นสะเทือนในสภาวะคงตัวทั้งหมด อย่างไรก็ตามในความเป็นจริง การหน่วงอาจเกิดขึ้นจากปัจจัยต่างๆ เช่น การสูญเสียพลังงานในการเสียดรูปของวัตถุ แรงเสียดทาน (แต่อาจมีขนาดเล็ก จึงละทิ้งไปในการสร้างแบบจำลอง) ดังนั้น การสั่นสะเทือนในสภาวะคงตัวในความหมายทั่วไป จึงมักจะหมายถึง x_p เท่านั้น ในกรณีที่มีความหน่วงเกิดขึ้น การสั่นสะเทือนในสภาวะคงตัวคือ

$$x = x_p = \frac{F_0}{k - m \omega^2} \sin \omega t = \left(\frac{250}{30 \times 10^3 - \frac{7500}{9.81} \times 2^2} \right) \sin 2t$$
$$= (9.28 \times 10^{-3}) \sin 2t \quad \text{m} \quad \underline{\text{ANS}}$$

ดังนั้นจะได้ว่าขนาดการสั่นสะเทือนในกรณีที่มีความหน่วงขนาดเล็กอยู่ด้วยคือ 9.28 มม. สำหรับการสั่นพ้องจะเกิดเมื่อความถี่ของแรงกระตุ้นเท่ากับความถี่ธรรมชาติของวัตถุ ดังนี้

$$\omega = 2\pi f = \omega_n = 6.26 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad f = 1 \text{ Hz (60 rpm)} \quad \underline{\text{ANS}}$$

3. การสั่นสะเทือนแบบบังคับที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

3.1 สมการการเคลื่อนที่ของการสั่นสะเทือนแบบบังคับที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนและผลเฉลย

รูปที่ 4-11 แสดงระบบการสั่นสะเทือนที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และถูกกระทำด้วยแรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิก สำหรับระบบในรูปจะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังสมการ

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega t \quad (4-30)$$

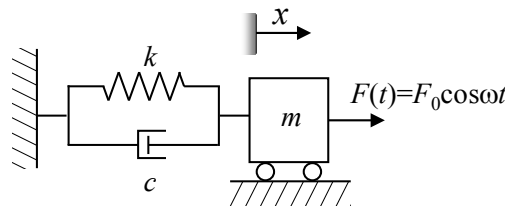
หรือ
$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = f_0 \cos \omega t \quad (4-31)$$

คำตอบหรือผลเฉลย $x(t)$ ของสมการ (4-30) และสมการที่ (4-31) ซึ่งแสดงลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบสามารถแบ่งออกได้เป็นสองส่วน เช่นเดียวกับกรณีระบบที่ไม่มีตัวหน่วง ดังแสดงด้วยสมการ

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (4-32)$$

โดย $x_h(t)$ คือ Homogeneous solution เป็นคำตอบของสมการ $\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0$

$x_p(t)$ คือ Particular solution เป็นคำตอบของสมการ $\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = f_0 \cos \omega t$



รูปที่ 4-11 ระบบการสั่นสะเทือนแบบบังคับที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

เนื่องจาก $x_h(t)$ เป็นคำตอบของสมการ $\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0$ ซึ่งเป็นสมการเดียวกับสมการที่แสดงการสั่นสะเทือนอย่างอิสระ ดังนั้นคำตอบจึงเป็นเช่นเดียวกับคำตอบของการสั่นสะเทือนอย่างอิสระที่แสดงไว้ในบทก่อนหน้า โดยคำตอบสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กรณี ตามค่าของอัตราส่วนการหน่วงของระบบ ดังนี้

1. กรณีที่อัตราส่วนการหน่วงมีค่าระหว่าง 0-1 ($0 < \zeta < 1$) หรือ Under damped motion

$$x_h(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (4-33)$$

เมื่อ
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (4-34)$$

และ A และ ϕ เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นการสั่น

2. กรณีที่อัตราส่วนการหน่วงมีค่าเท่ากับ 1 ($\zeta = 1$) หรือ Critically damped motion

$$x_h(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\omega_n t} \quad (4-35)$$

เมื่อ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นการสั่น

3. กรณีที่อัตราส่วนการหน่วงมีค่ามากกว่า 1 ($\zeta > 1$) หรือ Over damped motion

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (a_1 e^{-(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + a_2 e^{+(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t}) \quad (4-36)$$

เมื่อ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นการสั่น

สำหรับ $x_p(t)$ ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ (4-30) หรือ (4-31) นั้น ก็สามารถหาได้จากการสังเกตพฤติกรรมการสั่นสะเทือน หรือจากการแก้สมการอนุพันธ์ เช่นเดียวกับกรณีของการสั่นที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน เนื่องจากวัตถุเมื่อมีการกระตุ้นที่มีความถี่ ω มากกระทำแล้ว วัตถุนั้นจะสั่นที่มีความถี่ ω ด้วย และเนื่องจากการกระตุ้นอยู่ในรูปของฟังก์ชัน cosine ลักษณะคำตอบของสมการจึงต้องเป็นฟังก์ชัน sine หรือ cosine ด้วย ถึงจะทำให้เมื่อแทนคำตอบ $x_p(t)$ เข้าไปในสมการ (4-31) แล้วสมการจึงมีโอกาสเป็นจริงได้ ด้วยเหตุผลดังกล่าว จึงได้ว่า $x_p(t)$ จะสามารถเขียนได้ในรูปของสมการ

$$x_p(t) = A_s \cos(\omega t) + B_s \sin(\omega t) \quad (4-37)$$

หรือ

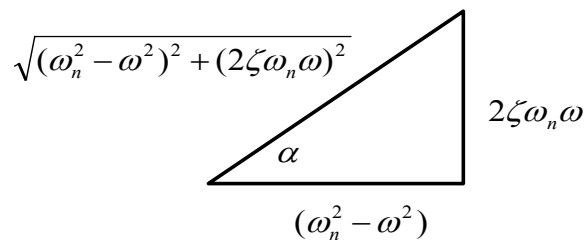
$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \theta) \quad (4-38)$$

เนื่องจาก $x_p(t)$ เป็นคำตอบของสมการ (4-31) ค่าคงที่ X และ θ (หรือ A_s และ B_s) สามารถหาได้โดยแทน $x_p(t)$ ในสมการ (4-38) (หรือสมการ (4-37)) ลงในสมการ (4-31) ดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}_p(t) + \omega_n^2x_p(t) &= f_0 \cos\omega t \\ -\omega^2 X \cos(\omega t - \theta) - 2\zeta\omega_n\omega X \sin(\omega t - \theta) + \omega_n^2 X \cos(\omega t - \theta) &= f_0 \cos\omega t \\ X \cdot [(\omega_n^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \theta) - 2\zeta\omega_n\omega \sin(\omega t - \theta)] &= f_0 \cos\omega t \\ X \cdot \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \theta) - 2\zeta\omega_n\omega \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} &= f_0 \cos\omega t \end{aligned}$$

ให้ $\frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \cos\alpha$ และ $\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \sin\alpha$ ดังรูปที่ 4-12 จะได้

$$\begin{aligned} X \cdot \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \cdot [\cos\alpha \cdot \cos(\omega t - \theta) - \sin\alpha \cdot \sin(\omega t - \theta)] &= f_0 \cos\omega t \\ X \cdot \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} \cdot \cos(\omega t - \theta + \alpha) &= f_0 \cos\omega t \end{aligned} \quad (4-39)$$



รูปที่ 4-12 มุมเฟสของการสั่นสะเทือนแบบบังคับ

จากสมการที่ (4-39) สมการจะเป็นจริงได้เมื่อ

$$X \cdot \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2} = f_0$$

หรือ
$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \quad (4-40)$$

และ
$$\cos(\omega t - \theta + \alpha) = \cos \omega t$$

หรือ
$$\theta = \alpha = \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (4-41)$$

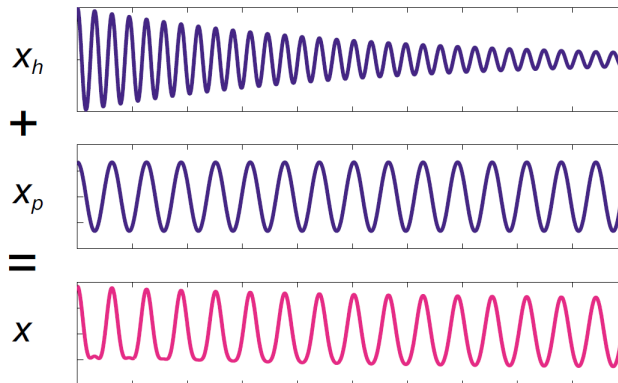
จากสมการที่ (4-38), (4-40) และ (4-41) ทำให้สามารถเขียน $x_p(t)$ ได้ดังสมการ

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)\right) \quad (4-42)$$

เมื่อรวมคำตอบทั้งสองส่วนคือ $x_h(t)$ จากสมการ (4-33) หรือ (4-35) หรือ (4-36) กับ $x_p(t)$ จากสมการ (4-42) เข้าด้วยกันจะได้ ผลเฉลยซึ่งแสดงถึงลักษณะการสั่นสะเทือน $x(t)$ ตัวอย่างของลักษณะการสั่นสะเทือนแบบบังคับของระบบที่เป็นแบบ Under damped motion แสดงดังสมการ

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) + X \cos(\omega t - \theta) \quad (4-43)$$

ตัวอย่างกราฟการสั่นสะเทือนของสมการที่ (4-43) แสดงในรูปที่ 4-13 จากสมการที่ (4-43) และรูปที่ 4-13 จะได้ว่าส่วน $x_h(t)$ จะมีค่าลดลง และหายไปเมื่อเวลาผ่านไปนานเพียงพอ แต่ส่วน $x_p(t)$ จะคงอยู่ตราบที่ยังมีแรงภายนอก F_0 มากระทำ ดังนั้นการสั่นสะเทือน $x(t)$ ในช่วงแรกจึงมีผลจากทั้ง $x_h(t)$ และ $x_p(t)$ แต่เมื่อเวลาผ่านไป $x(t)$ จะมีค่าเท่ากับ $x_p(t)$



รูปที่ 4-13 ตัวอย่างกราฟแสดงการสั่นสะเทือนแบบบังคับของระบบที่เป็น Under damped motion

เนื่องจากส่วน $x_h(t)$ (ไม่ว่าจะเป็นระบบ Under damped motion, Critically damped motion หรือ Over damped motion) จะมีผลเพียงแค่ช่วงต้นๆ ของการสั่นเท่านั้น จึงมีชื่อเรียกว่า ผลตอบสนองชั่วขณะ (Transient response) ส่วน $x_p(t)$ ที่มีผลตลอดตราบที่ยังมีแรงภายนอกกระทำมีชื่อเรียกว่า ผลตอบสนอง

ในสภาวะคงตัว (Steady state response) ในปัญหาการสั่นแบบบังคับ โดยทั่วๆ ไปมักจะสนใจส่วนของผลตอบสนองในสภาวะคงตัวเนื่องจาก ผลตอบสนองชั่วขณะจะหายไปในเวลาไม่นานหลังจากเริ่มเกิดการสั่นสะเทือน

3.2 ผลตอบสนองในสภาวะคงตัวที่ความถี่แรงกระตุ้นต่างๆ

ขนาดของการสั่นสะเทือนในสภาวะคงตัวแสดงดังสมการ (4-40) และนำมาแสดงอีกครั้งในที่นี้

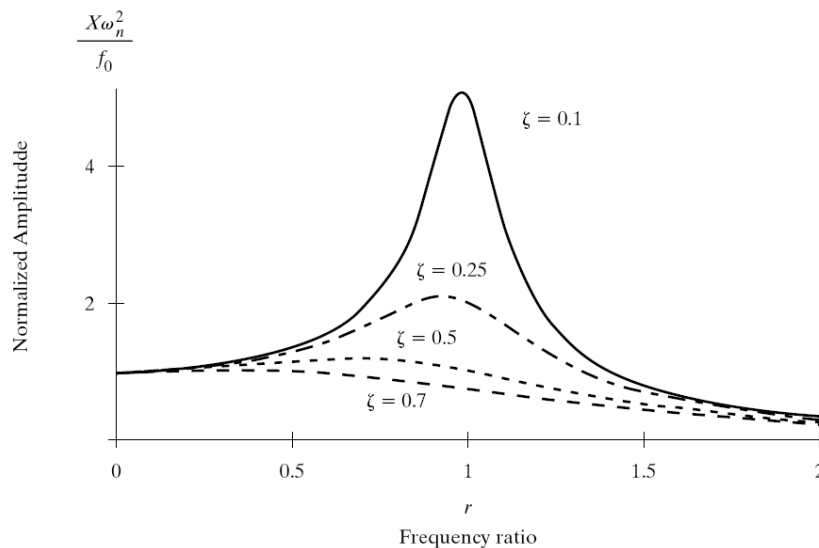
$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \quad (4-40)$$

จากสมการที่ (4-40) จะเห็นว่าขนาดการสั่นสะเทือน X ขึ้นอยู่กับทั้งลักษณะของระบบการสั่นสะเทือน (ได้แก่ค่า m, c, k ซึ่งแสดงออกโดยตัวแปร ω_n และ ζ) และลักษณะของแรงที่กระทำทั้งหมด (f_0) และความถี่ของแรงกระทำ (ω) สมการที่ (4-40) สามารถจัดรูปได้ดังสมการ

$$\frac{Xk}{F_0} = \frac{X\omega_n^2}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (4-44)$$

โดย $r = \omega/\omega_n$

รูปที่ 4-14 แสดงความสัมพันธ์ที่แสดงในสมการที่ (4-44) โดยสมมุติให้ระบบการสั่นสะเทือนระบบหนึ่งถูกกระทำด้วยแรงขนาดคงที่ แทนที่แสดงเทอมไรมิติทางด้านซ้ายของสมการซึ่งสัมพันธ์กับขนาดการสั่นสะเทือน ส่วนแกนนอนแสดงเทอมไรมิติ r ซึ่งสัมพันธ์กับความถี่ของแรงกระตุ้น



รูปที่ 4-14 ความสัมพันธ์ของขนาดการสั่นสะเทือนที่ความถี่แรงกระตุ้นต่างๆ

จากรูปจะเห็นว่าถึงแม้ระบบการสั่นสะเทือนจะถูกกระตุ้นด้วยแรงขนาดคงที่ แต่ถ้าหากความถี่ของแรงกระตุ้นแตกต่างกัน ก็จะทำให้ขนาดของการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นแตกต่างกันได้ โดยหากระบบถูกกระตุ้นที่ความถี่ต่ำๆ ขนาดการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นจะใกล้เคียงกับค่าการเสียรูปเมื่อระบบถูกแรงขนาดเท่ากันนี้กระทำในสภาวะสมดุล (Static deformation) ขนาดการสั่นสะเทือนจะเพิ่มมากขึ้นหากความถี่การกระตุ้นเพิ่มมากขึ้น และการสั่นสะเทือนจะมีขนาดมาก เมื่อระบบถูกกระตุ้นด้วยแรงที่มีความถี่ใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติ ($r = 1$) ปรากฏการณ์ที่ระบบถูกกระตุ้นด้วยแรงที่มีความถี่เท่ากับความถี่ธรรมชาติ จะเรียกว่า การเกิดการสั่นพ้อง (resonance) และเมื่อเพิ่มความถี่การสั่นสะเทือนให้มากกว่าความถี่ธรรมชาติ ขนาดของการสั่นสะเทือนจะลดลง

เมื่อพิจารณาถึงผลของอัตราส่วนการหน่วงต่อขนาดการสั่นสะเทือนจะพบว่า ยิ่งขนาดของอัตราส่วนการหน่วงมาก ขนาดการสั่นสะเทือนเมื่อระบบถูกแรงที่มีความถี่ใกล้เคียงความถี่ธรรมชาติกระทำจะมีค่าลดลง นอกจากนี้ยังพบว่าความถี่แรงกระตุ้นที่ทำให้เกิดขนาดการสั่นสะเทือนมากที่สุดจะลดลง และห่างจากความถี่ธรรมชาติมากขึ้นเมื่อระบบมีอัตราส่วนความหน่วงมากขึ้น

การหาความถี่ของแรงกระตุ้นที่จะทำให้ขนาดการสั่นสะเทือนมากที่สุด สามารถหาได้โดยวิธีการหาจุดสูงสุดของฟังก์ชันโดยทั่วไป จากความรู้ในวิชาแคลคูลัสจะได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่งสูงสุดของฟังก์ชัน ในกรณีนี้จะได้

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \right) = 0 \quad (4-45)$$

เมื่อแก้สมการที่ (4-45) จะได้

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

หรือ

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (4-46)$$

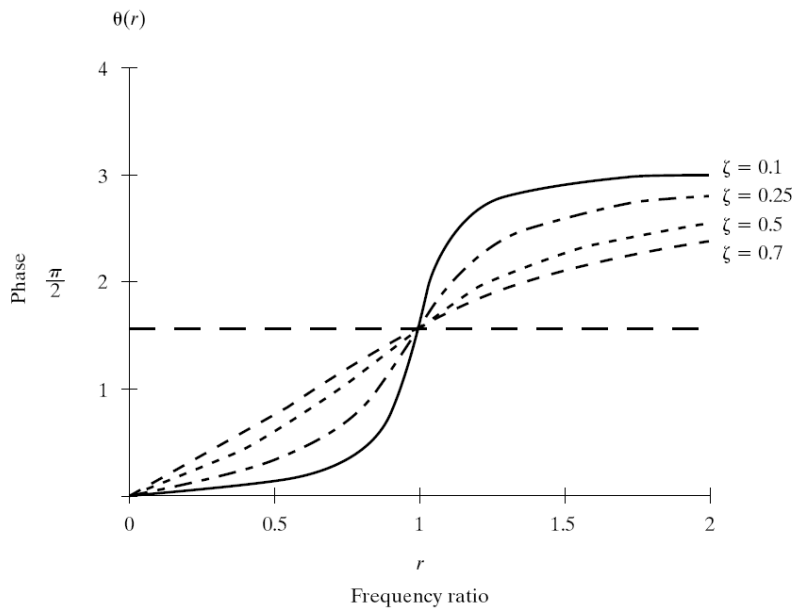
จากสมการที่ (4-46) จะเห็นได้ว่าตำแหน่งที่เกิดการสั่นสะเทือนมากที่สุด ไม่ตรงกับทั้งความถี่ธรรมชาติ ω_n และความถี่ธรรมชาติของระบบที่มีตัวหน่วง ω_d แต่มีค่าน้อยกว่า อย่างไรก็ตามระบบโดยทั่วไปมักมีอัตราส่วนการหน่วงน้อย (เช่น โครงสร้างที่ไม่ได้มี Damper ประกอบอยู่) ดังนั้นตำแหน่งที่ขนาดการสั่นสะเทือนมีค่ามากที่สุด จึงมักเกิดเมื่อแรงกระตุ้นมีความถี่ใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติ

สำหรับขนาดของการสั่นสะเทือนมากที่สุดนั้น สามารถหาได้โดยแทนค่า r หรือ ω จากสมการที่ (4-46) ลงในสมการที่ (4-44) โดยขนาดการสั่นสะเทือนที่มากที่สุดมีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{Xk}{F_0} \right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4-47)$$

สำหรับความสัมพันธ์ของมุมเฟสที่ความถี่ต่างๆ หาได้จากสมการ (4-41) ซึ่งสามารถจัดรูปสมการได้ดังสมการ

$$\theta = \arctan \left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right) \quad (4-48)$$



รูปที่ 4-15 ความสัมพันธ์ของมุมเฟสที่ความถี่แรงกระตุ้นต่างๆ

รูปที่ 4-15 แสดงความสัมพันธ์ของมุมเฟสที่ความถี่ของการกระตุ้นต่างๆ ตามสมการที่ (4-48) เนื่องจากแรงกระตุ้นในระบบการสั่นสะเทือนนี้เท่ากับ $F_0 \cos \omega t$ (สมการ (4-30)) ส่วนลักษณะการสั่นสะเทือนแสดงด้วยสมการ $x_p(t) = X \cos(\omega t - \theta)$ (สมการ (4-38)) ดังนั้นความต่างเฟส θ จึงแสดงจังหวะที่แตกต่างกันของแรงกระทำกับผลลัพธ์การสั่นสะเทือน ทำนองเดียวกับที่อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 2.3 ในบทนี้ และอาจจะพิจารณาได้ง่ายๆ ได้ว่าหากแรงกระทำกับระบบและทิศทางการสั่นสะเทือนค่อนข้างไปในทางเดียวกันแล้ว จะได้ว่ามุมเฟสจะค่อนข้างตรงกัน (ใกล้กับ 0°) แต่หากทิศทางการสั่นสะเทือนตรงค่อนข้างจะตรงกันข้ามกับทิศของแรงกระทำแล้ว จะได้ว่ามุมเฟสจะค่อนข้างตรงข้ามกัน (ใกล้กับ 180°)

จากรูปที่ 4-15 จะพบว่าเมื่อให้แรงกระตุ้นที่ความถี่ต่ำๆ มุมเฟสจะมีค่าใกล้ 0° ซึ่งหมายถึงระบบจะสั่นโดยมีจังหวะใกล้เคียงกับจังหวะของแรงกระตุ้น เมื่อความถี่ของแรงกระตุ้นเพิ่มขึ้น จะพบว่ามุมเฟสซึ่งแสดงถึงจังหวะการสั่นของระบบจะต่างกับแรงกระตุ้นมากขึ้น และมุมเฟสจะมีค่าเท่ากับ 90° ($\pi/2$ rad) เมื่อความถี่แรงกระตุ้นเท่ากับความถี่ธรรมชาติของระบบ และหากให้แรงกระตุ้นที่ความถี่สูงกว่าความถี่ธรรมชาติมากๆ มุมเฟสจะมีค่าเท่ากับ 180° (π rad)

เมื่อพิจารณาถึงผลของความหน่วง จะพบว่าถ้าความหน่วงน้อยการเปลี่ยนแปลงของเฟสเมื่อกระตุ้นด้วยความถี่ที่ห่างจากความถี่ธรรมชาติจะน้อย แต่จะมีการเปลี่ยนแปลงของเฟสอย่างรวดเร็วเมื่อกระตุ้นที่ความถี่ใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติ ($r \approx 1$) แต่ถ้าหากความหน่วงของระบบมีค่ามากขึ้นการเปลี่ยนแปลงของเฟสจะค่อยๆ สม่่าเสมอขึ้น

3.3 การวิเคราะห์ด้วยวิธีการ Frequency response

วิธีการ Frequency response เป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้หาคำตอบหรือผลเฉลยการสั่นสะเทือนของระบบ เช่นเดียวกับวิธีการที่กล่าวไปในหัวข้อที่ผ่านมา วิธีการนี้ทำได้โดยประยุกต์ใช้สูตรของออยเลอร์ (Euler's formula) และแนวคิดของวิธีการ superposition โดยสูตรของออยเลอร์สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \quad (4-49)$$

โดย $j^2 = -1$

พิจารณาสมาการการเคลื่อนที่ของระบบการสั่นสะเทือนพื้นฐาน ดังแสดงในสมการ (4-30) และนำมาเขียนใหม่ดังนี้

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos\omega t \quad (4-50)$$

หากเปลี่ยนด้านขวามือของสมการให้อยู่ในรูป $F_0 e^{j\omega t}$ และคำตอบของสมการเปลี่ยนจาก $x(t)$ เป็น $z(t)$ จะได้ว่า

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = F_0 e^{j\omega t} \quad (4-51)$$

หรือ

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = F_0 (\cos\omega t + j\sin\omega t) \quad (4-52)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (4-52) จะคล้ายคลึงกับสมการ (4-50) เพียงแต่เพิ่มเทอม $F_0(j\sin\omega t)$ ซึ่งเป็นส่วนจินตภาพเข้ามาเท่านั้น เนื่องจากสมการ (4-52) เป็นสมการแบบเชิงเส้น จึงสามารถใช้แนวคิดของการ superposition ได้ ดังนั้นคำตอบของสมการ $z(t)$ (ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน เพราะด้านขวามือเป็นจำนวนเชิงซ้อน) จึงเป็นผลรวมของคำตอบของสมการ (4-50) ซึ่งก็คือ $x(t)$ (ซึ่งเป็นจำนวนจริง) และคำตอบของสมการที่มีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ (4-50) แต่ด้านขวามือเป็น $F_0(j\sin\omega t)$ ดังแสดงในสมการ

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F_0(j\sin\omega t) \quad (4-53)$$

เนื่องจากด้านขวามือของสมการ (4-53) เป็นจำนวนจินตภาพ ดังนั้นคำตอบ $y(t)$ ของสมการนี้จึงเป็นจำนวนจินตภาพด้วย

วิธีการหาคำตอบโดยวิธี Frequency response จะไม่หาคำตอบของสมการที่ (4-50) โดยตรง แต่จะหาคำตอบของสมการ (4-51) แทน โดยคำตอบ $x_p(t)$ ที่ต้องการจะเป็นส่วนจริงของคำตอบ $z(t)$ ของสมการ (4-51) ดังสมการ

$$x_p(t) = \text{Re}(z) \quad (4-54)$$

พิจารณาสมาการที่ (4-51) เนื่องจากด้านขวามือของสมการเป็นฟังก์ชัน exponential ดังนั้นคำตอบ $z(t)$ จึงต้องอยู่ในรูปแบบ exponential ด้วย เพื่อที่เมื่อแทนค่าเข้าในสมการ (4-51) แล้ว จะสามารถทำให้สมการเป็นจริงได้ ด้วยเหตุนี้ $z(t)$ จึงสามารถเขียนได้ดังสมการ

$$z(t) = Z e^{j\omega t} \quad (4-55)$$

โดยที่ค่าคงที่ Z เป็นจำนวนเชิงซ้อน

การหาค่า Z ทำได้โดยแทนค่า $z(t)$ ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ (4-51) ลงในสมการที่ (4-51) ดังนี้

$$m(-\omega^2 Z)e^{j\omega t} + c(j\omega Z)e^{j\omega t} + kZ e^{j\omega t} = F_0 e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} [-\omega^2 m + jc\omega + k] \cdot Z e^{j\omega t} &= F_0 e^{j\omega t} \\ [(k - \omega^2 m) + jc\omega] \cdot Z &= F_0 \end{aligned}$$

หรือ
$$Z = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + jc\omega} F_0 = H(j\omega) F_0 \quad (4-56)$$

โดย
$$H(j\omega) = \frac{Z}{F_0} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + jc\omega} \quad (4-57)$$

จะเห็นว่า $H(j\omega)$ เป็นอัตราส่วนเชิงซ้อนระหว่าง Z ซึ่งอาจจะพิจารณาว่าเป็นการสั่นสะท้อนหรือการตอบสนองของระบบ (output) กับขนาดแรงขาเข้าซึ่งกระตุ้นให้เกิดการสั่น F_0 (input) โดยที่ $H(j\omega)$ เป็นฟังก์ชันของความถี่ด้วย ดังนั้น $H(j\omega)$ จึงมีชื่อเรียกว่า Complex frequency response function จากสมการที่ (4-56) เขียนจำนวนเชิงซ้อนส่วนให้อยู่ในรูปเชิงขั้วจะได้

$$Z = \frac{F_0}{[(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} e^{j\theta} = \frac{F_0}{[(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \cdot e^{-j\theta} \quad (4-58)$$

โดย
$$\theta = \arctan\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (4-59)$$

และจาก $z(t) = Z e^{j\omega t}$ จะได้

$$z(t) = \frac{F_0}{[(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \cdot e^{j(\omega t - \theta)} \quad (4-60)$$

เนื่องจาก $x_p(t) = \text{Re}(z)$ ดังนั้น

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \cdot \cos(\omega t - \theta) \quad (4-61)$$

หรือ
$$x_p(t) = |H(j\omega)| \cdot F_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (4-62)$$

โดย θ หาได้จากสมการที่ (4-59)

สมการที่ (4-61) สามารถเขียนในรูปของ ความถี่ธรรมชาติ อัตราส่วนการหน่วง ได้ดังแสดงในสมการที่ (4-42) และนำมาเขียนใหม่อีกครั้งดังนี้

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)\right) \quad (4-63)$$

จะเห็นว่าการคำนวณทั้งสองวิธีไม่ว่าจะใช้การแก้สมการอนุพันธ์และพื้นฐานทางตรีโกณมิติ หรือใช้วิธีการวิเคราะห์ด้วยวิธี Frequency response ซึ่งใช้พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน จะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง 4-2

For a vibrating system, $m = 10$ kg, $k = 2500$ N/m, and $c = 45$ Ns/m. A harmonic force of amplitude 180 N and frequency 3.5 Hz acts on the mass. If the initial displacement and velocity of the mass are 15 mm and 5m/s, find the complete solution representing the motion of the mass. [Singiresu S. Rao, Mechanical Vibrations 4th edition in SI units 3/33]

จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้สามารถสรุปได้ดังนี้

$$m = 10 \text{ kg}, k = 2500 \text{ N/m}, c = 45 \text{ Ns/m}$$

$$F_0 = 180 \text{ N}, \omega = 2\pi f = 2\pi(3.5) = 21.9911 \text{ rad/s}$$

$$x_0 = 0.015 \text{ m}, v_0 = 5 \text{ m/s}$$

เนื่องจากรูปแบบสมการ EOM เป็นเช่นเดียวกับสมการ $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos \omega t$ ดังนั้นจะสามารถหาคำตอบได้ดังนี้

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} = \frac{180}{[(2500 - 10(21.9911)^2)^2 + (45 \times 21.9911)^2]^{1/2}} = 0.0709 \text{ m}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{45 \times 21.9911}{2500 - 10(21.9911)^2}\right) = -22.9582^\circ (= -0.4007 \text{ rad})$$

$$x_p = X \cos(\omega t - \theta) = 0.0709 \cos(21.9911t + 0.4007) \quad (1)$$

เนื่องจากคำตอบกรณีของการสั่นแบบบังคับ $x = x_h + x_p$ ดังนั้นการหาผลเฉลยที่สมบูรณ์ซึ่งแสดงการสั่นสะท้อนของระบบจึงต้องหาค่า x_h ด้วย อย่างไรก็ตามจำเป็นที่จะต้องรู้ค่า damping ratio เสียก่อนเพื่อที่จะทราบรูปแบบของสมการที่อธิบายการสั่นสะท้อน

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{45}{2\sqrt{2500 \times 10}} = 0.1423$$

เนื่องจากค่า damping ratio < 1 จึงเป็นแบบ Under-damped motion รูปแบบของ x_h เป็นดังสมการ

$$x_h = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (2)$$

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{2500/10} = 15.8114 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 15.8114 \times \sqrt{1 - 0.1423^2} = 15.6505 \text{ rad/s}$$

รูปแบบของการสั่นสะท้อน $x = x_h + x_p$ สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$x = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t + \phi) + 0.0709 \cos(21.9911t + 0.4007) \quad (3)$$

สมการข้างต้นจะพบว่าไม่มีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัวคือขนาด A และมุมเฟส ϕ ซึ่งสามารถหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้

1) เมื่อ $t = 0$, $x_0 = 0.015$ m แทนค่าลงในสมการ (3) จะได้

$$0.015 = A \cos(\phi) + 0.0709 \cos(0.4007)$$

$$A \cos(\phi) = -0.0503 \quad (4)$$

2) เมื่อ $t = 0$, $v_0 = 5$ m/s

หาอนุพันธ์ของสมการ (3) เทียบกับเวลาจะได้

$$\begin{aligned} \dot{x} = v = [Ae^{-\zeta\omega_n t} (-\zeta\omega_n) \cos(\omega_d t + \phi) + Ae^{-\zeta\omega_n t} (-\omega_d) \sin(\omega_d t + \phi)] \\ + 0.0709 \cdot (-21.9911) \sin(21.9911t + 0.4007) \end{aligned} \quad (5)$$

แทนเงื่อนไขที่ 2) ลงในสมการที่ (5) จะได้

$$5 = [-A\zeta\omega_n \cos(\phi) - A\omega_d \sin(\phi)] - (0.0709 \times 21.9911) \sin(0.4007)$$

$$5 = [-(0.1423 \times 15.8114)(-0.0503) - (15.6505)A \sin(\phi)] - (0.0709 \times 21.9911) \sin(0.4007)$$

$$A \sin(\phi) = -0.3511 \quad (6)$$

แก้สมการที่ (4) และ (6) จะได้ $A = -0.3547$, $\phi = 1.4285$ rad

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการ (3) จะได้

$$x = -0.3547e^{-(0.1423 \times 15.8114)t} \cos(15.6505t + 1.4285) + 0.0709 \cos(21.9911t + 0.4007)$$

$$x = -0.3547e^{-2.25t} \cos(15.6505t + 1.4285) + 0.0709 \cos(21.9911t + 0.4007) \quad \underline{\text{ANS}}$$

ตัวอย่าง 4-3

A weight attached to a spring of stiffness 525 N/m has a viscous damping device. When the weight is displaced and released, the period of vibration is 1.80 s, and the ratio of consecutive amplitudes is 4.2 to 1.0. Determine the amplitude and phase when a force $F = 2\cos(3t)$ acts on the system.

[William T. Thomson & Marie Dillon Dahleh, Theory of Vibration with Applications 5th edition 3/3]

จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้สามารถสรุปได้ดังนี้

$$k = 525 \text{ N/m}$$

$$T = 2\pi/\omega_d = 1.80 \text{ s (เมื่อปล่อยให้สั่นอย่างอิสระ มวลจะสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติที่มีตัวหน่วง } \omega_d)$$

$$x(t)/x(t+T) = 4.2/1$$

จากข้อมูลคาบการสั่นสะท้อนจะสามารถหา ω_d ได้ดังนี้

$$\omega_d = 2\pi/T = 2\pi/1.80 = 3.4907 \text{ rad/s}$$

เนื่องจากโจทย์กำหนดอัตราการลดลงของขนาดการสั่นสะเทือนเมื่อปล่อยให้สั่นอย่างอิสระ ดังนั้นจึงสามารถคำนวณหาค่า Logarithmic decrement และอัตราส่วนการหน่วง และค่าที่เกี่ยวข้องอื่นๆ ได้ดังนี้

$$\delta = \ln(4.2/1) = 1.4351$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{1.4351}{\sqrt{4\pi^2 + 1.4351^2}} = 0.2227$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{3.4907}{\sqrt{1 - 0.2227^2}} = 3.5806 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = 3.5806 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{525}{m}} \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad m = 40.9494 \text{ kg}$$

เมื่อทราบความถี่ธรรมชาติ อัตราส่วนการหน่วง จะสามารถหาขนาดของการสั่นสะเทือนเมื่อมีแรงมากระทำได้ดังนี้

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{2/40.9494}{\sqrt{(3.5806^2 - 3^2)^2 + (2 \cdot 0.2227 \cdot 3.5806 \cdot 3)^2}} = 7.98 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{2 \cdot 0.2227 \cdot 3.5806 \cdot 3}{3.5806^2 - 3^2}\right) = 51.39^\circ$$

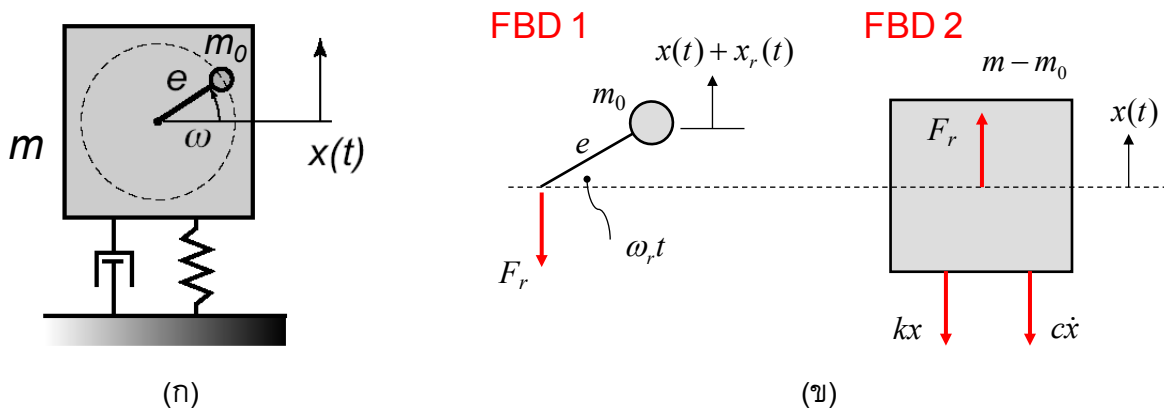
ANS

PART B: Applications

4. การสั่นสะเทือนจากความไม่สมดุลจากการหมุน (Rotating unbalance)

เครื่องจักรกลจำนวนมากทำงานโดยการหมุน เช่น เครื่องยนต์ต้นกำลัง มอเตอร์ บ่ม กังหัน เครื่องซักผ้า ล้อรถยนต์ เป็นต้น ในการหมุนนั้น หากชิ้นส่วนมีความไม่สมดุลจะเกิดแรงหนีศูนย์กลางขึ้น แรงนี้จะเพิ่มขึ้นอย่างมากในชิ้นส่วนที่หมุนด้วยความเร็วรอบสูง และเป็นต้นเหตุสำคัญของปัญหาการสั่นสะเทือนในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสร้างแบบจำลองเพื่อจำลองการเกิดการสั่นสะเทือนจากความไม่สมดุล วิธีการสร้างสมการการเคลื่อนที่ รวมถึงการแก้สมการตามลำดับ

ปัญหาการสั่นสะเทือนจากความไม่สมดุล สามารถจำลองได้ด้วยแบบจำลองดังแสดงในรูปที่ 4-16(ก) โดยกล่องสี่เหลี่ยมมวล m แทนเครื่องจักรที่เกิดความไม่สมดุล (มวลนี้รวมมวลที่ไม่สมดุลอยู่ด้วย) โดยมวลนี้ถูกรองรับด้วยสปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน เช่นเดียวกับระบบการสั่นสะเทือนโดยทั่วไป ส่วนความไม่สมดุลจากการหมุนสามารถแทนได้ด้วยมวล m_0 ซึ่งหมุนรอบแกนกลางของเครื่องจักร โดยตำแหน่งที่มีมวลไม่สมดุลติดอยู่เกิดที่ตำแหน่งห่างจากจุดหมุน e (วัดตามแนวรัศมี) ส่วนความเร็วรอบการหมุนคือ ω



รูปที่ 4-16 แบบจำลองการสั่นสะเทือนจากความไม่สมดุล และ FBD

รูปที่ 4-16(ข) แสดง FBD ของระบบในรูป 4-16(ก) เนื่องจากในที่นี้จะพิจารณาระบบที่เป็น 1 dof ซึ่งมีการสั่นสะเทือนในแนวตั้งเท่านั้น รูป FBD นี้จึงแสดงเฉพาะแรงในแนวตั้ง FBD1 แสดง FBD ของมวลที่ไม่สมดุล m_0 แรง F_r เป็นแรงคู่ปฏิปักษ์ที่เครื่องจักรกระทำกับส่วนที่ไม่สมดุล ส่วน FBD2 แสดงส่วนของเครื่องจักรโดยไม่รวมมวลที่ไม่สมดุล แรงที่กระทำกับเครื่องจักรประกอบด้วยแรง F_r ซึ่งเป็นผลจากส่วนที่ไม่สมดุลและทำให้เครื่องจักรเกิดการสั่นสะเทือน และแรงเนื่องจากสปริงและตัวหน่วงการสั่นสะเทือน พิกัดที่บอกการเคลื่อนที่ของเครื่องจักรคือ $x(t)$ ส่วนการเคลื่อนที่ของมวลที่ไม่สมดุล m_0 มีผลมาจากทั้งการเคลื่อนที่ของเครื่องจักรและการเคลื่อนที่ของส่วนที่ไม่สมดุล ดังนั้นการเคลื่อนที่ของมวล m_0 จึงเท่ากับ $x(t) + x_r(t)$ จาก FBD1 จะเขียนสมการแสดงการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$m_0(\ddot{x} + \ddot{x}_r) = -F_r \quad (4-64)$$

ส่วนจาก FBD2 จะได้สมการดังนี้

$$(m - m_0)\ddot{x} = F_r - c\dot{x} - kx \quad (4-65)$$

สำหรับค่า x_r จะสามารถหาได้จากสมการ

$$x_r = e \sin \omega_r t \quad (4-66)$$

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (4-64)-(4-66) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของการสั่นสะเทือนจากการหมุนที่ไม่สมดุลดังสมการ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 e \omega_r^2 \sin \omega_r t \quad (4-67)$$

หรือสามารถเขียนในรูปของความถี่ธรรมชาติ และอัตราส่วนการหน่วงได้ดังสมการ

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{m_0 e}{m} \omega_r^2 \sin \omega_r t \quad (4-68)$$

สมการที่ (4-67) หรือ (4-68) อยู่ในรูปแบบของสมการการสั่นสะเทือนแบบบังคับโดยทั่วไป และสามารถใช่วิธีต่างๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วหาคำตอบได้

กำหนดให้ $z(t) = Z e^{j\omega_r t}$ และ $x(t) = \text{Im}[z(t)]$ และเขียนสมการการเคลื่อนที่ให้อยู่ในรูปเชิงซ้อน จะได้

$$\ddot{z} + 2\zeta \omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = \frac{m_0 e}{m} \omega_r^2 e^{j\omega_r t}$$

เมื่อแทนค่า $z(t)$ ลงในสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบเชิงซ้อน จะได้

$$Z = \frac{m_0 e}{m} \left[\frac{\omega_r^2}{\omega_n^2 - \omega_r^2 + j2\zeta \omega_n \omega_r} \right] = \frac{m_0 e}{m} \left[\frac{r^2}{1 - r^2 + j2\zeta r} \right]$$

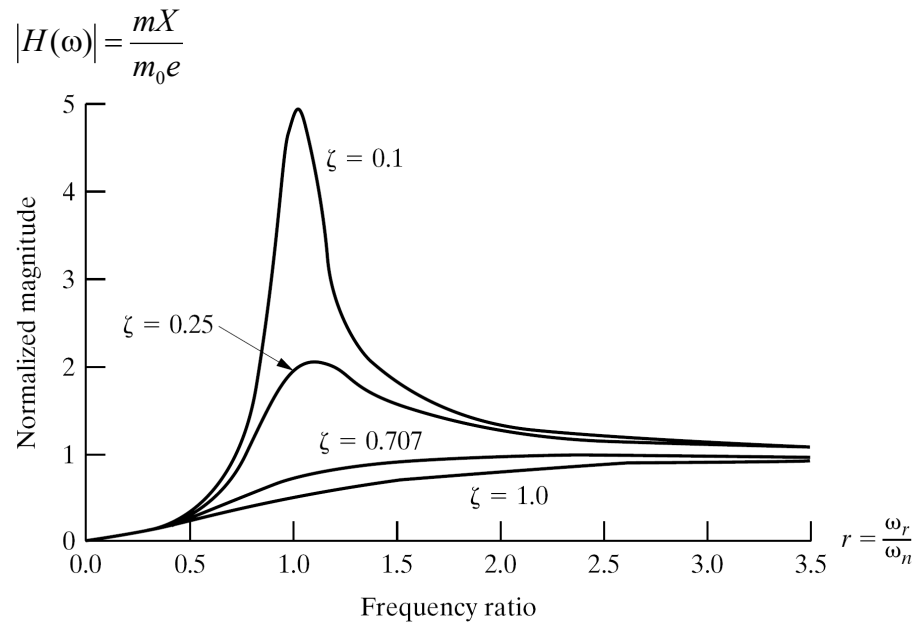
เมื่อ $r = \omega_r / \omega_n$ และให้การตอบสนองเชิงความถี่ $H(\omega) = \left[\frac{r^2}{1 - r^2 + j2\zeta r} \right]$ จะได้

$$x(t) = \text{Im}[z(t)] = \frac{m_0 e}{m} |H(\omega)| \sin(\omega_r t + \theta) = X \sin(\omega_r t + \theta) \quad (4-69)$$

และ $\theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \quad (4-70)$

โดย $|H(\omega)| = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$

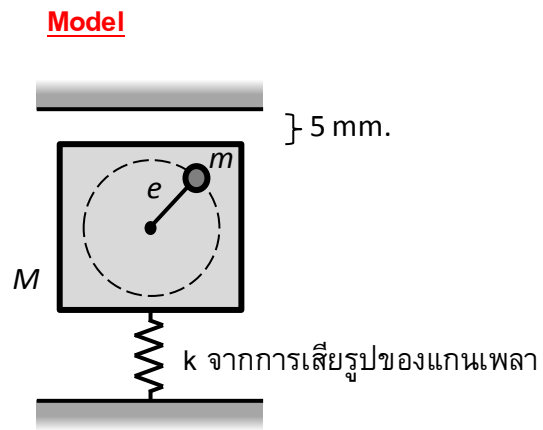
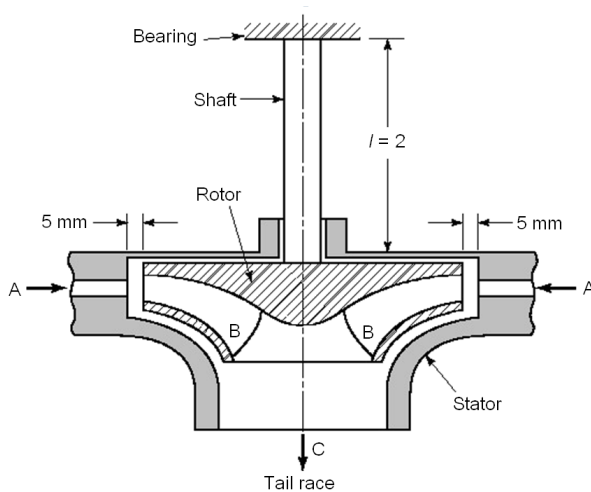
เมื่อเขียนกราฟระหว่างขนาดการตอบสนองเชิงความถี่ $|H(\omega)|$ กับอัตราส่วนความถี่ r จะได้ดังรูปที่ 4-17 จากกราฟจะพบว่า เมื่อความเร็วรอบการทำงานของเครื่องจักรน้อย ขนาดของการสั่นสะเทือนจากความไม่สมดุลจะมีค่าน้อย (เข้าใกล้ 0) ขนาดของการสั่นสะเทือนจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อความเร็วรอบการทำงานเข้าใกล้กับความถี่ธรรมชาติของระบบ $r = \omega_r / \omega_n = 1$ และเมื่อความเร็วรอบการทำงานมีค่ามากกว่าความถี่ธรรมชาติมากๆ ค่า $|H(\omega)|$ จะมีค่าเข้าใกล้ 1 การเพิ่มตัวหน่วงการสั่นสะเทือนจะทำให้ขนาดการสั่นสะเทือนลดลง



รูปที่ 4-17 ผลตอบสนองเชิงความถี่ของปัญหาการสั่นสะเทือนจากความไม่สมดุล

ตัวอย่างที่ 4-4 The Schematic diagram of a Francis water turbine is shown in which water flows from A into the blades B and down into the tail race C. The rotor has a mass of 250 kg and an unbalance (me) of 0.25 kg-m. the radial clearance between the rotor and the stator is 5 mm. the turbine operates in the speed range 600 to 3000 rpm. The steel shaft carrying the rotor can be assumed to be clamped at the bearings. Determine the diameter of the shaft so that the rotor is always clear of the stator at all the operating speeds of the turbine. Assume damping to be negligible. [ดัดแปลงจาก Singiresu S. Rao, Example 3.5]

กำหนดให้: $E = 207 \text{ GPa}$, $k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3E}{l^3} \left(\frac{\pi d^4}{64} \right)$



จากที่โจทย์กำหนด สามารถสร้างแบบจำลองอย่างง่าย 1dof เพื่ออธิบายการสั่นสะเทือนได้ดังรูป และจะได้ EOM ดังสมการ

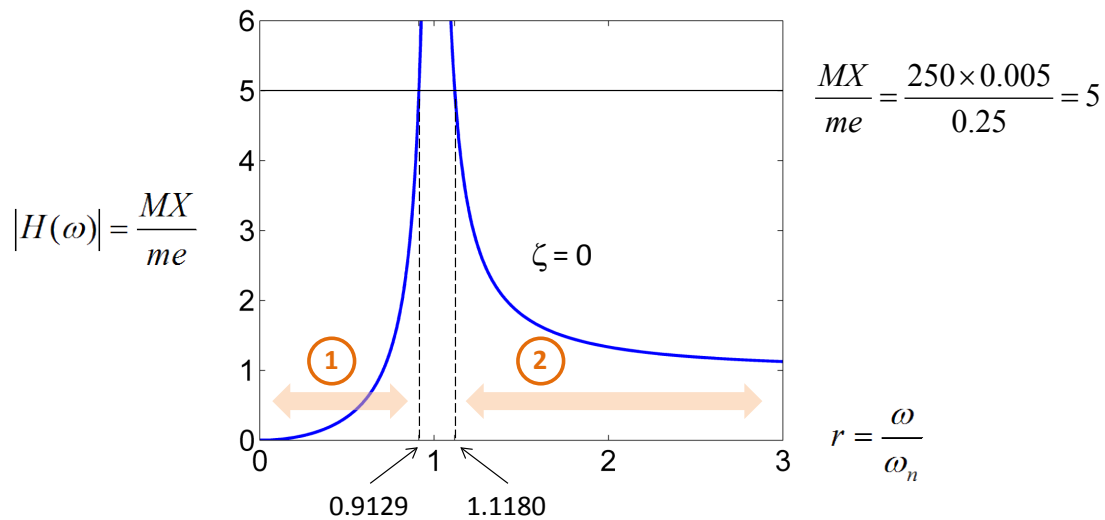
$$M\ddot{x} + kx = me\omega^2 \sin(\omega t) \quad \text{EOM}$$

ขนาดการสั่นสะเทือน $|X| = \frac{me}{M} \frac{r^2}{(1-r^2)}$ (ไม่มีความหน่วงในระบบ)

เนื่องจากขนาดการสั่นสะเทือนต้องมีค่าน้อยกว่า 5 มม. ดังนั้น

$$|X_{\max}| = |5 \times 10^{-3}| = \frac{0.25}{250} \frac{r^2}{(1-r^2)} \Rightarrow r = 0.9129, 1.1180$$

เพื่อให้เลือกช่วงที่ออกแบบได้เหมาะสม จึงต้องพิจารณารูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดการสั่นสะเทือน ที่ความถี่ต่างๆ ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่าต้องออกแบบให้อยู่ในช่วงที่ 1 ($r < 0.9129$) หรือให้อยู่ในช่วงที่ 2 ($r > 1.1180$) การสั่นสะเทือนของ Francis turbine จึงจะไม่เกิน 5 มม.

ช่วงการทำงานตามที่โจทย์กำหนดเป็นดังนี้ 600 rpm \Rightarrow $600 \times \frac{2\pi}{60} = 20\pi$ rad/s

3000 rpm \Rightarrow $3000 \times \frac{2\pi}{60} = 100\pi$ rad/s

เนื่องจากช่วงความเร็วรอบใช้งาน (ω) ถูกกำหนดไว้แล้ว การออกแบบ Francis turbine ให้ทำงานได้ในช่วงที่ต้องการจึงต้องทำโดยการออกแบบค่าความถี่ธรรมชาติให้ได้ช่วง r ที่เหมาะสมตามต้องการ

ออกแบบให้อยู่ในช่วงที่ 1 $r = \frac{\omega}{\omega_n} \leq 0.9129$

ในช่วงนี้การใช้งานที่ 3000 rpm จะทำให้เกิด r ที่ใกล้เคียงกับค่าวิกฤตมากกว่า ดังนั้น

$$\frac{100\pi}{\omega_n} \leq 0.9129 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \geq \frac{100\pi}{0.9129} = 344.1333 \text{ rad/s}$$

หาค่าความแข็งสปริงได้ดังนี้

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{250}} \geq 344.1333 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad k \geq 2.961 \times 10^7 \text{ N/m}$$

หาเส้นผ่านศูนย์กลางเพลลาได้จาก

$$k = \frac{3E}{l^3} \left(\frac{\pi d^4}{64} \right) = \frac{3(207 \times 10^9)}{2^3} \left(\frac{\pi d^4}{64} \right) \geq 2.961 \times 10^7 \text{ N/m} \quad \Rightarrow \quad d \geq 297 \text{ mm}$$

ออกแบบให้อยู่ในช่วงที่ 2 $r = \frac{\omega}{\omega_n} \geq 1.1180$

ในช่วงนี้การใช้งานที่ 600 rpm จะทำให้เกิด r ที่ใกล้เคียงกับค่าวิกฤตมากกว่า ดังนั้น

$$\frac{20\pi}{\omega_n} \geq 1.1180 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \leq \frac{20\pi}{1.1180} = 56.1985 \text{ rad/s}$$

หาค่าความแข็งสปริงได้ดังนี้

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{250}} \leq 56.1985 \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad k \leq 7.895 \times 10^5 \text{ N/m}$$

หาเส้นผ่านศูนย์กลางเพลลาได้จาก

$$k = \frac{3E}{l^3} \left(\frac{\pi d^4}{64} \right) = \frac{3(207 \times 10^9)}{2^3} \left(\frac{\pi d^4}{64} \right) \leq 7.895 \times 10^5 \text{ N/m} \quad \Rightarrow \quad d \leq 120 \text{ mm}$$

จากที่แสดงวิธีทำข้างต้น จะพบว่า

1. อาจเลือกขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเพลลาให้ใหญ่กว่า 297 มม. เพื่อให้ช่วงทำงานอยู่ในช่วงที่ 1 หรืออาจเลือกขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางให้เล็กกว่า 120 มม. เพื่อให้ช่วงทำงานอยู่ในช่วงที่ 2 ก็ได้
2. จะต้องพิจารณาถึงความแข็งแรงของเพลลาประกอบด้วย ซึ่งการเลือกให้เพลลาที่มีขนาดใหญ่กว่าจะมีความแข็งแรง และทนทานกับความล้าได้มากกว่า
3. เพลลาขนาดใหญ่จะปลอดภัยกว่าในขณะที่เริ่มเดินเครื่อง เนื่องจากช่วงทำงานอยู่ในช่วงที่ 1 การเดินเครื่องจะไม่ผ่านช่วง resonance ซึ่งมีขนาดการสั่นสะเทือนสูง หากช่วงทำงานอยู่ในช่วงที่ 2 การเดินเครื่องจะต้องผ่านช่วง resonance ซึ่งจะมีขนาดการสั่นสะเทือนสูง หากขนาดการสั่นมากกว่า 5 มม. ซึ่งเป็นระยะห่างระหว่างใบกังหันกับโครงด้านนอกแล้ว ก็อาจเกิดความเสียหายได้ หากออกแบบในทำงานอยู่ในช่วงที่ 2 การเพิ่มตัวหน่วงการสั่นสะเทือนเข้าไปในระบบ จึงเป็นสิ่งจำเป็น

ANS

5. การสั่นสะเทือนจากการสั่นสะเทือนของพื้น (Base excitation)

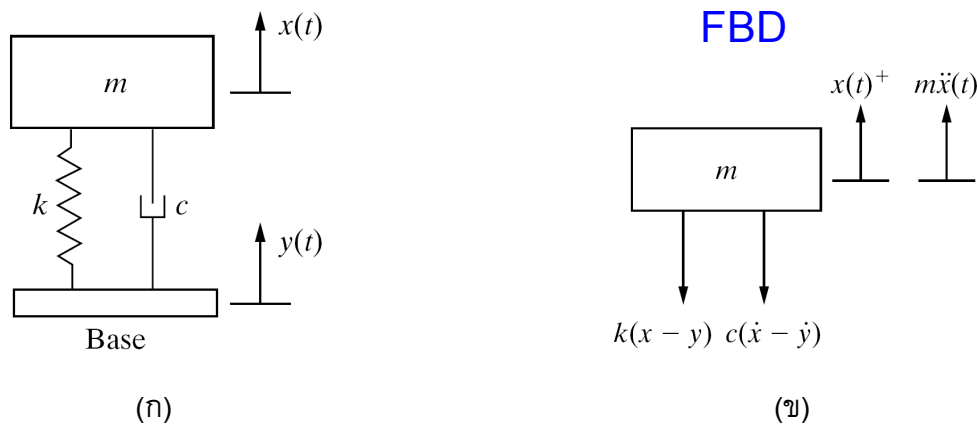
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสั่นสะเทือนซึ่งเกิดขึ้นจากการกระตุ้นจากการสั่นสะเทือนของพื้น ตัวอย่างของปัญหาการสั่นสะเทือนจากการสั่นของพื้น เช่น 1) เครื่องจักรกลที่สนใจวางอยู่ในบริเวณที่พื้นมีการสั่นสะเทือน ซึ่งการสั่นของพื้นอาจเกิดจากเครื่องจักรขนาดใหญ่อื่นๆ ที่วางอยู่ในบริเวณเดียวกัน 2) การสั่นสะเทือนของรถเมื่อแล่นอยู่บนถนนที่ขรุขระ การสั่นสะเทือนจากพื้นจะทำให้ตัวรถสั่นสะเทือน ดังนั้นรถยนต์จึงต้องมีการออกแบบระบบรองรับ (Suspension system) เพื่อลดการสั่นสะเทือนและเพิ่มเสถียรภาพในการขับขี่ 3) การสั่นสะเทือนของอาคารเนื่องจากแผ่นดินไหว

การสั่นสะเทือนจากพื้นสามารถสร้างแบบจำลองได้ดังแสดงในรูปที่ 4-18(ก) ในส่วนของมวล m ซึ่งแทนระบบหรือเครื่องจักรที่สนใจ จะเป็นเช่นเดียวกับแบบจำลองระบบการสั่นสะเทือนที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อที่ผ่านมา ซึ่งประกอบด้วยมวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน สำหรับการสั่นสะเทือนของฐานจำลองด้วยการเคลื่อนที่ของฐาน $y(t)$ ส่วนรูปที่ 4-18(ข) แสดง FBD ของระบบในรูปช้อย่มือ สังเกตว่าแรงจากสปริงและแรงจากตัวหน่วงการสั่นสะเทือนจะขึ้นอยู่กับระยะสัมพัทธ์ และความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างมวลกับพื้น ดังสมการ $F_s = k(x - y)$ และ $F_d = c(\dot{x} - \dot{y})$ ตามลำดับ (สมมติให้ระยะการเคลื่อนที่ x ของมวล m มากกว่าการเคลื่อนที่ y ของพื้น) จาก FBD จะสามารถสร้างสมการเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของการสั่นสะเทือนจากการสั่นของพื้นได้ดังนี้

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (4-71)$$

หากให้การสั่นของพื้นเป็นแบบฮาร์โมนิกจะได้ $y(t) = Y \cos \omega_b t$ เมื่อแทนลงในสมการ (4-71) จะได้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -cY\omega_b \sin \omega_b t + kY \cos \omega_b t \quad (4-72)$$



รูปที่ 4-18 แบบจำลองการสั่นสะเทือนจากการสั่นสะเทือนของพื้น และ FBD

จะเห็นว่าสมการ (4-71) เป็นสมการการสั่นสะเทือนแบบบังคับ ซึ่งถูกกระตุ้นด้วยแรง 2 แรงที่มีความถี่เดียวกัน แต่มีเฟสและขนาดแตกต่างกัน การแก้สมการอาจใช้วิธีต่างๆ ดังที่ได้อธิบายมาก่อนหน้า

โดยพิจารณาแรงที่ละแรง และใช้หลักการ Superposition เพื่อหาคำตอบ ในที่นี้จะใช้วิธีการ Frequency response แสดงดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $z(t) = Ze^{j\omega_b t}$ และ $x(t) = \text{Re}[z(t)]$ และ $y(t) = Y \cos \omega_b t = \text{Re}[Ye^{j\omega_b t}]$

จากสมการที่ (4-71) เขียนสมการในรูปของความถี่ธรรมชาติ และอัตราส่วนการหน่วงจะได้

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y$$

เขียนสมการให้อยู่ในรูปเชิงซ้อน จะได้

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2z = j2\zeta\omega_n\omega_bYe^{j\omega_b t} + \omega_n^2Ye^{j\omega_b t} \quad (4-73)$$

$$(-\omega_b^2 + j2\zeta\omega_n\omega_b + \omega_n^2)Ze^{j\omega_b t} = (j2\zeta\omega_n\omega_b + \omega_n^2)Ye^{j\omega_b t}$$

$$Z = \left[\frac{\omega_n^2 + j2\zeta\omega_n\omega_b}{-\omega_b^2 + \omega_n^2 + j2\zeta\omega_n\omega_b} \right] Y = \left[\frac{1 + j(2\zeta r)}{1 - r^2 + j(2\zeta r)} \right] Y$$

เมื่อ $r = \omega_b/\omega_n$ และให้การตอบสนองเชิงความถี่ $H(\omega) = \left[\frac{1 + (2r\zeta)j}{1 - r^2 + j(2\zeta r)} \right]$ จะได้

$$Z = H(\omega) \cdot Y = |H(\omega)|e^{j\theta} Y$$

และ

$$z(t) = Ze^{j\omega_b t} = |H(\omega)|e^{j\theta} Ye^{j\omega_b t} = |H(\omega)|Ye^{j(\omega_b t + \theta)}$$

เนื่องจาก $x(t) = \text{Re}[z(t)]$ ดังนั้น

$$x(t) = |H(\omega)|Y \cos(\omega_b t + \theta) = X \cos(\omega_b t + \theta) \quad (4-74)$$

และ

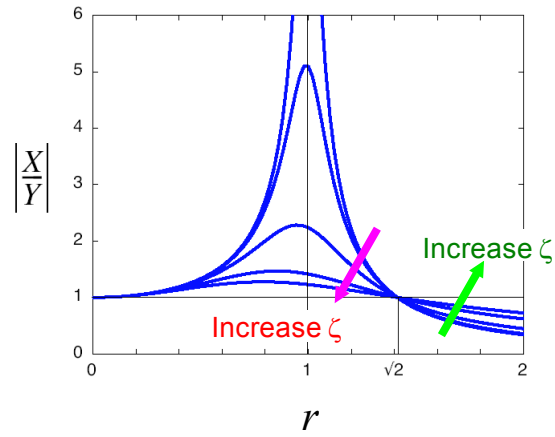
$$\frac{X}{Y} = |H(\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (4-75)$$

อัตราส่วนระหว่างขนาดการเคลื่อนที่ของวัตถุ X (Output displacement) กับขนาดการเคลื่อนที่ของพื้น Y (Input displacement) ดังแสดงในสมการ (4-75) มีชื่อเรียกว่า Displacement transmissibility อัตราส่วนนี้แสดงให้เห็นว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ไปเท่าไรเมื่อให้การกระตุ้นโดยการสั่นของพื้นที่มีความถี่ต่างๆ

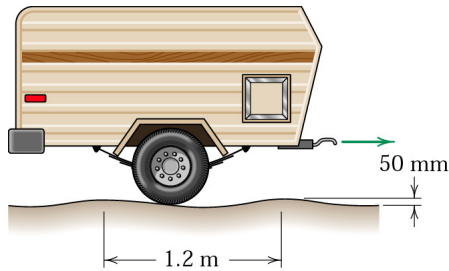
รูปที่ 4-19 แสดงความสัมพันธ์ของ Displacement transmissibility ที่ความถี่ต่างๆ จะเห็นว่าถ้าพื้นสั่นด้วยความถี่ต่างๆ การสั่นของมวลจะมีขนาดเท่ากับการสั่นของพื้น และเมื่อความถี่ของการสั่นสะท้อนของพื้นเพิ่มขึ้นจนเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติแล้ว ขนาดของการสั่นสะท้อนจะเพิ่มขึ้นอย่างมาก แต่เมื่อความถี่การสั่นของพื้นเพิ่มขึ้นอีก จนอัตราส่วน r เกินกว่า $\sqrt{2}$ แล้ว การสั่นสะท้อนของมวลที่สนใจจะมีขนาดลดลง สำหรับผลของอัตราส่วนการหน่วงจะพบว่า เมื่ออัตราส่วนการหน่วงเพิ่มจะทำให้ขนาดการสั่นสะท้อนลดลง หากการสั่นเกิดที่ความถี่ต่ำ (อัตราส่วน r น้อยกว่า $\sqrt{2}$) และการเพิ่มอัตราส่วนการหน่วงจะส่งผลให้ขนาดลดลงอย่างมากหากการสั่นของพื้นเกิดใกล้กับช่วงความถี่ธรรมชาติ แต่หากการสั่นของพื้นเกิดที่ความถี่สูง (อัตราส่วน r มากกว่า $\sqrt{2}$) แล้ว การเพิ่มอัตราส่วนการหน่วงกลับทำให้ขนาดของการสั่นสะท้อนเพิ่มขึ้น

ความรู้เกี่ยวกับการสั่นสะท้อนเนื่องจากการสั่นของพื้นที่กำลังกล่าวถึงในหัวข้อนี้ จะเป็นประโยชน์อย่างมากในการออกแบบระบบให้ได้รับผลการสั่นสะท้อนจากการสั่นของพื้นน้อยๆ ทั้งในแง่ของขนาดการ

สั่นสะเทือน และแรงที่ส่งผ่าน รายละเอียดของการออกแบบเพื่อควบคุมขนาดการสั่นสะเทือนนี้ จะกล่าวถึงอีกครั้งในบทถัดๆ ไป



รูปที่ 4-19 ความสัมพันธ์ระหว่างค่า Displacement transmissibility ที่ความถี่ต่างๆ



ตัวอย่างที่ 4-5 Determine the amplitude of vertical vibration of the spring-mounted trailer as it travels at a velocity of 25 km/h over the road whose contour may be expressed by a sinusoid. The mass of the trailer is 500 kg and that of the wheels alone may be neglected. During loading, each 75 kg added to the load caused the trailer to sag 3 mm on its springs. Assume that the wheels are in contact with the road at all times and neglect damping. At what critical speed v_c is the vibration of the trailer greatest? [J. L. Meriam & L. G. Kraige 8/71]

จากที่โจทย์กำหนดระยะยุบตัว 3 มม. เมื่อเพิ่มน้ำหนัก 75 kg จะทำให้สามารถคำนวณหาค่าความแข็งสปริงได้จาก

$$[F = kx] \quad 75 \times 9.81 = k(3 \times 10^{-3}) \quad \Rightarrow \quad k = 245250 \text{ N/m}$$

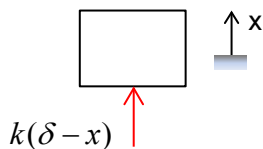
ในข้อนี้การกระตุ้นเกิดจากการเคลื่อนที่ของรถที่วิ่งบนถนนลูกคลื่น ซึ่งมีคาบของยอดลูกคลื่น 1.2 m ความถี่ของการกระตุ้นคือเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ 1 รอบ (1 คาบ) ซึ่งจะขึ้นอยู่กับความเร็วของรถ และสามารถหาได้ดังนี้

ระยะการเคลื่อนที่ $v \times 10^3 \text{ m}$ ใช้เวลา $60 \times 60 \text{ sec}$

ระยะ 1 คาบ 1.2 m ใช้เวลา $\frac{60 \times 60}{v \times 10^3} \times 1.2 = \frac{4.32}{v} \text{ sec} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{4.32}{v} \text{ sec}$

เมื่อรถวิ่งด้วยความเร็ว 25 km/h จะได้ $T = \frac{4.32}{25} = 0.1728 \text{ sec} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 36.361 \text{ rad/s}$

FBD



ความเป็นลูกคลื่นของถนนสามารถเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ ดังนี้

$$\delta = \delta_0 \sin \omega t = (25 \times 10^{-3}) \sin(36.361t)$$

$$[\Sigma F = m\ddot{x}] \quad k(\delta - x) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = k\delta = k\delta_0 \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \text{EOM}$$

คำตอบของสมการจะอยู่ในรูป $x = X \sin \omega t$ นำไปแทนใน EOM จะได้

$$-\omega^2 mX \sin \omega t + kX \sin \omega t = k\delta_0 \sin \omega t$$

$$(k - \omega^2 m)X = k\delta_0$$

$$X = \frac{k\delta_0}{k - \omega^2 m}$$

ดังนั้น ขนาดการสั่นสะเทือนในกรณีนี้เท่ากับ

$$X = \frac{k\delta_0}{k - \omega^2 m} = \frac{(245250)(25 \times 10^{-3})}{245250 - (36.361)^2(500)} = -0.014745 \text{ m}$$

$$|X| = 14.745 \text{ mm}$$

ANS

เครื่องหมายลบ แสดงถึงเฟสที่ต่างกัน 180° ระหว่างจังหวะการกระตุ้น (ลูกคลื่นบนถนน) กับจังหวะการสั่นขึ้นลงของตัวรถ เนื่องจากความถี่การกระตุ้นมากกว่าความถี่ธรรมชาติของระบบ

ความเร็ววิกฤต v_c จะเกิดเมื่อความถี่การกระตุ้นเท่ากับความถี่ธรรมชาติ หรือ $\omega = \omega_n$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{245250}{500}} = 22.1472 \text{ rad/s}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับคาบการสั่นสะเทือน จะได้ $T = \frac{4.32}{v_c} = \frac{2\pi}{\omega_n}$

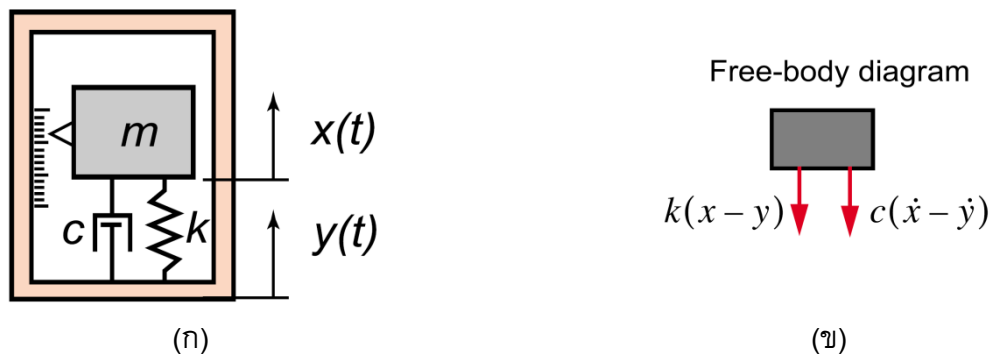
$$\text{ดังนั้น } v_c = \frac{4.32\omega_n}{2\pi} = \frac{4.32(22.1472)}{2\pi} = 15.23 \text{ km/h}$$

ANS

6. อุปกรณ์วัดการสั่นสะเทือน

ในหัวข้อที่ผ่านมา ได้อธิบายถึงการสั่นสะเทือนซึ่งถูกกระตุ้นจากการสั่นสะเทือนของพื้น สำหรับในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการใช้หลักการทำนองเดียวกันในการสร้างอุปกรณ์วัดการสั่นสะเทือน ซึ่งอาจวัดเป็นการขจัดในการสั่นสะเทือน หรืออาจเป็นการวัดความเร่งการสั่นสะเทือน รูปที่ 4-20(ก) แสดงโครงสร้างพื้นฐานของอุปกรณ์วัดการสั่นสะเทือน ซึ่งประกอบด้วย มวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน อยู่ในภาครอบซึ่งติดอยู่กับชิ้นส่วนสั่นสะเทือนที่ต้องการวัดขนาด โดย x แสดงการเคลื่อนที่ของมวล m ที่อยู่ภายใน ส่วน y แสดงถึงขนาดการสั่นสะเทือนที่ต้องการวัด ระยะที่อ่านค่าได้คือระยะสัมพัทธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของมวล x กับขนาดการสั่นสะเทือน y เนื่องจากหลักการที่ใช้เป็นเช่นเดียวกับการสั่นสะเทือนจากการสั่นของพื้น ดังนั้น FBD ที่แสดงในรูปที่ 4-20(ข) จึงเป็นเช่นเดียวกับ FBD ในปัญหาการสั่นสะเทือนของพื้นในหัวข้อก่อนหน้า และสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้เช่นเดียวกันดังสมการ (4-71) ที่ยกมาเขียนซ้ำอีกครั้งดังนี้

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (4-71)$$



รูปที่ 4-20 แผนผังแสดงหลักการอุปกรณ์วัดการสั่นสะเทือน

เนื่องจากระยะที่อ่านได้เป็นระยะสัมพัทธ์ กำหนดให้ $w(t) = x(t) - y(t)$ และแทนลงในสมการที่ (4-71) และจัดรูปจะได้ดังสมการ

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = -m\ddot{y} \quad (4-76)$$

กำหนดให้การสั่นสะเทือนที่ต้องการวัดเป็นการสั่นแบบฮาร์โมนิก จะได้ $y(t) = Y \cos \omega_b t$ สมการที่ (4-76) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความถี่ธรรมชาติ และอัตราส่วนการหน่วงได้ดังนี้

$$\ddot{w} + 2\zeta\omega_n\dot{w} + \omega_n^2 w = -\ddot{y} \quad (4-76)$$

การหาคำตอบของสมการที่ (4-76) ทำได้ทำนองเดียวกับปัญหาการสั่นสะเทือนจากการสั่นของพื้น ดังนี้ กำหนดให้ $z(t) = Ze^{j\omega t}$, $w(t) = \text{Re}[z(t)]$ และ $y(t) = Y \cos \omega t = \text{Re}[Ye^{j\omega t}]$ จะสามารถเขียนสมการ (4-76) ในรูปสมการเชิงซ้อนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z &= \omega^2 Ye^{j\omega t} \\ (-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2)Ze^{j\omega t} &= \omega^2 Ye^{j\omega t} \end{aligned}$$

$$Z = \left[\frac{\omega^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \right] Y = \left[\frac{r^2}{1-r^2 + j2\zeta r} \right] Y$$

เมื่อ $r = \omega/\omega_n$ และให้การตอบสนองเชิงความถี่ $H(\omega) = T(\omega) = \left[\frac{r^2}{1-r^2 + j(2\zeta r)} \right]$ จะได้

$$Z = T(\omega) \cdot Y = |T(\omega)| e^{j\theta} Y$$

และ

$$z(t) = Z e^{j\omega t} = |T(\omega)| e^{j\theta} Y e^{j\omega t} = |T(\omega)| Y e^{j(\omega t + \theta)}$$

เนื่องจาก $w(t) = \text{Re}[z(t)]$ ดังนั้น

$$w(t) = |T(\omega)| Y \cos(\omega t + \theta) = W \cos(\omega t + \theta) \quad (4-77)$$

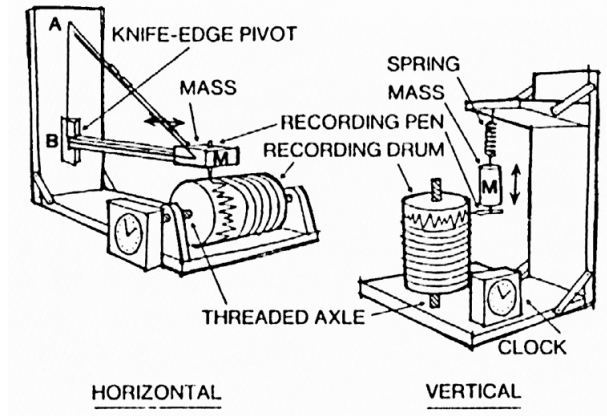
และ

$$\frac{W}{Y} = |T(\omega)| = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (4-78)$$

โดยอัตราส่วน $W/Y = |T(\omega)|$ แสดงถึงขนาดการสั่นสะเทือนที่อ่านค่าได้ (การขจัดสัมพัทธ์ W) เทียบกับการสั่นสะเทือนของชิ้นส่วนที่ต้องการวัดการสั่นสะเทือน Y และมีชื่อเรียกว่า Displacement transmissibility (ชื่อเดียวกับหัวข้อการสั่นสะเทือนจากการสั่นของฐาน แต่ค่าไม่เท่ากัน เนื่องจากในหัวข้อก่อนหน้าพิจารณาระยะ Output ที่สนใจเป็นระยะสัมบูรณ์ X แต่ในหัวข้อนี้จะพิจารณา Output เป็นการขจัดสัมพัทธ์ W) หลักการพื้นฐานที่กล่าวมานี้จะนำไปใช้กับอุปกรณ์วัดการขจัดการสั่นสะเทือน (Seismometer) และอุปกรณ์วัดความเร่งการสั่นสะเทือน (Accelerometer) ดังจะอธิบายต่อไป

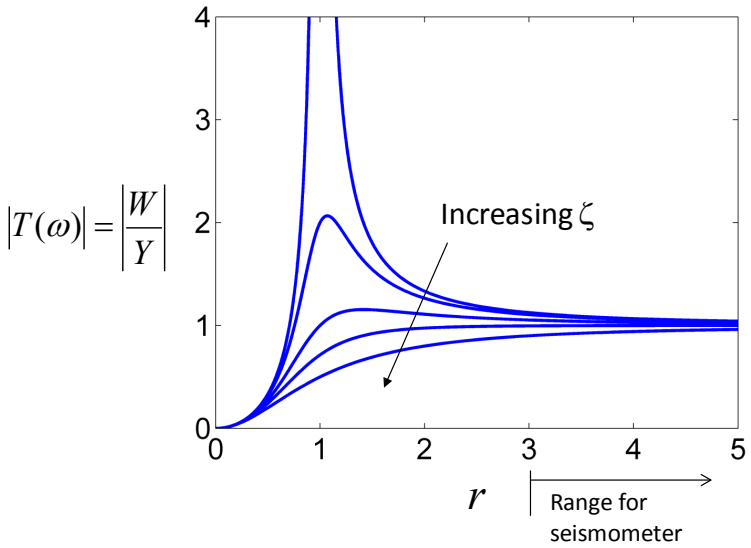
Seismometer

Seismometer เป็นเครื่องมือวัดการขจัด (displacement) ของการสั่นสะเทือน และมักใช้วัดการสั่นสะเทือนจากแผ่นดินไหว ตัวอย่างของ Seismometer แสดงดังรูปที่ 4-21 สำหรับหลักการของ seismometer เป็นไปดังที่กล่าวมาแล้วดังแสดงแผนผังในรูปที่ 4-20 ดังนั้นสมการแสดงความสัมพันธ์ของระยะที่วัดได้กับขนาดการสั่นสะเทือนของ seismometer จึงเป็นเช่นเดียวกับสมการที่ (4-78) รูปที่ 4-22 แสดงความสัมพันธ์ของ $W/Y = |T(\omega)|$ ที่ความถี่การสั่นสะเทือนต่างๆ จากรูปจะเห็นว่าในช่วง $r \geq 3$ อัตราส่วน W/Y มีค่าประมาณ 1 ซึ่งหมายถึงค่า W ที่อ่านได้ มีค่าใกล้เคียงกับขนาดการสั่นสะเทือน Y ช่วงที่ r มีค่ามากๆ จึงเป็นช่วงทำงานของ Seismometer เนื่องจากต้องการให้ $r = \omega/\omega_n$ มีค่ามาก การออกแบบ Seismometer จึงต้องออกแบบให้มีความถี่ธรรมชาติ $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ต่ำ ซึ่งทำได้โดยใช้มวลที่มีขนาดใหญ่ หรือออกแบบให้ความแข็งของสปริงน้อย ซึ่งส่งผลให้อุปกรณ์มีขนาดใหญ่ ในทางปฏิบัติ Seismometer มักจะมีความถี่ธรรมชาติอยู่ในช่วง 1-5 Hz และสามารถวัดการขจัดของการสั่นสะเทือนในช่วง 10-500 Hz



<http://www.eoearth.org/view/article/164600/>

รูปที่ 4-21 Seismometer



รูปที่ 4-22 ความสัมพันธ์ของ Displacement transmissibility ที่ความถี่ต่างๆ

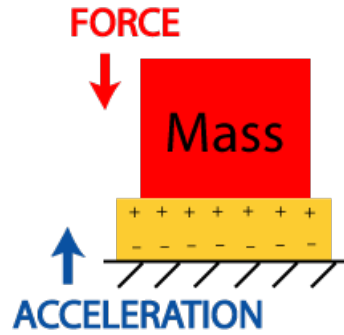
Accelerometer

Accelerometer เป็นตัวเซนเซอร์ที่ใช้วัดความเร่งของการสั่นสะเทือน และใช้กันอย่างแพร่หลายในการวัดการสั่นสะเทือนโดยทั่วไป ตัวอย่างของ Accelerometer แสดงในรูปที่ 4-23(ก) ส่วนหลักการของ Accelerometer อย่างง่าย แสดงในรูปที่ 4-23(ข) ซึ่งสามารถเทียบเคียงได้กับแผนผังในรูปที่ 4-20 เพียงแต่เปลี่ยนสปริงและตัวหน่วงในรูปที่ 4-20 เป็นวัสดุประเภท quartz หรือเป็น ceramic crystals (ชั้นสี่เหลี่ยมในรูปที่ 4-23) วัสดุประเภทนี้จะมีสมบัติ Piezoelectric effect โดยเมื่อมีแรงมากระทำ วัสดุจะเกิดความเค้นและเกิดประจุบวกและลบสะสมที่ผิวด้านตรงข้ามกันเกิดเป็นความต่างศักย์ไฟฟ้าขึ้น ความต่างศักย์ที่เกิดขึ้นจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรง (หรือความเร่ง) ที่กระทำ Accelerometer ที่ใช้หลักการเช่นนี้จะถูกเรียกว่า Piezoelectric accelerometer



<http://www.pcb.com/>

(ก)



<http://www.pcb.com/>

(ข)

รูปที่ 4-23 Accelerometer และหลักการทำงาน

เนื่องจาก Accelerometer ใช้หลักการซึ่งแสดงดังรูปที่ 4-20 ดังนั้นจึงสามารถใช้สมการที่ (4-78) เพื่อมาอธิบายได้ เพียงแต่ในสมการที่ (4-78) เป็นความสัมพันธ์ของการขจัด จึงต้องปรับรูปสมการให้อยู่ในรูปความเร่งเสียก่อน จากสมการ

$$\frac{W}{Y} = |T(\omega)| = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (4-78)$$

จะได้

$$W = \frac{(\omega/\omega_n)^2 Y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{A_y / \omega_n^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

หรือ

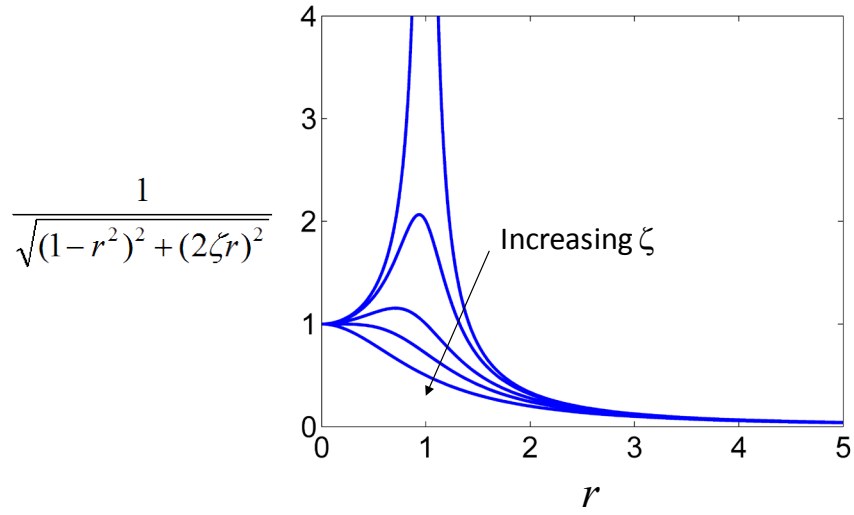
$$W \cdot \omega_n^2 = \frac{A_y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (4-79)$$

รูปที่ 4-24 แสดงความสัมพันธ์ของเทอม $\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ ที่ค่า r ต่างๆ หรืออาจจะพิจารณา

ว่าเป็นที่ความถี่ต่างๆ ก็ได้ จากรูปจะเห็นว่าเมื่อค่า r น้อยๆ เทอม $\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ จะมีค่าเข้าใกล้

1 ทำให้จากสมการที่ (4-79) สามารถประมาณได้ดังสมการ $W \cdot \omega_n^2 = A_y$ ซึ่งจะเห็นว่าค่าที่วัดได้จะแสดงถึงความเร่งของวัตถุที่ต้องการนั่นเอง จากรูปที่ 4-24 จะเห็นว่าค่าอัตราส่วนความหน่วงจะมีผลต่อช่วงที่ Accelerometer จะทำงานได้เป็นอย่างมาก หากค่าอัตราส่วนความหน่วงมีค่าอยู่ในช่วง 0.65-0.7 จะทำให้ช่วงที่ทำงานได้ของ Accelerometer กว้างที่สุด โดยมีค่าตั้งแต่ $0 \leq r \leq 0.6$ ส่วนค่าในแกน y จะอยู่ในช่วง 0.96-1.04 เนื่องจากต้องการให้ $r = \omega/\omega_n$ มีค่าน้อย Accelerometer จึงถูกออกแบบให้มีความถี่ธรรมชาติสูง ซึ่งอาจทำได้โดยใช้มวลขนาดเล็กและค่าความแข็งสปริงมาก และเนื่องจากข้อดีที่ Accelerometer มีขนาดเล็กและมักมีความไว (sensitivity) สูง Accelerometer จึงเป็นที่นิยมใช้ในการวัดการสั่นสะเทือน

โดยทั่วไป ในทางปฏิบัติ Accelerometer มักมีความถี่ธรรมชาติประมาณ 30-50 kHz และน้ำหนักน้อยกว่า 20 gm. และสามารถใช้ได้ในช่วง 0-10 kHz



รูปที่ 4-24 การตอบสนองเชิงความถี่ของ Accelerometer

ตัวอย่างที่ 4-6 An accelerometer has a suspended mass of 0.01 kg with a damped natural frequency of vibration of 150 Hz. When mounted on an engine undergoing an acceleration of 1 g at an operating speed of 6000 rpm, the acceleration is recorded as 9.5 m/s^2 by the instrument. Find the damping constant and the spring stiffness of the accelerometer. [Singiresu S. Rao, Example 10.3]

จากอัตราส่วนความเร่งที่วัดได้ กับค่าจริง จะได้

$$\frac{\text{Measured value}}{\text{True value}} = \frac{W \cdot \omega_n^2}{A_y} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{9.5}{9.81} = 0.9684$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} = 1.0663 \quad (1)$$

ความเร็วรอบการทำงาน $\omega = 6000 \times \frac{2\pi}{60} = 628.32 \text{ rad/s}$

Damped natural frequency $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 2\pi(150) = 942.48 \text{ rad/s}$

ดังนั้นจะได้ $\frac{\omega}{\omega_d} = \frac{\omega}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{r}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{628.32}{942.48} = 0.6667$

$$\Rightarrow r = 0.6667 \sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{แทนลงในสมการ (1) และจัดรูปจะได้}$$

$$1.5801\zeta^4 - 2.2714\zeta^2 + 0.7576 = 0 \quad (2)$$

แก้สมการที่ (2) จะได้ $\zeta^2 = 0.5260, 0.9115 \Rightarrow \zeta = 0.7253, 0.9547$

เนื่องจากช่วงใช้งานของ Accelerometer จะมีค่ามากกว่า เมื่อ ζ มีค่าประมาณ 0.7 ดังนั้นเลือกค่า $\zeta = 0.7253$ มาคำนวณ

Natural frequency $\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{942.48}{\sqrt{1-0.7253^2}} = 1368.8889 \text{ rad/s}$

ค่าความแข็งสปริง $k = m\omega_n^2 = 0.01(1368.8889)^2 = 18738.5628 \text{ N/m}$

ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง $c = 2m\omega_n\zeta = 2(0.01)(1368.8889)(0.7253) = 19.8571 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ **ANS**

7. สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงการสั่นสะเทือนที่มีการกระตุ้นภายนอกบังคับให้เกิดการสั่นสะเทือน ใน Part A ซึ่งเป็นส่วนที่เกี่ยวกับทฤษฎีจะเริ่มโดยพิจารณาจากระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และระบบที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนตามลำดับ ในระบบที่มีการกระตุ้นภายนอก ลักษณะการสั่นสะเทือนจะประกอบด้วยผลการสั่นสะเทือนชั่วขณะ และผลการสั่นสะเทือนในสภาวะคงตัว สำหรับผลการสั่นสะเทือนชั่วขณะจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ของระบบการสั่นสะเทือนอันได้แก่ มวล ค่าความแข็งสปริง และค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง โดยการสั่นสะเทือนในส่วนนี้จะมีความถี่ลดลงและหายไปเมื่อเวลาผ่านไปนานพอ ส่วนผลการสั่นสะเทือนในสภาวะคงตัวจะขึ้นอยู่กับขนาดและความถี่ของการกระตุ้น โดยการสั่นสะเทือนจะเกิดที่ความถี่เดียวกับความถี่การกระตุ้นเสมอ และการสั่นสะเทือนนี้จะคงอยู่ตลอดตราบที่ยังมีแรงกระตุ้นกระทำอยู่ และเมื่อมีการกระตุ้นที่ความถี่ที่ใกล้กับความถี่ธรรมชาติของระบบ ระบบจะเกิดการสั่นสะเทือนอย่างรุนแรงที่เรียกว่าการสั่นพ้อง สำหรับมุมเฟสของการสั่นสะเทือนซึ่งแสดงถึงความแตกต่างระหว่างจังหวะของการสั่นสะเทือนและแรงกระตุ้นนั้น จะมีเปลี่ยนแปลงจาก 0° ซึ่งหมายถึงแรงกระตุ้นและการสั่นเกิดในจังหวะและทิศทางเดียวกัน ไปถึง 180° ซึ่งแสดงถึงทิศทางที่ตรงกันข้ามกันของแรงกระตุ้นกับการสั่นสะเทือน เมื่อความถี่ของการกระตุ้นมีค่ามากขึ้น สำหรับใน Part B จะแสดงถึงตัวอย่างการใช้ความรู้เกี่ยวกับการสั่นสะเทือนแบบบังคับในปัญหาทางวิศวกรรม ได้แก่ การสั่นสะเทือนจากความไม่สมดุลของการหมุน การสั่นสะเทือนซึ่งเกิดจากการสั่นของพื้น และการประยุกต์ใช้ในอุปกรณ์วัดการสั่นสะเทือน อันได้แก่ Seismometer ซึ่งเป็นอุปกรณ์วัดการขจัด และ Accelerometer ซึ่งเป็นอุปกรณ์วัดความเร่งของการสั่นสะเทือน