

บทที่ 5

การสั่นสะเทือนแบบบังคับจากแรงรูปแบบต่าง ๆ

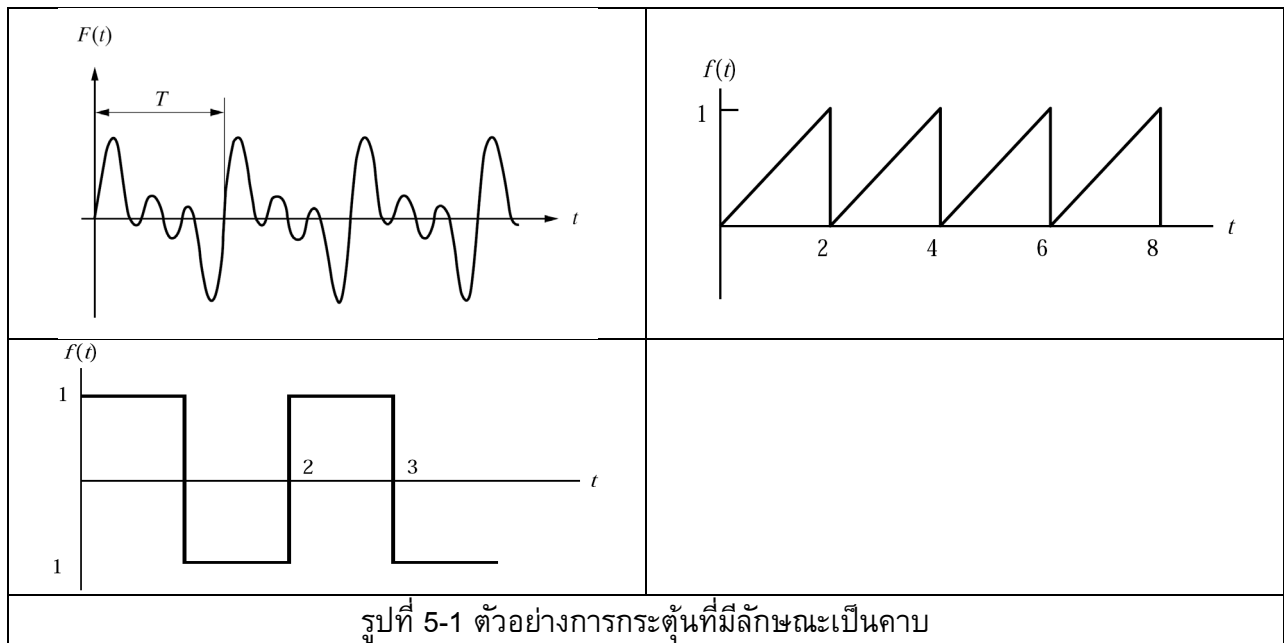
1. บทนำ

ในบทที่ 4 ได้กล่าวถึงการสั่นสะเทือนแบบบังคับ ซึ่งเกิดจากพลังงานภายนอกแบบฮาร์มอนิก ซึ่งเป็นรูปแบบอย่างง่าย และเป็นพื้นฐานของการพิจารณาการสั่นสะเทือนโดยพลังงานภายนอกรูปแบบอื่นๆ ในบทนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการพิจารณาการสั่นสะเทือนแบบบังคับ ซึ่งเกิดจากพลังงานภายนอกรูปแบบอื่นๆ โดยจะแบ่งเป็น 3 ส่วนใหญ่ๆ เริ่มจาก Part A ซึ่งกล่าวถึงการสั่นสะเทือนจากพลังงานเป็นคาบรูปแบบใดๆ หลังจากนั้น ใน Part B จะกล่าวถึงการสั่นแบบบังคับจากการกระแทก หรือพัลส์ (Pulse) ซึ่งผลเฉลยที่ได้จากการกระแทกนี้ ยังเป็นพื้นฐานของการพิจารณาการสั่นเนื่องจากพลังงานกระตุ้นรูปแบบใดๆ ซึ่งไม่มีความสัมพันธ์เป็นคาบ ใน Part C ซึ่งจะกล่าวถึงเป็นลำดับสุดท้ายของบทนี้

Part A การสั่นสะเทือนจากพลังงานเป็นคาบรูปแบบใดๆ

2. ลักษณะการกระตุ้นและแนวคิดในการวิเคราะห์ปัญหา

เครื่องจักรกลแทบทุกชนิด ไม่ว่าจะเป็นเครื่องยนต์ มอเตอร์ พัดลม ปัมป์ หรือชิ้นส่วนกลในเครื่องจักร เช่น เฟือง โซ่ สายพาน ตลับลูกปืน จะมีการทำงานเป็นคาบ ดังนั้นพลังงานกระตุ้นที่ทำให้เกิดการสั่นสะเทือนในเครื่องจักรกลหรือชิ้นส่วนเหล่านี้จึงมีลักษณะเป็นคาบด้วย ตัวอย่างการกระตุ้นที่เป็นคาบแสดงดังรูปที่ 5-1



หากกำหนดให้คาบของการกระตุ้นเหล่านี้มีค่าเท่ากับ T จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของฟังก์ชันของการกระตุ้นได้ดังสมการ

$$F(t) = F(t + T) \quad (5-1)$$

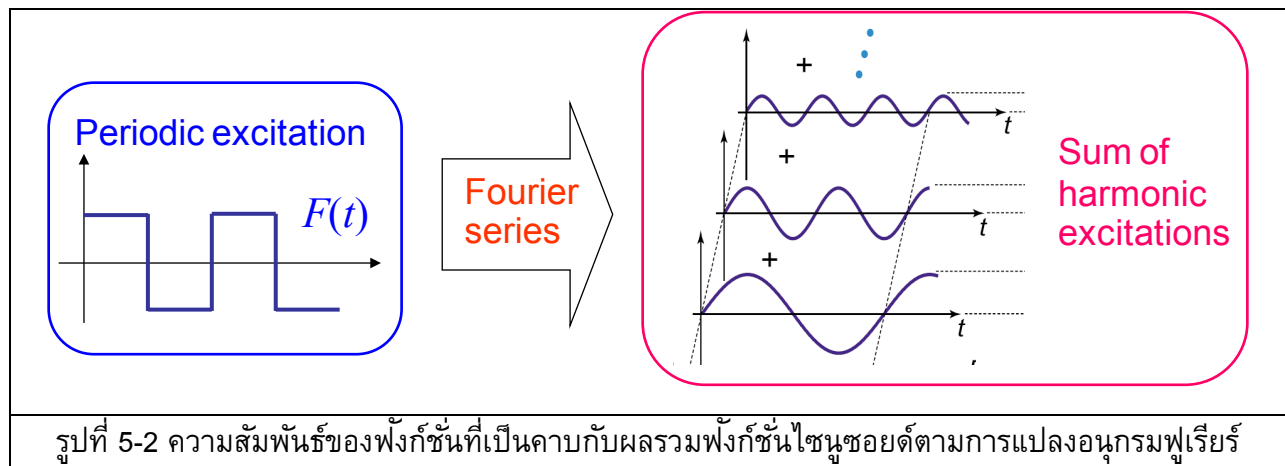
เนื่องจากฟังก์ชันที่เป็นคาบรูปแบบใดๆ ก็ตาม จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ของผลรวมของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ ที่มีความถี่เป็นจำนวนเท่าของความถี่ที่มากระตุ้น ($1/T$) ได้ตามหลักการของอนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier series) ดังแสดงในแผนภาพรูปที่ 5-2 และสมการ

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \dots \\ + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \dots$$

หรือ

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (5-2)$$

โดย $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ คือความถี่การกระตุ้นของฟังก์ชันคาบรูปแบบใดๆ



ค่าคงที่ a_0 ในสมการ (5-2) สามารถหาได้โดยคูณค่า dt และอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ (5-2) ตั้งแต่ 0 ถึงคาบ T เทอมที่มีพจน์ของไซน์ และโคไซน์ เมื่ออินทิเกรตครบหนึ่งคาบจะมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด เหลืออยู่แต่เพียงพจน์ของ a_0 โดยจะหาค่า a_0 ได้จากสมการ

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt$$

ค่าคงที่ a_n และ b_n ก็สามารถหาได้ทำนองเดียวกับ a_0 โดยการคูณค่า $\cos(m\omega_0 t) dt$ หรือ $\sin(m\omega_0 t) dt$ ในสมการ (5-2) และอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการตั้งแต่ 0 ถึง T การอินทิเกรตเทอมที่มี

พจน์ $a_0 \cos(m\omega_0 t) dt$ หรือ $a_0 \sin(m\omega_0 t) dt$ และเทอม $a_n \cos(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt$ หรือ $b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt$ ครบหนึ่งคาบจะได้ค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด แต่สำหรับการอินทิเกรตเทอม $a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt$ หรือ $b_n \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt$ แล้ว ค่าที่ได้จะเท่ากับศูนย์หากค่า m ไม่เท่ากับ n แต่การอินทิเกรตจะมีค่าเมื่อ m เท่ากับ n ดังนั้นด้วยวิธีนี้จะเหลือเพียงเทอมที่มีค่า m เท่ากับ n ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ a_n และ b_n เท่านั้น เมื่อจัดรูปสมการจะทำให้หาค่า a_n และ b_n ได้ดังสมการ

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{และ} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

จากพื้นฐานของอนุกรมฟูเรียร์ข้างต้น ปัญหาการสั่นสะเทือนจากการกระตุ้นที่เป็นคาบซึ่งมีสมการการเคลื่อนที่

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (5-3)$$

จึงสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (5-4)$$

เนื่องจากในสมการที่ (5-4) แแรงกระตุ้นด้านขวามือของสมการแต่ละเทอม เป็นค่าคงที่ หรืออยู่ในรูปของฮาร์โมนิกฟังก์ชัน ซึ่งการสั่นสะเทือนโดยแรงกระตุ้นแต่ละเทอมสามารถหาผลเฉลยได้ทั้งหมด หากให้ x_1, x_2, x_3, \dots เป็นผลเฉลยการสั่นสะเทือนเนื่องจากแรงกระตุ้นทางด้านขวาแต่ละเทอม จะสามารถหาผลเฉลยการสั่นสะเทือนเนื่องจากฟังก์ชันที่เป็นคาบ $F(t)$ ในสมการที่ (5-3) ได้ด้วยหลักการ superposition โดยหากให้ $x(t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (5-3) หรือ (5-4) จะได้ว่า

$$x(t) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots \quad (5-5)$$

Note

1. การจะใช้หลักการ superposition ได้ สมการการเคลื่อนที่ต้องเป็นสมการเชิงเส้น (Linear equation) หากไม่ใช่สมการเชิงเส้น ต้องประมาณให้เป็นสมการเชิงเส้นเสียก่อน
2. เนื่องจากฟังก์ชัน $F(t)$ จะเขียนให้อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ได้ตามหลักการของอนุกรมฟูเรียร์ ดังนั้นผลเฉลยในสมการ (5-5) จะถูกต้อง ก็ต่อเมื่อรวมค่า x ต่างๆ ไปจนถึงพจน์ที่อนันต์ อย่างไรก็ตามในการคำนวณจริงๆ ไม่สามารถทำได้ จึงอาจจะประมาณค่าการสั่นสะเทือน x โดยใช้พจน์แรกๆ ของ x_n ได้ ตามสมการ

$$x(t) \approx x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

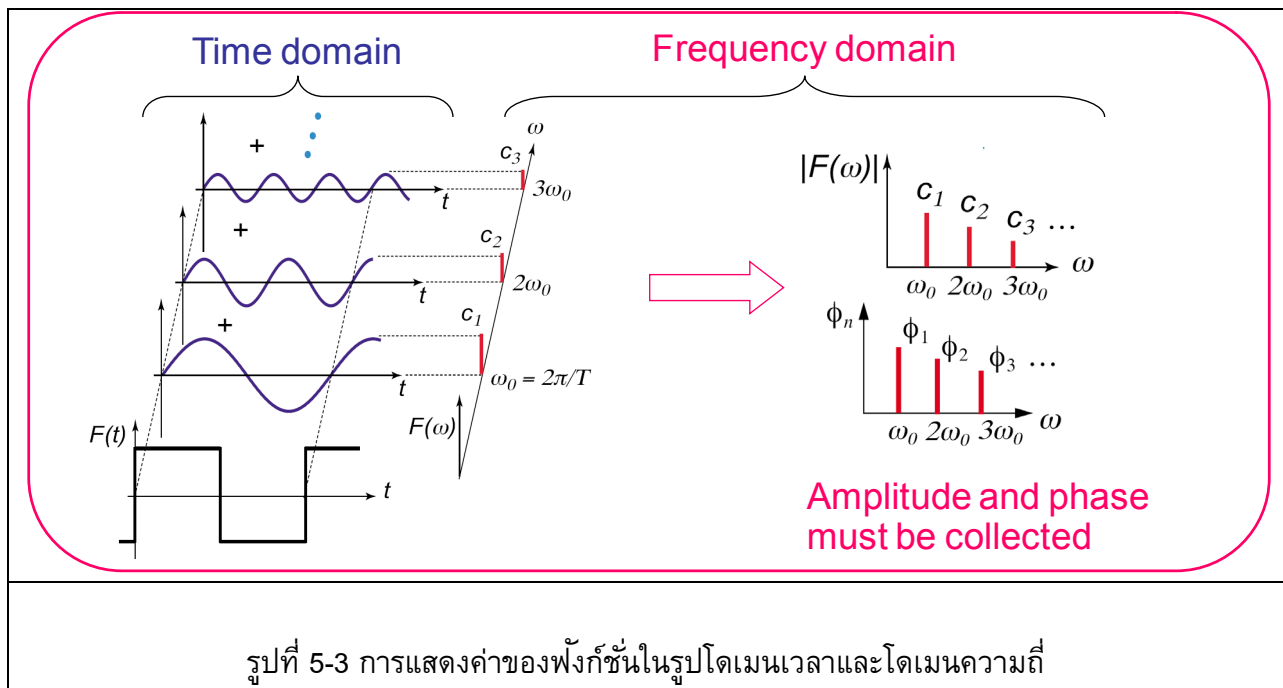
3. โดเมนความถี่และการหาผลเฉลย

หลักการของการเขียนฟังก์ชันที่เป็นคาบให้อยู่ในรูปของผลรวมของอนุกรมฟูเรียร์ ทำให้สามารถเปลี่ยนรูปแบบการแสดงผลของฟังก์ชันจากโดเมนเวลาให้อยู่ในรูปของโดเมนความถี่ได้ ดังแสดงในรูปที่ 5-3 ด้านล่างซ้ายมือในรูปที่ 5-3 แสดงฟังก์ชันคลื่นรูปสี่เหลี่ยมโดยแทนนอนเป็นแกนเวลา เรียกการแสดงผลฟังก์ชันโดยแทนนอนเป็นแกนเวลานี้ว่า การแสดงผลในโดเมนเวลา สำหรับฟังก์ชันคลื่นรูปสี่เหลี่ยมนี้สามารถเขียนในรูปผลรวมของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ที่ความถี่เป็นจำนวนเท่าของความถี่ฟังก์ชันคลื่นรูปสี่เหลี่ยม ω_0 ตามหลักการของอนุกรมฟูเรียร์ได้ และผลรวมของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่ความถี่ใดๆ นั้น ยังสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันโคไซน์ (หรือไซน์) ที่มีมูเฟสต่างๆ กันได้ดังสมการ

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = C_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n)$$

โดย $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ และ $\phi_n = \arctan(b_n/a_n)$

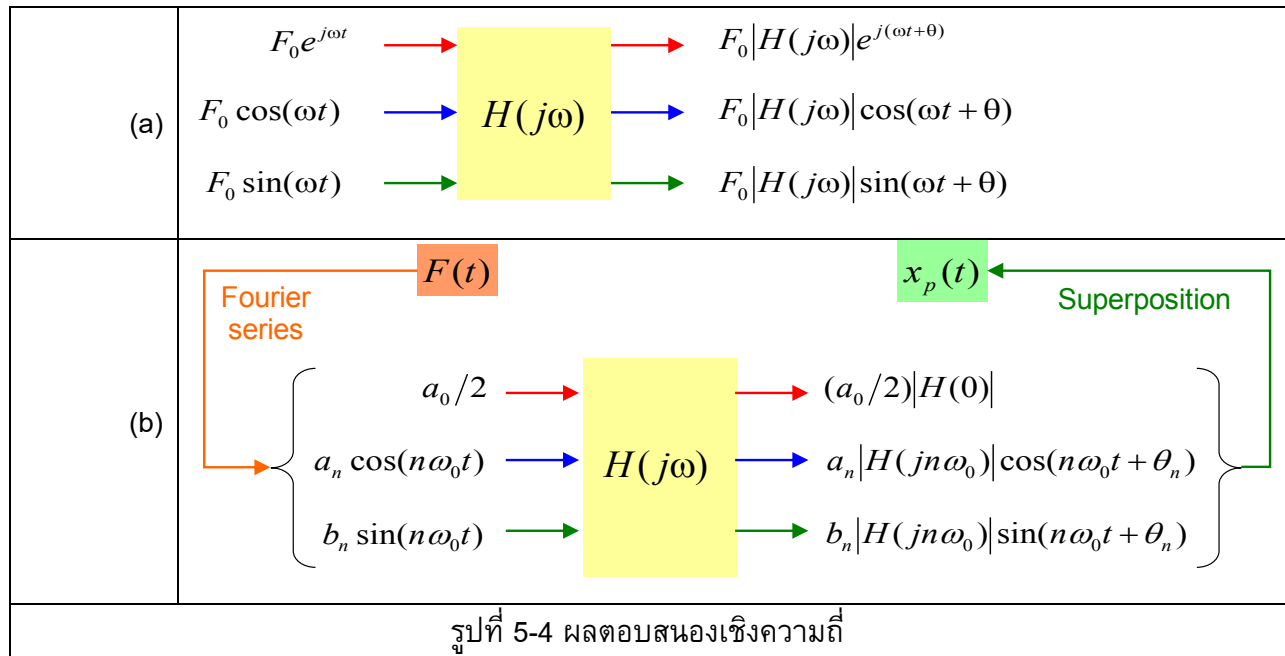
หากนำค่า C_n และมูเฟส ϕ_n ที่ความถี่ต่างๆ ในอนุกรมฟูเรียร์มาเขียนกราฟโดยให้แกนนอนแสดงความถี่ ดังแสดงทางด้านขวาของรูปที่ 5-3 แล้ว จะทำให้สามารถแสดงข้อมูลของกราฟรูปสี่เหลี่ยมได้ในอีกรูปแบบหนึ่ง การแสดงข้อมูลในรูปแบบที่แกนนอนแสดงความถี่นั้นเรียกว่า การแสดงผลในโดเมนความถี่ ซึ่งสามารถแปลความหมายได้ว่า กราฟรูปสี่เหลี่ยมในโดเมนเวลา ประกอบขึ้นจากฟังก์ชันโคไซน์ที่มีขนาด C_1 และมูเฟส ϕ_1 รวมกับฟังก์ชันโคไซน์ที่มีขนาด C_2 และมูเฟส ϕ_2 และรวมกับฟังก์ชันโคไซน์ที่มีขนาด C และมูเฟส ϕ ไปเรื่อยๆ ดังแสดงในรูป



Note

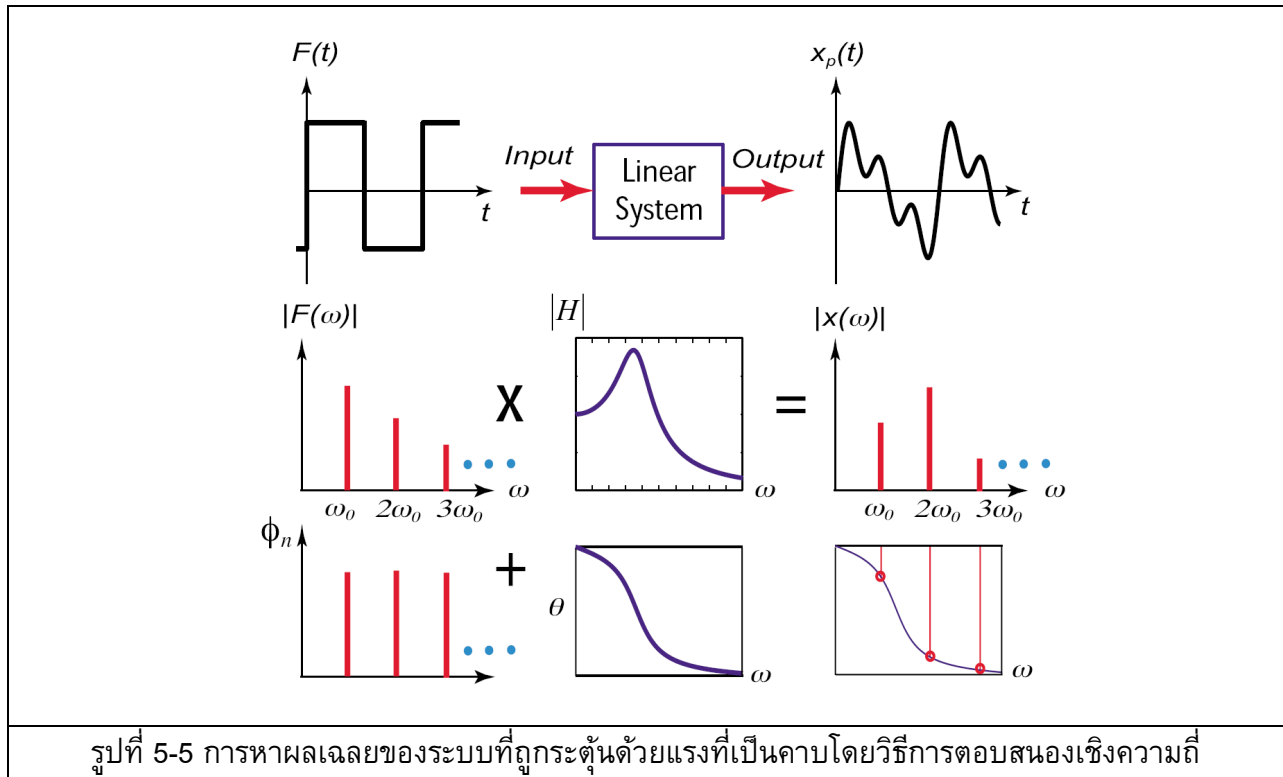
1. เราอาจแสดงข้อมูลของฟังก์ชันที่เป็นคาบในรูปของโดเมนเวลา หรือโดเมนความถี่ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลทั้งขนาดและมุมเฟสก็ได้ โดยการแสดงทั้งในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่จะให้ข้อมูลเช่นเดียวกัน
2. การแสดงผลของข้อมูลในโดเมนความถี่ อาจเรียกชื่ออีกอย่างว่า สเปกตรัมของข้อมูลนั้น

การหาผลเฉลยของการสั่นสะเทือนโดยการกระตุ้นที่เป็นคาบ สามารถทำได้โดยให้หลักการของการตอบสนองเชิงความถี่ (Frequency response) ดังที่ได้อธิบายมาในบทที่ 4 และแสดงสรุปในรูปที่ 5-4 (a) จากรูปจะเห็นว่าหากทราบการตอบสนองเชิงความถี่ $H(j\omega)$ เมื่อกำหนดการกระตุ้นทางด้านซ้ายมือ จะสามารถคำนวณหาค่าผลเฉลยซึ่งแสดงทางด้านขวามือได้โดยง่าย ในกรณีของการกระตุ้นตามรูปแบบของสมการที่ (5-4) จะสามารถหาผลเฉลยได้ดังแสดงในรูปที่ 5-4 (b)



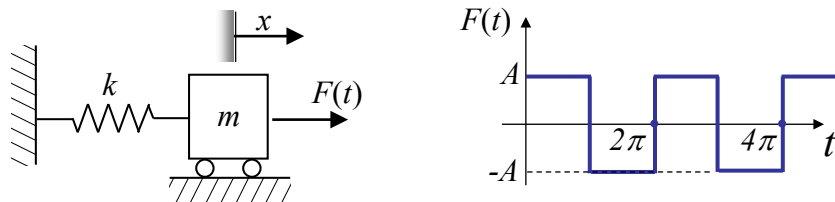
รูปที่ 5-5 แสดงตัวอย่างของการหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้นที่ถูกกระตุ้นด้วยแรงที่มีลักษณะเป็นคลื่นรูปสี่เหลี่ยม โดยแรงกระตุ้นนี้สามารถเขียนให้อยู่ในโดเมนความถี่ โดยแยกเป็นสเปกตรัมของขนาดแรง และสเปกตรัมของมุมเฟสของแรง สำหรับการตอบสนองเชิงความถี่ $H(j\omega)$ สามารถแยกออกเป็นการตอบสนองเชิงความถี่ของขนาด และของมุมเฟสเช่นกัน โดยผลเฉลยในโดเมนความถี่ของขนาดการสั่นสะเทือน $x(\omega)$ สามารถหาได้โดยคูณขนาดของแรงกระตุ้นกับการตอบสนองเชิงความถี่ของขนาด ที่ความถี่เดียวกับความถี่แรงกระตุ้นนั้น ส่วนมุมเฟสของผลเฉลยสามารถหาได้ทำนองเดียวกัน โดยบวกมุมเฟสของแรงกระตุ้นกับผลการตอบสนองเชิงความถี่ของมุมเฟสที่ความถี่นั้น ข้อมูลของขนาดและเฟสของการ

สั้นสะท้อนในโดเมนความถี่สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของโดเมนเวลา ดังแสดงด้วยกราฟของ $x_p(t)$ ทางด้านบนขวาของรูป



ตัวอย่างที่ 5-1

A square wave force $F(t)$ is applied to a 1-kg mass with $k = 4$ N/m. Determine steady-state response of the mass



สมการการเคลื่อนที่ (EOM) ของระบบในรูป สามารถเขียนได้ดังนี้ : $m\ddot{x} + kx = F(t)$

เมื่อแทนค่ามวลและค่าความแข็งเกร็งของสปริง จะได้ : $\ddot{x} + 4x = F(t)$

จากสมการจะได้ค่าความถี่ธรรมชาติ $\omega_n = \sqrt{k/m} = 2$ rad/s

สำหรับแรงกระตุ้นสามารถเขียนในรูปฟังก์ชันได้เป็น

$$F(t) = A; \quad 0 \leq t < T/2$$

และ $F(t) = -A; \quad T/2 \leq t < T$

จากรูปจะได้ $T = 2\pi$ และ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ rad/s}$

เมื่อสามารถเขียน $F(t)$ ในรูปฟังก์ชันได้แล้ว จะสามารถปรับให้อยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ได้ดังนี้

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

สามารถหาค่าคงที่ต่างๆ ได้จาก

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} A dt + \int_{\pi}^{2\pi} -A dt \right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} A \cos(nt) dt + \int_{\pi}^{2\pi} -A \cos(nt) dt \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} A \sin(nt) dt + \int_{\pi}^{2\pi} -A \sin(nt) dt \right] = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

ดังนั้นจะได้

$$F(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right]$$

แทนค่าฟังก์ชัน $F(t)$ ลงใน EOM จะได้

$$\ddot{x} + 4x = \frac{4A}{\pi} \left[\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right]$$

Review

การหาผลเฉลยการสั่นสะเทือนด้วยวิธีการ Frequency response

EOM: $m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$

The steady-state response: $x_p(t) = |H(\omega)| F_0 \cdot \sin(\omega t + \theta)$

โดย: $|H(\omega)| = \frac{1}{|\omega_n^2 - \omega^2|}$

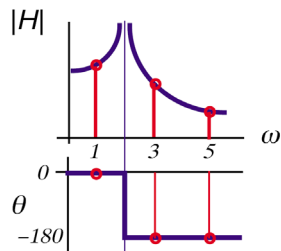
$\theta = 0$, when $\omega < \omega_n$

$\theta = -\pi$, when $\omega > \omega_n$

จากผลเฉลยที่แสดงข้างต้น จะสามารถหาคำตอบของสมการ EOM ได้ดังนี้

$$x_p = \frac{4A}{\pi} \left[|H(1)| \sin(t + \theta_1) + \frac{1}{3} |H(3)| \sin(3t + \theta_3) + \frac{1}{5} |H(5)| \sin(5t + \theta_5) + \dots \right]$$

โดยค่า $|H(\omega)|$ และ θ_n หาได้จากตารางด้านล่าง



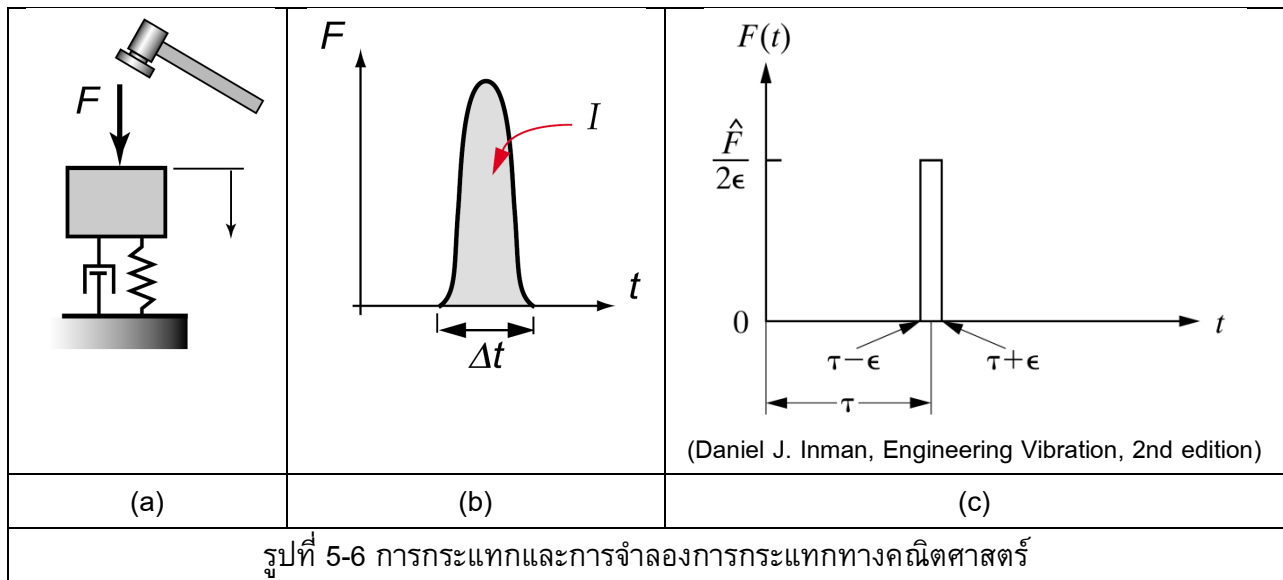
n	$ H(nj) $	θ_n
1	1/3	0
3	1/5	-180
5	1/21	-180

ANS

Part B การสั่นสะเทือนจากการกระแทกหรือพัลส์

4. ฟังก์ชันอิมพัลส์ (Impulse function)

การกระแทกเป็นการให้แรงในช่วงเวลาสั้นๆ เช่นการเคาะของค้อนที่ระบบการสั่นสะเทือนระบบหนึ่ง ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 5-6(a) หากเขียนกราฟของแรงกระทำระหว่างแรงกับเวลา จะได้กราฟดังแสดงในรูปที่ 5-6(b) โดยช่วงเวลาที่แรงกระทำจะเป็นเพียงช่วงสั้นๆ ส่วนขนาดแรงที่กระทำมักจะมีค่ามาก ในทางคณิตศาสตร์ได้จำลองแรงเนื่องจากการกระแทกในรูป 5-6(b) ให้เป็นดังรูปที่ 5-6(c) โดยแรงกระแทกจะกระทำที่เวลาตั้งแต่ $\tau - \epsilon$ จนถึงเวลา $\tau + \epsilon$ โดยขนาดของแรงกระทำในช่วงเวลานี้มีค่าคงที่เท่ากับ $\hat{F}/2\epsilon$



จากรูปที่ 5-6(c) จะเขียนความสัมพันธ์ของฟังก์ชันแรง $F(t)$ ได้ดังนี้

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \tau - \epsilon \\ \frac{\hat{F}}{2\epsilon} & \tau - \epsilon < t < \tau + \epsilon \\ 0 & t \geq \tau + \epsilon \end{cases} \quad (5-6)$$

โดย ϵ เป็นค่าบวกที่มีขนาดเล็ก จากนิยามของ $F(t)$ ข้างต้น สามารถนำ $F(t)$ มาอินทิเกรตเพื่อหาการดลหรืออิมพัลส์ (Impulse, I) ของแรงได้ดังสมการ

$$I(\epsilon) = \int_{\tau - \epsilon}^{\tau + \epsilon} F(t) dt$$

อย่างไรก็ตามเนื่องจาก $F(t)$ ในช่วงอื่นๆ มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการการอินทิเกรตให้ครอบคลุมช่วงที่กว้างขึ้นได้ดังนี้

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt \quad (5-7)$$

ผลของการอินทิเกรตสมการ (5-7) จะได้พื้นที่ใต้กราฟในรูปที่ 5-6(c) และสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = \frac{\hat{F}}{2\varepsilon} \cdot 2\varepsilon = \hat{F} \quad (5-8)$$

เมื่อช่วงเวลาที่แรงกระทำสั้นมากๆ ($\varepsilon \rightarrow 0$) อาจจะนิยามฟังก์ชันอิมพัลส์ $F(t)$ ได้ตามสมการ

$$F(t - \tau) = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad t \neq \tau \quad (5-9)$$

$$\text{และ} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t - \tau) dt = \hat{F} \quad (5-10)$$

ในกรณีที่ $\hat{F} = 1$ ฟังก์ชันอิมพัลส์ $F(t)$ จะถูกเรียกว่า ฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย (Unit impulse function) หรือ Dirac delta function ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $\delta(t)$ และมีหน่วยเป็น N ได้ตามสมการ

$$\delta(t - \tau) = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad t \neq \tau \quad (5-11)$$

$$\text{และ} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 \quad (5-12)$$

5. การสั่นสะเทือนจากการกระตุ้นโดยอิมพัลส์

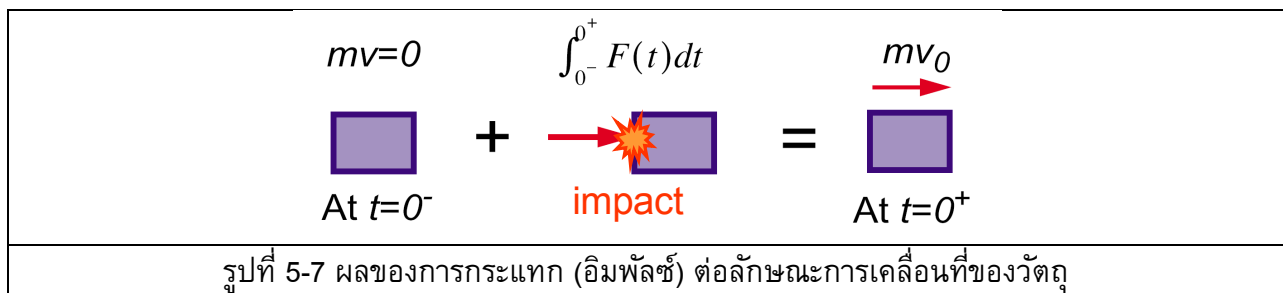
ก่อนที่จะพิจารณาถึงลักษณะการสั่นสะเทือนจากการดล หรืออิมพัลส์ ในเบื้องต้นจะอธิบายก่อนว่าการกระแทกนั้นทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ได้อย่างไร เมื่อพิจารณาถึงสมการการเคลื่อนที่ของนิวตัน ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง จาก $F = ma$ จะได้

$$\int F dt = \int (ma) dt$$

$$\text{หรือ} \quad I = m(v_2 - v_1) = m\Delta v \quad (5-13)$$

จะเห็นว่าการดลทำให้ความเร็วของการเคลื่อนที่เปลี่ยนแปลงไป รูปที่ 5-7 แสดงวัตถุที่อยู่ในตอนแรกหยุดนิ่ง เมื่อได้รับการกระแทกที่เวลา $t = 0$ จะมีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม โดยความเร็วเปลี่ยนไปเป็น v_0

และจะได้ว่า $I = m(v_0 - 0) = mv_0$ หรือ $v_0 = \frac{I}{m} = \frac{\hat{F}}{m}$ โดยการขจัดไม่มีการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลานี้



สำหรับในระบบการสั่นสะเทือน ดังเช่นในตัวอย่างรูปที่ 5-6(a) นั้น หากสมมุติให้วัตถุได้รับแรงที่ทำให้เกิดอิมพัลส์หนึ่งหน่วย ที่เวลา $t = 0$ จะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \quad (5-14)$$

เนื่องจากวัตถุหยุดเริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่ง จึงมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นดังนี้

$$t = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (5-15)$$

อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาเวลาที่ผ่านไปเพียงเล็กน้อย ($t = 0^+$) หลังจากที่ได้รับแรงจากอิมพัลส์หนึ่งหน่วยกระทำแล้ว ระบบนี้จะไม่มีความกระทำอีกต่อไป โดยผลของแรงทำให้วัตถุเริ่มเคลื่อนที่โดยมีความเร็ว

เท่ากับ $v_0 = \frac{I}{m} = \frac{\hat{F}}{m} = \frac{1}{m}$ แต่ยังคงถือว่ายังไม่มีเปลี่ยนแปลงการขจัด ในกรณีนี้จะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่และเงื่อนไขค่าเริ่มต้นได้ดังนี้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5-16)$$

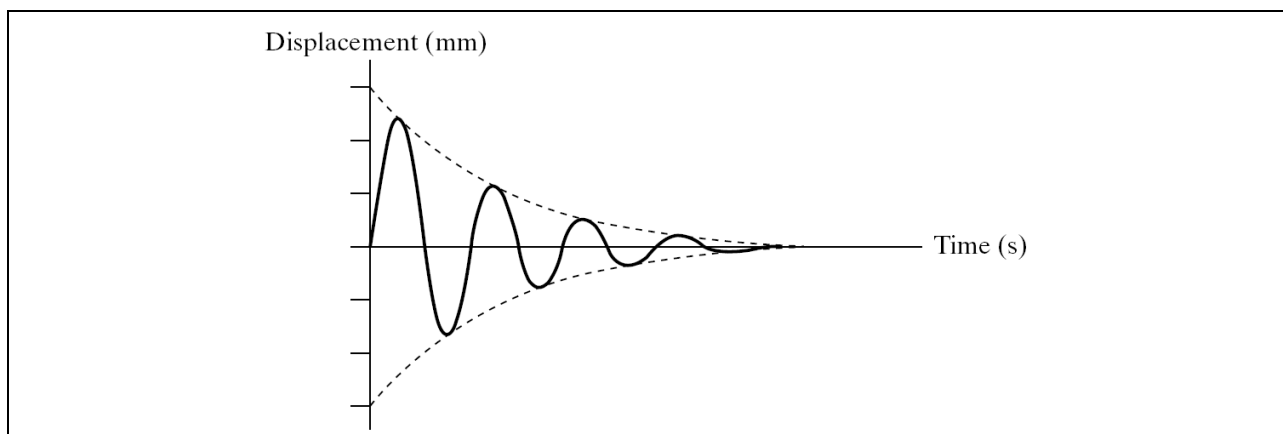
$$t = 0^+, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1/m \quad (5-17)$$

จากการพิจารณาข้างต้นจึงสรุปได้ว่า การสั่นสะเทือนจากแรงที่ทำให้เกิดอิมพัลส์หนึ่งหน่วย มีค่าเท่ากับ การสั่นสะเทือนอย่างอิสระ ซึ่งมีความเร็วเริ่มต้นเท่ากับ $\dot{x}(0) = 1/m$ ดังนั้นการหาผลเฉลยที่แสดงถึงลักษณะการสั่นสะเทือน จึงสามารถทำได้ด้วยวิธีการเช่นเดียวกับการหาผลเฉลยของการสั่นสะเทือนอย่างอิสระ

จากสมการที่ (5-16) และ (5-17) ในกรณีที่ระบบเป็นแบบ Underdamp จะสามารถหาผลเฉลยของการสั่นสะเทือนอย่างอิสระได้ดังสมการ

$$h(t) = x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t \quad (5-18)$$

กราฟแสดงการสั่นตามสมการที่ (5-18) แสดงในรูปที่ 5-8 ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นเช่นเดียวกับลักษณะการสั่นสะเทือนแบบอิสระ ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นความเร็วเพียงอย่างเดียวโดยไม่มีการขจัด



รูปที่ 5-8 การสั่นสะเทือนเนื่องจากอิมพัลส์ที่เวลา $t = 0$

หากการกระแทกเกิดที่เวลา $t = \tau$ การหาผลเฉลยก็ทำได้ทำนองเดียวกัน โดยก่อนการกระแทกวัตถุจะไม่มี การสั่นสะเทือน ส่วนหลังการกระแทกวัตถุจะมีการสั่นเช่นเดียวกับที่แสดงในสมการ (5-18) เพียงแต่ค่า t ในสมการจะเปลี่ยนไปเป็น $t - \tau$ แทน โดยจะสรุปเป็นสมการได้ดังนี้

$$x(t) = 0 \quad \text{เมื่อ } 0 < t \leq \tau \quad (5-19)$$

$$x(t) = h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t - \tau) \quad \text{เมื่อ } t > \tau \quad (5-20)$$

เรียก $h(t)$ และ $h(t - \tau)$ ฟังก์ชันการตอบสนองต่ออิมพัลส์ (Impulse response function)

เมื่อระบบถูกกระทำด้วยแรงที่ทำให้เกิดอิมพัลส์ขนาดใดๆ ก็ยังสามารถหาการสั่นสะเทือนของระบบได้โดยใช้วิธีการเดียวกัน โดยในกรณีนี้สมการการเคลื่อนที่คือ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{F}\delta(t) \quad (5-21)$$

โดย \hat{F} คือขนาดของอิมพัลส์ ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้นในกรณีนี้คือ $t = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$

สมการที่ (5-21) และเงื่อนไขเริ่มต้นข้างต้น สามารถแปลงให้เป็นสมการการสั่นสะเทือนอย่างอิสระ และเงื่อนไขเริ่มต้นที่ใช้คำนวณทำนองเดียวกับสมการ (5-16) และ (5-17) ได้ดังนี้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5-22)$$

$$t = 0^+, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \hat{F}/m \quad (5-23)$$

สำหรับการสั่นสะเทือนตามสมการ (5-22) สามารถแสดงได้ในรูปเดียวกับสมการ (5-18) โดยเปลี่ยนขนาดจากอิมพัลส์หนึ่งหน่วยเป็น \hat{F} ดังนี้

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t = \hat{F} \cdot h(t) \quad (5-24)$$

เมื่อการกระแทกเกิดที่เวลา $t = \tau$ ใดๆ ก็ยังสามารถหาผลเฉลยได้ดังสมการ

$$x(t) = 0 \quad \text{เมื่อ } 0 < t \leq \tau \quad (5-25)$$

$$x(t) = \hat{F} \cdot h(t - \tau) = \frac{\hat{F}}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t - \tau) \quad \text{เมื่อ } t > \tau \quad (5-26)$$

ตัวอย่างที่ 5-2

ในระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วง อย่างง่าย กำหนดให้ $m = 1$ kg, $c = 0.5$ kg/s และ $k = 4$ N/m

ระบบนี้ถูกกระทำด้วยแรงกระแทก $F(t) = 0.2\delta(t) + 0.1\delta(t - \tau)$

จงหาผลตอบสนองของระบบต่อแรงกระแทกนี้

(Example 3.1.1, Daniel J. Inman, Engineering Vibration, Second edition)

จากโจทย์จะได้

ความถี่ธรรมชาติ $\omega_n = \sqrt{4/1} = 2$ rad/s

อัตราส่วนการหน่วง $\zeta = c/(2m\omega_n) = 0.5/(2 \times 1 \times 2) = 0.125$

เนื่องจากระบบนี้เป็นระบบเชิงเส้น จึงสามารถใช้หลักการของ superposition ได้
ในที่นี้จะพิจารณาผลของแรงกระแทกทีละตัว แล้วจึงนำมารวมกันในภายหลัง

สำหรับแรง $F(t) = 0.2\delta(t)$ จะได้ผลการสั่นสะเทือนตามสมการ (5-26) ดังนี้

$$x_1(t) = \frac{0.2}{(1)(2\sqrt{1-0.125^2})} e^{-(0.125)(2)t} \sin(2\sqrt{1-0.125^2} \cdot t)$$

$$x_1(t) = 0.100e^{-0.25t} \sin(1.984t)$$

สำหรับแรง $F(t) = 0.1\delta(t - \tau)$ จะได้ผลการสั่นสะเทือนตามสมการ (5-26) ดังนี้

$$x_2(t) = \frac{0.1}{(1)(2\sqrt{1-0.125^2})} e^{-(0.125)(2)(t-\tau)} \sin(2\sqrt{1-0.125^2} \cdot (t-\tau))$$

$$x_2(t) = 0.0504e^{-0.25(t-\tau)} \sin(1.984(t-\tau))$$

เมื่อรวมผลของการสั่นสะเทือนทั้งสองส่วนเข้าด้วยกัน จะได้สมการที่แสดงถึงผลเฉลยของการสั่นสะเทือนดังนี้

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \begin{cases} 0.100e^{-0.25t} \sin(1.984t) & 0 < t < \tau \\ 0.100e^{-0.25t} \sin(1.984t) + 0.0504e^{-0.25(t-\tau)} \sin(1.984(t-\tau)) & t \geq \tau \end{cases}$$

กำหนดให้ Heaviside step function มีนิยามดังต่อไปนี้

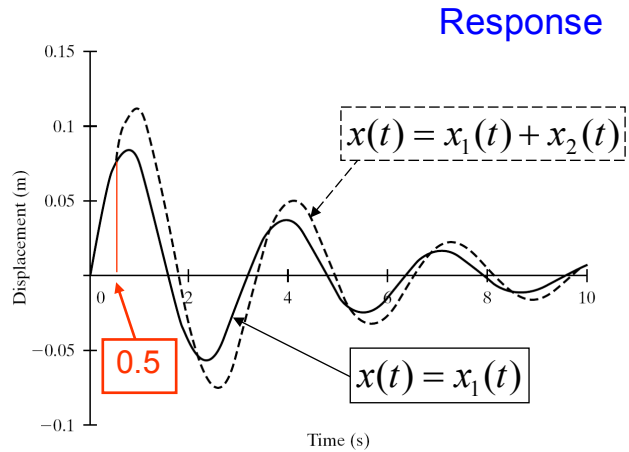
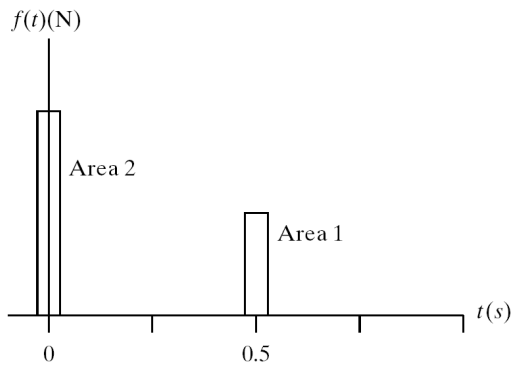
$$\Phi(t - \tau) \text{ or } H(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } 0 < t < \tau \\ 1 & \text{เมื่อ } t \geq \tau \end{cases}$$

ดังนั้นจะสามารถเขียนการสั่นสะเทือนได้ดังนี้

$$x(t) = 0.100e^{-0.25t} \sin(1.984t) + [0.0504e^{-0.25(t-\tau)} \sin(1.984(t-\tau))] \cdot \Phi(t - \tau)$$

ANS

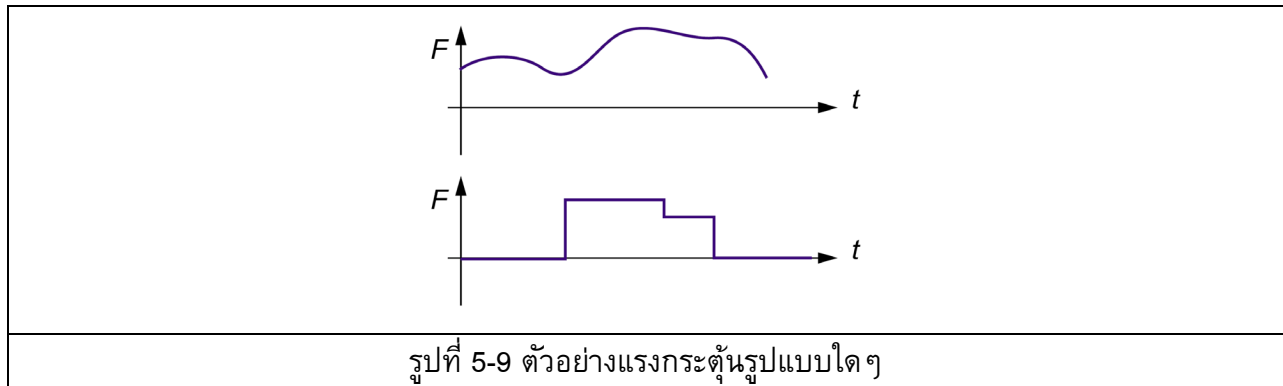
หากให้ $\tau = 0.5$ จะสามารถเขียนกราฟของแรงกระแทกได้ดังรูปทางด้านซ้ายมือ ส่วนกราฟการสั่นสะเทือนแสดงทางด้านขวามือ โดยเส้นทึบแสดงการสั่นสะเทือน $x_1(t)$ จากแรงที่เวลา $t = 0$ s เพียงแรงเดียว เมื่อถึงเวลาที่ $t = 0.5$ s เนื่องจากผลของแรงกระแทกอีกครั้งหนึ่ง ทำให้การสั่นสะเทือนเพิ่มขึ้น โดยเส้นประแสดงผลรวมของการสั่นสะเทือนจากแรงทั้งสองครั้ง ($x_1(t) + x_2(t)$)



Part B การสั่นสะเทือนจากการกระตุ้นรูปแบบใด ๆ

6. Convolution integral และผลการตอบสนองของการสั่นสะเทือน

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการสั่นสะเทือนจากการกระตุ้นรูปแบบใด ๆ ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 5-9 สำหรับการหาผลการสั่นสะเทือนเนื่องจากการกระตุ้นลักษณะนี้ จะต้องใช้พื้นฐานความรู้ 3 ส่วนประกอบกัน อันได้แก่ 1) การตอบสนองต่อการกระตุ้นแบบอิมพัลส์ซึ่งกล่าวถึงไปแล้วในส่วนก่อนหน้า 2) หลักการ Superposition และ 3) Convolution integral

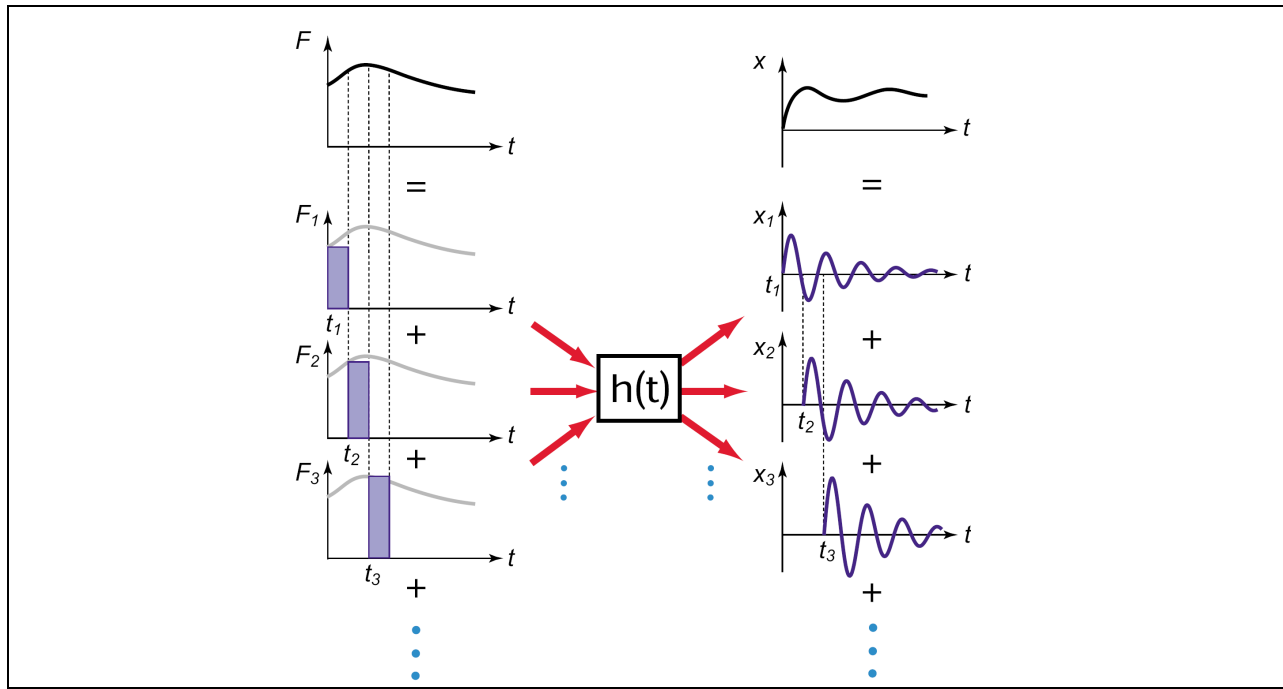


รูปที่ 5-10 แสดงแนวคิดในการหาผลเฉลยของแรงกระตุ้นแบบใด ๆ และหลักการของ Convolution integral รูปบนสุดทางด้านซ้ายมือแสดงถึงแรงกระตุ้นรูปแบบใด ๆ โดยแรงกระตุ้นนี้สามารถพิจารณาว่าเกิดจากการประกอบกันของฟังก์ชันพัลส์ขนาดต่างๆ เรียงต่อๆ กัน ดังแสดงในรูปด้านล่างซ้ายมือ โดยเมื่อพิจารณาตามลำดับเวลาที่แรงกระทำจะพบว่า เมื่อพัลส์ที่เวลา t_1 กระทำกับระบบการสั่นสะเทือนแล้ว จะทำให้ระบบสั่นตามกราฟ x_1 ทางด้านขวามือ โดยความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระตุ้นกับการสั่นสะเทือนเป็นไปตาม Response function ($h(t)$) เมื่อเวลาผ่านไปเป็นเวลา t_2 พัลส์ที่เวลานี้ก็จะทำให้เกิดการสั่นสะเทือน x_2 ซึ่งจะเริ่มสั่นที่เวลา t_2 เช่นเดียวกันกับพัลส์ที่เวลา t_3 ก็จะทำให้เกิดการสั่นสะเทือน x_3 โดยเริ่มสั่นที่เวลา t_3 เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ トラบที่ยังมีแรงกระตุ้นกระทำกับระบบอยู่ ผลการสั่นสะเทือนรวม x สามารถหาได้โดยรวม x_1, x_2, x_3, \dots เข้าด้วยกันตามลำดับเวลาที่แรงกระทำ โดยผลการสั่นสะเทือนรวม x แสดงดังกราฟด้านบนทางด้านขวามือ หลักการที่อธิบายข้างต้น สามารถนำมาเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \dots \quad (5-27)$$

การสั่นสะเทือน $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots$ เป็นการสั่นเนื่องจากการกระตุ้นแบบอิมพัลส์ จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลคูณของขนาดอิมพัลส์ และฟังก์ชันการตอบสนองต่ออิมพัลส์ดังสมการ (5-24) ได้ ดังนั้นสมการด้านบนจะสามารถเขียนได้เป็น

$$x(t) = \hat{F}_1 h(t-t_1) + \hat{F}_2 h(t-t_2) + \hat{F}_3 h(t-t_3) + \dots \quad (5-28)$$



รูปที่ 5-10 แนวคิดในการหาผลเฉลยการสั่นสะเทือนของแรงกระตุ้นรูปแบบใดๆ และ Convolution integral

เนื่องจากขนาดของอิมพัลส์ \hat{F} หาได้จากผลคูณของขนาดแรงและช่วงเวลาที่แรงกระทำ ดังนั้นจะได้

$$x(t) = F_1 \Delta t \cdot h(t - t_1) + F_2 \Delta t \cdot h(t - t_2) + F_3 \Delta t \cdot h(t - t_3) + \dots \quad (5-29)$$

กำหนดให้ τ คือเวลาที่แรง F กระทำกับระบบ ดังนั้นจะสามารถเขียน t_1, t_2, t_3, \dots ได้เป็น $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ ช่วงเวลา Δt เขียนได้เป็น $\Delta \tau$ และจะได้ด้วยว่าแรง F เป็นฟังก์ชันของ τ หรือ $F(\tau)$ เมื่อพิจารณาให้การแบ่งช่วงเวลา $\Delta \tau$ เล็กๆ สมการ (5-29) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปการอินทิเกรตได้ดังนี้

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (5-30)$$

สมการที่ (5-30) มีชื่อเรียกว่า Convolution integral ในกรณีที่ใช้ Convolution integral เพื่อหาผลการตอบสนองของระบบดังที่ได้อธิบายมาข้างต้น สมการ Convolution integral อาจเรียกอีกอย่างว่า Duhamel integral ตามชื่อของนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส J. M. C. Duhamel (1797-1872)

ในกรณีที่แรงกระทำไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ผลของการสั่นสะเทือนก็สามารถหาได้โดยใช้หลักการข้างต้นเพียงแต่แยกช่วงของแรง และ Convolution integral ออกเป็น 2 ช่วง ดังนี้

กำหนด EOM

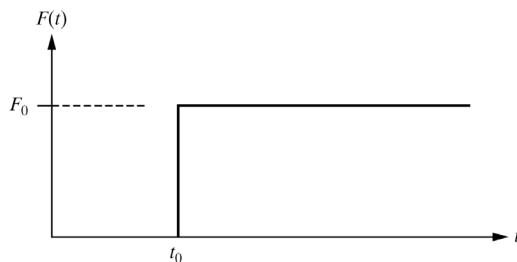
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \begin{cases} F_1(t) & 0 \leq t < t_1 \\ F_2(t) & t \geq t_1 \end{cases}$$

ผลเฉลยคือ

$$x(t) = \begin{cases} \int_0^{t_1} F_1(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau & 0 \leq t < t_1 \\ \int_0^{t_1} F_1(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t F_2(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau & t \geq t_1 \end{cases} \quad (5-31)$$

ข้อสังเกต

เนื่องจากแรงที่กระตุ้นไม่ได้เป็นคาบหรือมีส่วนประกอบที่เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก ดังนั้นความถี่การสั่นสะท้อนตามสมการที่ (5-30) หรือ (5-31) จึงเท่ากับความถี่ของฟังก์ชันการตอบสนองต่ออิมพัลส์ $h(t-\tau)$ ซึ่งก็คือความถี่ธรรมชาติที่มีตัวหน่วงการสั่นสะท้อน ω_d (ในกรณีที่ระบบเป็นแบบ underdamped motion)



ตัวอย่าง 5-3

หาลักษณะการสั่นสะท้อนของระบบมวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นอย่างง่าย ที่ได้รับแรงกระทำดังรูป และแสดงด้วย EOM ด้านล่าง

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_0 \\ F_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = v_0 = 0$

ระบบเป็นแบบ underdamped motion

(Example 3.2.1, Daniel J. Inman, Engineering Vibration, Second edition)

เนื่องจากในช่วง $0 \leq t < t_0$ ไม่มีแรงภายนอกกระทำ และเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $x_0 = v_0 = 0$ ทำให้ในช่วงแรกระบบไม่มีการเคลื่อนที่ และระบบจะเริ่มสั่นเมื่อ $t \geq t_0$ เมื่อเริ่มมีแรงคงที่มากกระทำ

จาก $h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)$

และ $F(\tau) = F_0$

แทนลงในสมการ Convolution integral จะได้

$$x(t) = \int_{t_0}^t F_0 \cdot \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \int_{t_0}^t e^{\zeta\omega_n \tau} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau$$

อินทิเกรตออกมาจะได้

$$x(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \cos[\omega_d(t-t_0) - \theta] \quad \text{เมื่อ } t \geq t_0$$

โดย

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

ANS

จากผลการสั่นสะเทือนที่ได้จะสามารถแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือ

1. Static displacement : $\frac{F_0}{k}$

2. ส่วนที่มีการสั่น : $\frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \cos[\omega_d(t-t_0) - \theta]$

เมื่อทดลองกำหนดค่าตัวแปรต่างๆ จะสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้

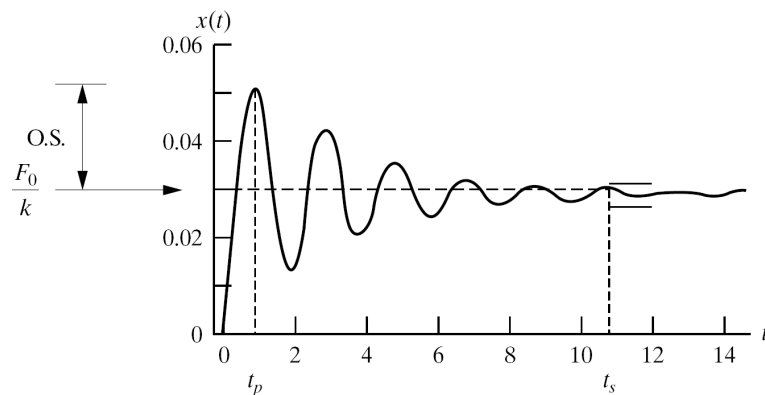
$$\zeta = 0.1$$

$$\omega_n = 3.16 \text{ rad/s}$$

$$F_0 = 30 \text{ N}$$

$$k = 1000 \text{ N/m}$$

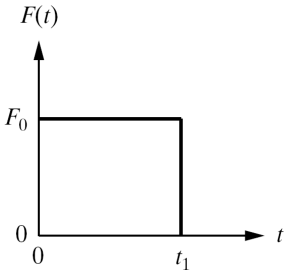
$$t_0 = 0 \text{ sec}$$



จากกราฟจะเห็นได้ว่า การให้แรงกระตุ้นแบบ step function ที่โจทย์กำหนดจะทำให้จุดสมดุลใหม่เลื่อนขึ้นไปตามค่า Static displacement และจะสั่นรอบจุดสมดุลใหม่ด้วยความถี่ธรรมชาติที่มีการหน่วง ω_d

ตัวอย่าง 5-4

หาลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบมวล สปริง และตัวหน่วงการสั่นอย่างง่าย ที่ได้รับแรงกระทำดังรูป และแสดงด้วย EOM ด้านล่าง



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t < t_1 \\ 0 & t \geq t_1 \end{cases}$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = v_0 = 0$

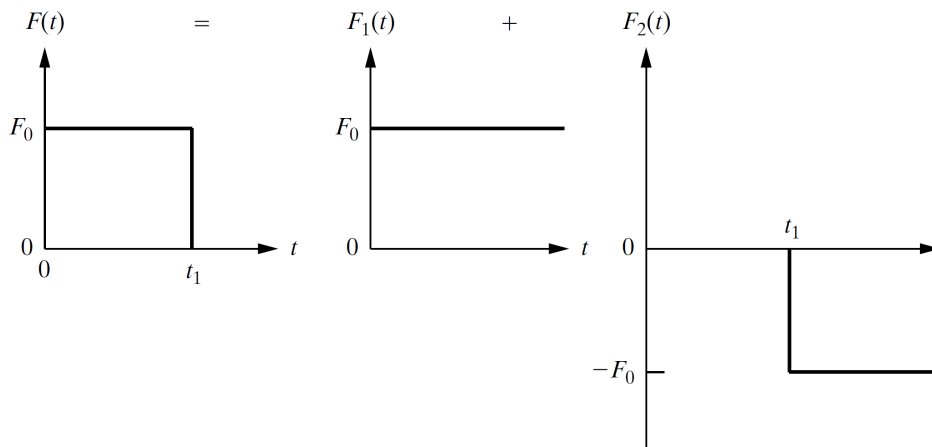
ระบบเป็นแบบ underdamped motion

(Example 3.2.2, Daniel J. Inman, Engineering Vibration, Second edition)

ในตัวอย่างนี้เป็นการให้แรงขนาดคงที่ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง หลังจากนั้นจึงเอาแรงที่ให้ออก ในข้อนี้อาจทำได้โดยใช้หลักการ Superposition ของแรงที่กระทำกับระบบ ดังแสดงในรูปด้านล่าง

1. ช่วงแรกจะให้แรงที่มีขนาดคงที่ F_0 กับระบบ
2. หลังจาก $t = t_1$ จะให้แรงที่มีขนาดตรงกันข้าม เพื่อหักล้างกับแรงในช่วงแรก ทำให้ผลลัพธ์เหมือนกับการไม่ได้ให้แรงอะไรกับระบบ

จะเห็นว่าทั้งสองช่วงเป็นการพิจารณาแรงในรูปแบบ Step function ซึ่งทราบผลเฉลยอยู่แล้วดังแสดงในตัวอย่างก่อนหน้า การคำนวณจึงทำได้โดยง่าย



สำหรับในช่วงแรก สามารถหาลักษณะการสั่นสะเทือนได้เช่นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้า

$$x(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_0)} \cos[\omega_d(t-t_0) - \theta] \quad \text{เมื่อ } t \geq t_0$$

โดย

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

เมื่อ $t_0 = 0$ จะได้

$$x(t) = x_1(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos[\omega_d t - \theta] \quad \text{เมื่อ } 0 < t \leq t_1 \quad \underline{\text{ANS}}$$

ในช่วงที่สองการสั่นสะท้อนจะเพิ่มส่วนที่ให้แรงในทิศตรงข้ามเข้ามา โดยจะสามารถหาได้เช่นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้าเช่นกัน ปรับเพียงแทน $F(\tau) = -F_0$ จะได้

$$x_2(t) = \frac{-F_0}{k} + \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)} \cos[\omega_d(t-t_1) - \theta] \quad \text{เมื่อ } t \geq t_1$$

นำการสั่นสะท้อนทั้งสองส่วนมารวมเข้าด้วยกันจะได้

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= \left[\frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos[\omega_d t - \theta] \right] + \left[\frac{-F_0}{k} + \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n(t-t_1)} \cos[\omega_d(t-t_1) - \theta] \right] \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \left[e^{\zeta\omega_n t_1} \cos[\omega_d(t-t_1) - \theta] - \cos(\omega_d t - \theta) \right] \quad \text{เมื่อ } t > t_1 \quad \underline{\text{ANS}}$$

ข้อสังเกต

ในข้อนี้หากต้องการทำตรง ๆ โดยไม่ใช้วิธี Superposition อาจทำได้ดังนี้

1. ช่วง $0 < t \leq t_1$ ทำเหมือนในตัวอย่าง
2. ช่วง $t > t_1$ เนื่องจากไม่มีแรงกระทำ แสดงว่าระบบสั่นอย่างอิสระ ดังนั้นลักษณะการสั่นสะท้อนจึงเป็นเช่นเดียวกับการสั่นอย่างอิสระ โดยการหาค่า initial condition ในช่วงนี้จะต้องสัมพันธ์กับตำแหน่งในช่วงแรก คือ $x(t_1) = x_1(t_1)$ และ $v(t_1) = \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1(t_1)$

7. สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงการหาลักษณะการสั่นสะเทือนแบบบังคับจากการกระตุ้นภายนอกในรูปแบบต่างๆ โดยแบ่งการพิจารณาตามลักษณะของการกระตุ้นออกเป็น 3 ประเภทใหญ่ๆ ได้แก่ 1) การกระตุ้นแบบเป็นคาบ 2) การกระตุ้นแบบอิมพัลส์ หรือการกระแทก และ 3) การกระตุ้นแบบใดๆ ซึ่งไม่เป็นคาบ

สำหรับการกระตุ้นแบบเป็นคาบนั้น จะใช้หลักการของอนุกรมฟูเรียร์ แปลงฟังก์ชันการกระตุ้นที่เป็นคาบให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันไซน์ซายด์ที่มีความถี่เป็นจำนวนเท่าของฟังก์ชันคาบนั้น เนื่องจากแต่ละพจน์ของฟังก์ชันไซน์ซายด์สามารถหาผลเฉลยได้โดยง่ายโดยพิจารณาผลตอบสนองเชิงความถี่ เช่นเดียวกับที่ได้กล่าวมาแล้วในบทก่อนหน้า เมื่อทราบผลเฉลยแต่ละพจน์แล้วจึงสามารถหาลักษณะการสั่นสะเทือนรวมได้โดยใช้หลักการของ Superposition

การกระตุ้นแบบอิมพัลส์นั้นสามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกับการสั่นสะเทือนอย่างอิสระ โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็นความเร็วต้นที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเนื่องจากการดลนั้น ส่วนการขจัดเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับการกระตุ้นแบบใดๆ จะพิจารณาฟังก์ชันของการกระตุ้นเป็นการรวมกันของฟังก์ชันพัลส์ย่อยๆ ดังนั้นจึงสามารถใช้หลักการพื้นฐานของผลเฉลยในกรณีของการกระตุ้นแบบอิมพัลส์ในกรณีนี้ได้ โดยผลของการกระตุ้นแบบอิมพัลส์ที่เวลาต่างๆ จะถูกนำมารวมกันโดย Convolution integral

สำหรับปัญหาทางวิศวกรรมนั้นประกอบขึ้นจากการกระตุ้นที่มีรูปแบบตามที่กล่าวมาทั้งหมดในบทนี้ ความเข้าใจในการหาลักษณะการสั่นสะเทือนของการกระตุ้นรูปแบบพื้นฐานเหล่านี้ ทำให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่ซับซ้อนต่อไปได้