บทที่ 6
การสั่นสะเทือนของระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่ง

1. บทนำ

ในบทที่ผ่านมาระบบที่นำมาวิเคราะห์การสั่นสะเทือนจะเป็นระบบที่มีองศาอิสระ (Degree of freedom) เท่ากับหนึ่งทั้งหมด อย่างไรก็ตามปัญหาที่พบโดยทั่วไปแล้วจะมีความซับซ้อนกว่านั้นมาก การสร้างแบบจำลองการสั่นสะเทือนเพื่ออธิบายลักษณะการสั่นสะเทือนในหลายๆ ครั้ง จึงต้องสร้างให้มีจำนวนองศาอิสระมากกว่าหนึ่ง เพื่อให้ผลลัพธ์ที่คำนวณได้มีความใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนของระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่ง โดยขอบเขตของปัญหาที่วิเคราะห์จะแสดงดังตารางที่ 6-1 โดยวิธีการวิเคราะห์ปัญหาจะแบ่งออกเป็น 2 วิธีได้แก่ 1) วิธีหาผลเฉลยโดยตรง และ 2) การวิเคราะห์โดยวิธีโมดัล โดยในส่วนแรกของบทจะกล่าวถึงวิธีโดยตรงก่อน และจะกล่าวถึงวิธีโมดัลในลำดับถัดไป สำหรับระบบที่พิจารณานั้นจะเน้นไปที่ระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนซึ่งสามารถวิเคราะห์ได้โดยง่าย และในหลายๆ ครั้งก็สามารถใช้ผลที่ได้ประมาณลักษณะการสั่นในระบบที่มีตัวหน่วงขนาดน้อยๆ ได้เป็นอย่างดี อย่างไรก็ตามในส่วนท้ายของบทก็จะมีกล่าวถึงการวิเคราะห์ในระบบที่มีตัวหน่วง และลักษณะเฉพาะของตัวหน่วงที่ทำให้สามารถวิเคราะห์ด้วยวิธีโมดัลได้ด้วย

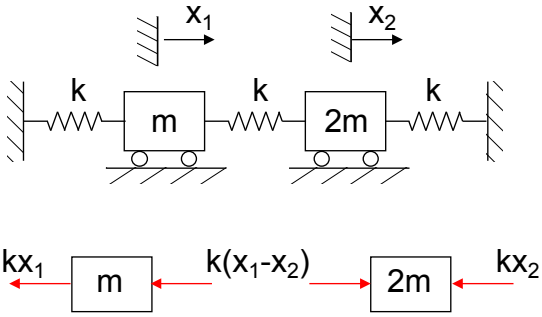
ตารางที่ 6-1 ขอบเขตของปัญหาที่จะกล่าวถึงในบทที่ 6

	Free Vibration	Forced Vibration
Undamped	1. Direct 2. Modal Analysis	1. Direct (harmonic excitation) 2. Modal Analysis
Damped	1. Modal Analysis (only some systems)	1. Modal Analysis (only some systems)

2. การสั่นสะเทือนอย่างอิสระของระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาการสั่นสะเทือนของระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน โดยวิธีการวิเคราะห์โดยตรง สำหรับตัวอย่างของปัญหาที่จะยกเพื่ออธิบายจะเป็นปัญหาที่มีองศาอิสระเท่ากับ 2 เนื่องจากมีความซับซ้อนน้อย สามารถเข้าใจได้โดยง่าย อย่างไรก็ตามวิธีการนี้ก็สามารถประยุกต์ใช้ได้กับระบบที่มีองศาอิสระสูงขึ้นไปได้เช่นกัน

พิจารณาระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับ 2 ดังแสดงในรูปที่ 6-1



รูปที่ 6-1 ระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับ 2 และแผนผังวัตถุอิสระ (Free Body Diagram, FBD)

จากรูป และ แผนผังวัตถุอิสระ (FBD) จะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของมวลแต่ละก้อนได้ดังนี้

$$-kx_1 - k(x_1 - x_2) = m\ddot{x}_1$$

$$k(x_1 - x_2) - kx_2 = 2m\ddot{x}_2$$

สมการทั้งสองสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-1}$$

โดยสมการ (6-1) อาจจะเขียนแบบย่อได้เป็น

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{6-2}$$

โดยตัวอักษรตัวหนาในสมการจะหมายถึงเมตริกซ์ หรือเวคเตอร์ และ

M คือเมตริกซ์ของมวล (inertia of mass matrix) มีมิติ (n×n) ในที่นี้คือ (2×2)

K คือเมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง (stiffness matrix) มีมิติ (n×n) ในที่นี้คือ (2×2)

F คือเวคเตอร์ของแรงภายนอกที่กระทำ (external force vector) มีมิติ (n×1) ในที่นี้คือ (2×1)

x คือเวคเตอร์บอกตำแหน่ง (position vector) มีมิติ (n×1) ในที่นี้คือ (2×1)

จากการสังเกตลักษณะการสั่นสะเทือนอย่างอิสระของระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่งพบว่า การสั่นสะเทือนจะเป็นแบบ Synchronous motion ซึ่งหมายถึงระบบพิกัดที่ใช้บอกตำแหน่งของระบบนั้นทุกๆ ตัว จะเคลื่อนที่ไปพร้อมๆ กัน ซึ่งก็คือผ่านจุดสมดุล และผ่านจุดที่มีขนาดการสั่นสูงที่สุดพร้อมๆ กัน และอัตราส่วนขนาดของพิกัดแต่ละตัวจะมีค่าเท่ากันตลอดเวลา เพื่อให้สามารถเข้าใจได้ชัดเจนยิ่งขึ้น พิจารณาระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับสอง ดังแสดงในรูปที่ 6-2 ดังนี้

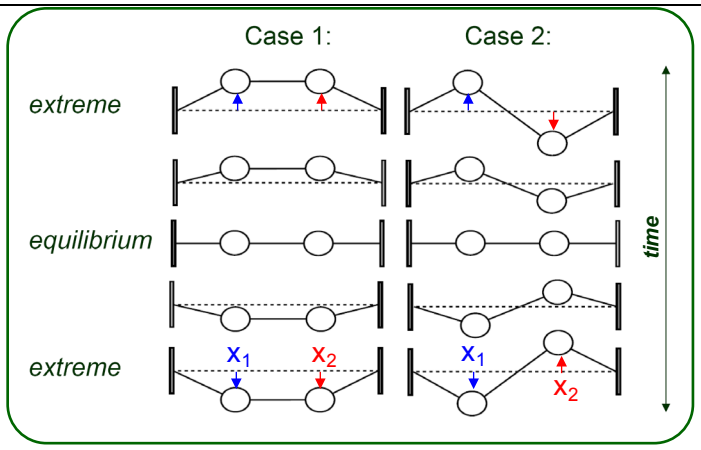
1. ในตัวอย่างนี้ระบบพิกัดที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ คือระยะที่วัดจากจุดสมดุล X_1 และ X_2 ซึ่งในที่นี้แสดงถึงการเคลื่อนที่ของมวลแต่ละก้อนตามลำดับ
2. จะเห็นว่ามวลทั้งสองก้อนจะเคลื่อนที่ผ่านจุดที่มีขนาดการสั่นสูงที่สุดพร้อมๆ กัน และผ่านจุดสมดุลพร้อมๆ กัน ไม่ว่าเคลื่อนที่ในกรณีที่ 1 หรือ 2 ก็ตาม

3. อัตราส่วนของขนาดของพิกัด X_1/X_2 จะมีค่าคงที่เสมอไม่ว่าจะพิจารณาที่ตำแหน่งใดก็ตาม

การสั่นสะเทือนเมื่อไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนจะเป็นแบบฮาร์โมนิก เช่นเดียวกับระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับหนึ่ง ดังนั้นรูปแบบสมการที่ใช้อธิบายลักษณะการสั่นสะเทือนจึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $x = A\sin(\omega t + \phi)$ หรือ $x = Ae^{j(\omega t+\phi)}$ ในกรณีของระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่ง เนื่องจากการสั่นจะเป็นแบบ Synchronous motion มวลทั้งสองก้อนจึงต้องเคลื่อนที่ไปพร้อมๆ กัน มีความถี่ในการสั่นเท่ากันและมีมุมเฟสเท่ากัน ด้วยเหตุนี้การสั่นสะเทือนของมวลแต่ละก้อนในตัวอย่างจึงสามารถเขียนได้ด้วยสมการ

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi) \quad \text{หรือ} \quad x_1 = A_1 e^{j(\omega t+\phi)} \tag{6-3}$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi) \quad \text{หรือ} \quad x_2 = A_2 e^{j(\omega t+\phi)} \tag{6-4}$$



รูปที่ 6-2 การเคลื่อนที่แบบ Synchronous motion ของระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับสอง

ย้อนกลับไปยังระบบในรูปที่ 6-1 เนื่องจากลักษณะการสั่นเป็นไปตามค่า x_1 และ x_2 ในสมการ (6-3) และ (6-4) หรืออาจกล่าวได้ว่า x_1 และ x_2 เป็นคำตอบของสมการ EOM (6-1) ดังนั้นเมื่อแทนค่าลงในสมการ (6-1) สมการจึงเป็นจริงดังนี้

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m & 0 \\ 0 & -2\omega^2 m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 \mathbf{M}x(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-2\omega^2 m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \tag{6-5}$$

รูปแบบปัญหาที่อยู่ในรูปแบบสมการ (6-5) มีชื่อเรียกว่า Eigen value problem สมการที่ (6-5) จะเป็นจริงเสมอ เมื่อค่าดีเทอร์มิแนนต์ ของเมตริกซ์มีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้นจะได้

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-2\omega^2 m \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})x(t) = \mathbf{0} \tag{6-6}$$

สมการที่ (6-6) มีชื่อเรียกว่า Characteristic equation (CHE) จากสมการนี้จะได้

$$\omega^4 - \left(3\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \qquad (6\text{-}7)$$

เมื่อแก้สมการ (6-7) จะได้

$$\omega_1^2 = 0.634\frac{k}{m} \quad \text{และ} \quad \omega_2^2 = 2.366\frac{k}{m}$$

และ $$\omega_1 = \sqrt{0.634\frac{k}{m}} \quad \text{และ} \quad \omega_2 = \sqrt{2.366\frac{k}{m}} \qquad (6\text{-}8)$$

ค่า ω^2 นี้เรียกว่า Eigen value ส่วนค่า ω แสดงถึงความถี่การสั่นสะเทือน ค่า ω นี้ต้องเป็นบวกเสมอ ค่า ω ที่เป็นลบไม่มีความหมายทางกายภาพ สำหรับค่า ω ที่เป็นบวก ตัวที่มีค่าน้อยกว่าจะกำหนดให้เป็น ω_1 ส่วนตัวที่มากกว่าจะกำหนดให้เป็น ω_2 หากระบบมีองศาอิสระมากกว่านี้ ก็จะเรียงลำดับจากน้อยไปมากเช่นเดียวกับในตัวอย่างนี้

จากการคำนวณข้างต้นพบว่า การสั่นสะเทือนของระบบจะมีความถี่เท่ากับ ω_1 หรือ ω_2 เสมอไม่ว่าจะให้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นอย่างไร ดังนั้นค่านี้จึงเป็นค่าความถี่ธรรมชาติของระบบ จำนวนของความถี่ธรรมชาติจะเท่ากับจำนวนองศาความเป็นอิสระของระบบ ในกรณีระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับหนึ่งจะมีความถี่ธรรมชาติเพียงค่าเดียว ส่วนระบบที่มีสององศาอิสระจะมีความถี่ธรรมชาติ 2 ตัว ในทำนองเดียวกันหากระบบมีองศาอิสระเท่ากับ n ก็จะมีจำนวนความถี่ธรรมชาติเท่ากับ n เช่นกัน

จากสมการที่ (6-5) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของ A_1 และ A_2 ซึ่งเป็นขนาดของการสั่นสะเทือนตามสมการ (6-3) และ (6-4) ออกมาดังนี้

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{k}{2k - \omega^2 m} = \frac{2k - 2\omega^2 m}{k} \qquad (6\text{-}9)$$

ในกรณีที่ $\omega = \omega_1$ จะได้อัตราส่วนของ A_1 และ A_2 ดังนี้

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)_{(1)} = \frac{k}{2k - (0.634\frac{k}{m})m} = \frac{2k - 2(0.634\frac{k}{m})m}{k} = 0.731 \qquad (6\text{-}10)$$

ในกรณีที่ $\omega = \omega_2$ จะได้อัตราส่วนของ A_1 และ A_2 ดังนี้

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)_{(2)} = \frac{k}{2k - (2.366\frac{k}{m})m} = \frac{2k - 2(2.366\frac{k}{m})m}{k} = -2.73 \qquad (6\text{-}11)$$

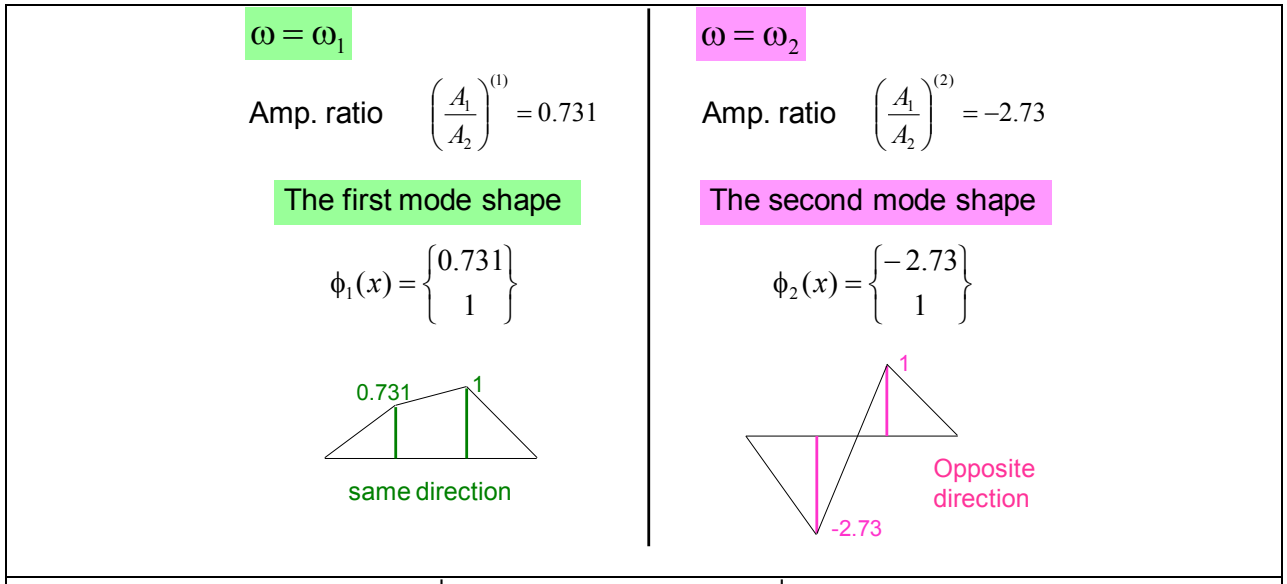
อัตราส่วน A_1/A_2 แสดงถึงรูปร่างการสั่นสะเทือนของระบบ หรือ mode shape ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 6-3 ในกรณี $\omega = \omega_1$ ค่า $(A_1/A_2)_{(1)} = 0.731$ ค่าที่เป็นบวกแสดงให้เห็นว่ามวลทั้งสองก้อนจะเคลื่อนที่ไปทิศทางเดียวกัน โดยหากมวลก้อนที่ 2 เคลื่อนที่ได้ 1 หน่วยแล้ว มวลก้อนที่ 1 จะเคลื่อนที่ได้ 0.731 หน่วยเสมอ ค่าอัตราส่วนในกรณีที่ $\omega = \omega_1$ นี้เรียกว่า The first mode shape ส่วนกรณี $\omega = \omega_2$ ค่า $(A_1/A_2)_{(2)} = -2.73$ ค่าที่เป็นลบแสดงว่ามวลทั้งสองก้อนเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามกัน โดยหากมวล

ก้อนที่ 2 เคลื่อนที่ในทิศทางบวกเป็นระยะ 1 หน่วยแล้ว มวลก้อนที่ 1 ก็จะเคลื่อนที่ในทิศทางลบ (ตรงกันข้าม) ด้วยขนาด 2.73 หน่วย Mode shape ในกรณีนี้เรียกว่า The second mode shape

Mode shape ที่ได้กล่าวมาข้างต้นอาจเขียนแสดงด้วยเวคเตอร์ $\phi_1(x)$ หรือ $\phi_2(x)$ ดังแสดงในรูปที่ 6-3 และมีชื่อเรียกว่า Eigen vector เนื่องจาก Mode shape เป็นอัตราส่วนดังนั้นจึงอาจแสดงค่าในเวคเตอร์เป็นเท่าไรก็ได้ เพียงแต่ให้อัตราส่วนคงเดิม อย่างไรก็ตามโดยทั่วไปนิยมจัดให้ค่าในเวคเตอร์ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับ 1 เวคเตอร์

หมายเหตุ

ในกรณีที่เป็นระบบที่มีองศาอิสระมากกว่า 2 แล้ว การหาอัตราส่วนขนาดในสมการ (6-11) อาจจะทำได้ไม่สะดวกนัก และสมการที่ (6-5) ก็ไม่อาจจะแก้ได้คำตอบที่แน่นอนออกมาได้ อย่างไรก็ตามจะสามารถหาอัตราส่วนของ A ได้ โดยวิธีกำหนดให้ A ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าคงที่เท่ากับ 1 ไปก่อน



รูปที่ 6-3 Mode shape ของการสั่นสะเทือน

ถึงแม้ว่าจะสามารถหาอัตราส่วนของขนาดการสั่นสะเทือนของมวลทั้งสองก้อนได้ แต่เนื่องจากขนาดการสั่นสะเทือนจะขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบด้วย ดังนั้นจึงยังไม่สามารถหาค่าได้หากไม่กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นมาให้ จากการคำนวณข้างต้นจะพบว่าคำตอบของสมการ (6-1) จะมีอยู่ 2 ชุด ขึ้นกับค่าความถี่ธรรมชาติ ได้แก่

ชุดที่ 1 $\omega = \omega_1$ $$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.732c_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \psi_1) = c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \psi_1)$$

ชุดที่ 2 $\omega = \omega_2$ $\quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.73c_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \psi_2) = c_2 \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$

โดยค่า c_1, c_2 และ ψ_1, ψ_2 เป็นค่าคงที่ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของระบบ

เนื่องจากระบบการสั่นสะเทือนเป็นระบบเชิงเส้น หากทราบว่าคำตอบชุดที่ 1 และชุดที่ 2 เป็นคำตอบของสมการ EOM แล้ว จะได้ว่าผลรวมของคำตอบชุดที่ 1 และชุดที่ 2 ก็จะเป็นคำตอบของ EOM ด้วย ดังนั้นคำตอบสมบูรณ์ที่แสดงการสั่นของระบบในรูปที่ 6-1) จึงสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + c_2 \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \qquad (6\text{-}12)$$

สมการ (6-12) แสดงให้เห็นว่ามวลทั้งก้อนที่ 1 และก้อนที่ 2 จะสั่นด้วยความถี่ ω_1 ที่ Mode shape 1 ผสมกับสั่นด้วยความถี่ ω_2 ที่ Mode shape 2 โดยส่วนประกอบของความถี่หรือ Mode shape ไหนจะมากน้อยกว่ากัน ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งส่งผลต่อค่า c_1 , c_2 ซึ่งแสดงขนาดการสั่นสะเทือนของแต่ Mode shape

ข้อระวัง นิสิต นักศึกษา จำนวนมากมักจะมีความเข้าใจผิดว่ามวลก้อนที่ 1 จะสั่นด้วย ω_1 ส่วนมวลก้อนที่ 2 จะสั่นด้วย ω_2 ซึ่งไม่ถูกต้อง

การหาค่าคงที่ของการสั่นสะเทือนจากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

สมการที่ (6-12) มีค่าคงที่อยู่ 4 ตัว ได้แก่ c_1, c_2 และ ψ_1, ψ_2 ค่าเหล่านี้สามารถหาได้โดยการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นการสั่นสะเทือน 4 ตัว ซึ่งได้แก่ การขจัดเริ่มต้นของมวลทั้งสองก้อน และความเร็วเริ่มต้นของมวลทั้งสองก้อนดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้ $\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$ และ $\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

จากสมการ (6-12) หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้ค่าความเร็วการเคลื่อนที่ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \omega_1 c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \omega_2 c_2 \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2) \qquad (6\text{-}13)$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ลงในสมการ (6-12) และ (6-13) จะได้

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin\psi_1 + c_2 \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin\psi_2 \qquad (6\text{-}14)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \omega_1 c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos\psi_1 + \omega_2 c_2 \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos\psi_2 \qquad (6\text{-}15)$$

สมการที่ (6-14) และ (6-15) แต่ละสมการประกอบด้วย 2 สมการย่อยซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ของมวลก้อนที่ 1 และ 2 ดังนั้นสมการทั้งหมดจึงมี 4 สมการ และมีตัวแปรไม่ทราบค่า 4 ตัว จึงสามารถแก้สมการเพื่อหาค่าที่ไม่ทราบได้ โดยจากการแก้สมการจะได้

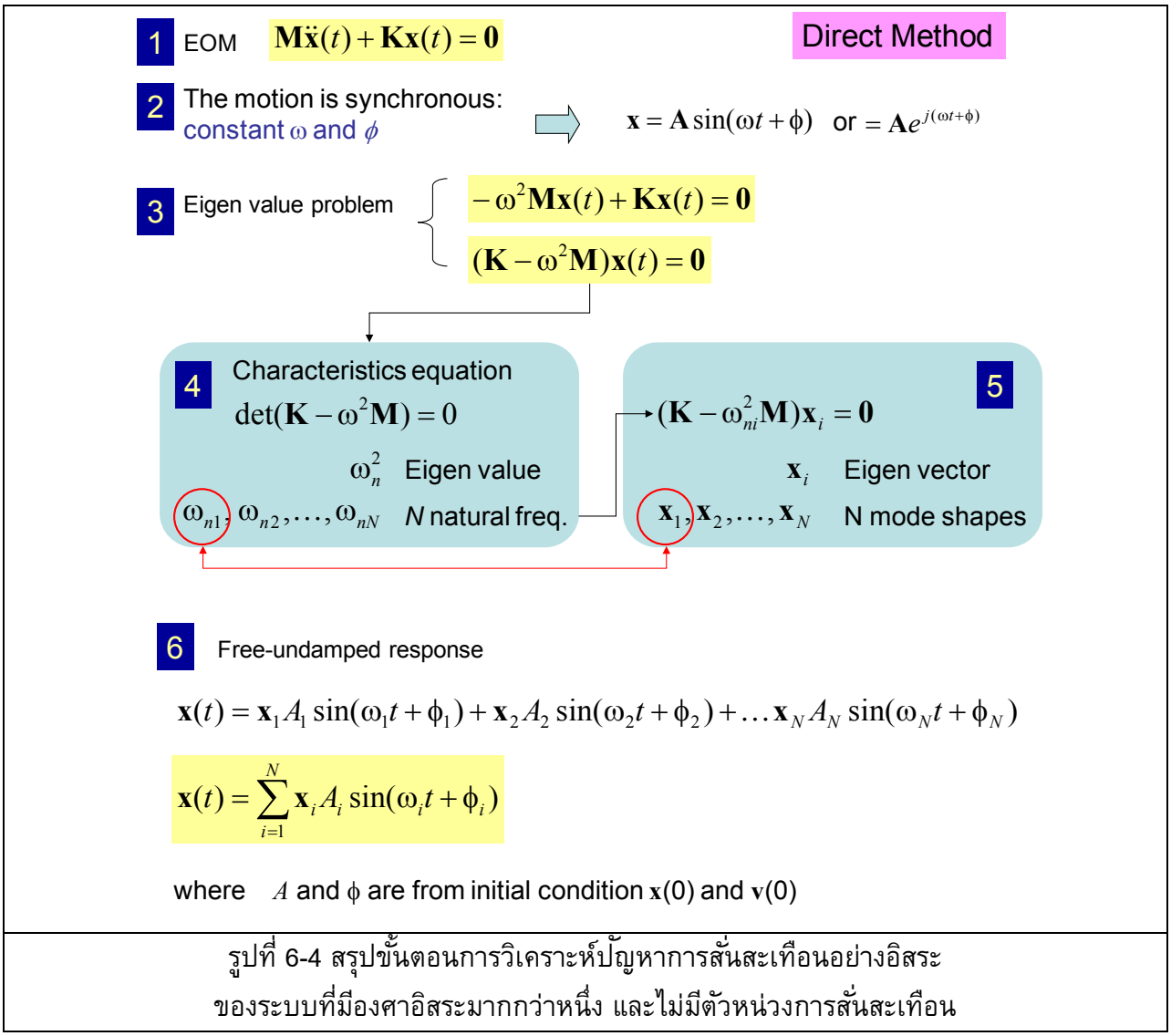
$$c_1 = 3.732, \qquad c_2 = 0.268, \qquad \text{และ} \qquad \psi_1 = \psi_2 = \pi/2$$

แทนค่าคงที่เหล่านี้ลงในสมการ (6-12) จะสามารถหาสมการที่อธิบายการสั่นสะเทือนได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 3.732 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + 0.268 \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.732 \\ 3.732 \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t + \begin{Bmatrix} -0.732 \\ 0.268 \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t \qquad (6\text{-}16)$$

จากขั้นตอนที่ได้อธิบายมาข้างต้นทั้งหมด อาจสรุปวิธีการหาลักษณะการสั่นสะเทือนอย่างอิสระของระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่งและไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนโดยวิธีโดยตรง ได้ดังรูปที่ 6-4



รูปที่ 6-4 สรุปขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาการสั่นสะเทือนอย่างอิสระของระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่ง และไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

ตัวอย่างที่ 6-1

จากการสั่นสะเทือนของระบบในรูปที่ 6-1 ซึ่งมีลักษณะการสั่นตามสมการที่ (6-12)

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + c_2 \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

ให้หาค่าคงที่การสั่นสะเทือนเมื่อกำหนด

(a) $\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.464 \\ 2 \end{Bmatrix}$ และ $\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

(b) $\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix}$ และ $\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

(a) แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นลงในสมการ

แทนค่าเงื่อนไข $\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.464 \\ 2 \end{Bmatrix}$ ลงในสมการ (6-12) จะได้

$$\begin{Bmatrix} 1.464 \\ 2 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\psi_1) + c_2 \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\psi_2) \qquad (1)$$

แทนค่าเงื่อนไข $\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ลงในสมการ (6-13) จะได้

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \omega_1 c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\psi_1) + \omega_2 c_2 \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\psi_2) \qquad (2)$$

จากการสังเกตเงื่อนไขขนาดการสั่นสะเทือนตามสมการ (1) พบว่าอัตราส่วนของขนาดการสั่นที่กำหนดมาให้เท่ากับอัตราส่วนขนาดของ Mode shape ที่ 1 พอดี ดังนั้นจะได้ว่า $c_2 = 0$

สมการที่ (1) และ (2) จึงสามารถลดรูปได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} 1.464 \\ 2 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\psi_1) \qquad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \omega_1 c_1 \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(\psi_1) \qquad (4)$$

ค่า $c_1 \neq 0$ เพราะการสั่นสะเทือนในสมการ (3) ไม่เท่ากับศูนย์ตลอดเวลา ดังนั้นสมการ (4) จะเป็นจริงเมื่อมุมเฟส $\psi_1 = \pi/2$ เมื่อแทนค่ามุมเฟสนี้ในสมการที่ (3) จะได้ค่า $c_1 = 2$

จากค่าคงที่ที่หาได้ข้างต้น จึงได้สมการการเคลื่อนที่

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 2 \cdot \begin{Bmatrix} 0.732 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \pi/2) = \begin{Bmatrix} 1.464 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \pi/2) \qquad \text{ANS}$$

(b) ในข้อนี้จะพบว่าเงื่อนไขขนาดการสั่นสะเทือนที่กำหนดให้ ตรงกับอัตราส่วนขนาดของ Mode shape 2 พอดี โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกับข้อ (a) จะได้ผลลัพธ์การสั่นสะเทือนดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \pi/2) \qquad \underline{\text{ANS}}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. โดยปกติการสั่นสะเทือนของระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่ง จะเป็นผลรวมของการสั่นสะเทือนที่ความถี่ธรรมชาติต่างๆ และ Mode shape ต่างๆ ในกรณีของระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับ 2 ก็จะมีผลรวมของความถี่ธรรมชาติ และ Mode shape ทั้ง 2 ดังสมการ (6-12)
2. หากจัดให้เงื่อนไขเริ่มต้นตรงกับ Mode shape ใด Mode shape หนึ่งแล้ว การสั่นสะเทือนจะเกิดที่ Mode shape นั้น และเกิดที่ความถี่ธรรมชาติที่ตรงกับ Mode shape นั้นเท่านั้น

3. การสั่นสะเทือนแบบบังคับของระบบที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

โดยปกติในระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่งนั้นเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำกับระบบ จะไม่สามารถวิเคราะห์หาการสั่นสะเทือนโดยตรงได้ อย่างไรก็ตามในกรณีเฉพาะที่แรงภายนอกเป็นแบบฮาร์โมนิก จะสามารถวิเคราะห์หาลักษณะการสั่นสะเทือนโดยตรงได้ พิจารณาระบบการสั่นสะเทือนที่มีองศาอิสระเท่ากับสอง ซึ่งสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ EOM ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin\omega t \tag{6-17}$$

เนื่องจากระบบไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และแรงกระตุ้นอยู่ในรูปฮาร์โมนิก ซึ่งมีความถี่เท่ากับ ω ดังนั้นการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นจึงต้องอยู่ในรูปแบบฮาร์โมนิก ซึ่งมีความถี่เท่ากับ ω ด้วยดังสมการ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\sin\omega t \tag{6-18}$$

สมการ (6-18) เป็นคำตอบของสมการ (6-17) เมื่อแทนสมการ (6-18) เข้าในสมการ (6-17) จะได้

$$\begin{bmatrix} k_{11}-m_1\omega^2 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-m_2\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-19}$$

หากให้ $[Z(\omega)]$ แทนเมตริกซ์ 2×2 ในสมการ (6-19) สมการจะเขียนอย่างย่อได้เป็น

$$[Z(\omega)]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เวคเตอร์ $\mathbf{X}$ ซึ่งเป็นขนาดการสั่นสะเทือน สามารถหาได้โดยการคูณอินเวอร์สของเมตริกซ์ $\mathbf{Z}$ เข้าทางด้านซ้ายมือทั้งสองข้างของสมการดังนี้

$$[Z(\omega)]^{-1}[Z(\omega)]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=[Z(\omega)]^{-1}\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=[Z(\omega)]^{-1}\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{|Z(\omega)|}\begin{bmatrix} k_{22}-m_2\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11}-m_1\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-20}$$

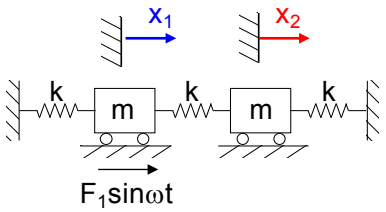
โดย $|Z(\omega)|$ คือค่าดีเทอร์มิแนนต์ ของเมตริกซ์ $[Z(\omega)]$ และหาได้จาก

$$|Z(\omega)|=m_1m_2(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2) \tag{6-21}$$

จากสมการ (6-20) และ (6-21) จะสามารถหาขนาดการสั่นสะเทือนของมวลแต่ละก้อนได้จาก

$$X_1=\frac{(k_{22}-m_2\omega^2)F_1}{m_1m_2(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)} \tag{6-22}$$

$$X_2=\frac{-k_{21}F_1}{m_1m_2(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)} \tag{6-23}$$



ตัวอย่างที่ 6-2

ระบบในรูปมีสมการการเคลื่อนที่ EOM ดังนี้

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin\omega t$$

จงแสดงลักษณะการสั่นสะเทือนแบบบังคับของระบบ

จาก EOM สามารถหาค่าความถี่ธรรมชาติของระบบได้เท่ากับ

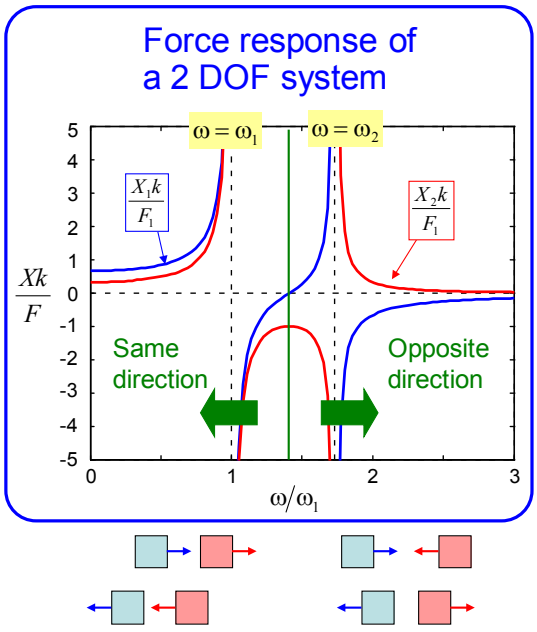
$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{และ} \quad \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

เมื่อแทนค่ามวลและความแข็งเกร็งตาม EOM ในสมการ (6-22) และ (6-23) จะสามารถหาการขจัดของการสั่นสะเทือนแบบบังคับของมวลก้อนที่ 1 และก้อนที่สองได้ดังนี้

$$X_1=\frac{(2k-m\omega^2)F_1}{m^2(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)}$$

$$X_2=\frac{kF_1}{m^2(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)}$$

เมื่อนำผลการสั่นสะเทือนของมวลแต่ละก้อนมาวาดกราฟเทียบกับความถี่การกระตุ้น ω จะได้กราฟดังรูป



โดยแกนตั้งในรูปแสดงค่า Xk/F

เส้นสีน้ำเงินแสดงการสั่นสะเทือนของมวลก้อนที่ 1

เส้นสีแดงแสดงการสั่นสะเทือนของมวลก้อนที่ 2

ลักษณะการสั่นของระบบในตัวอย่างนี้สามารถแบ่งออกได้เป็นช่วง ๆ ดังนี้

1. $\omega < \omega_1$

ในช่วงนี้เส้นกราฟการสั่นของมวลทั้งสองก้อนเป็นบวกทั้งคู่ แสดงให้เห็นว่ามวลทั้งสองก้อนสั่นในทิศทางเดียวกัน และมีเฟสตรงกับแรงกระตุ้นที่ให้กับระบบ (คือแรงกระตุ้นให้มวลไปทางไหน มวลก็เคลื่อนไปทางนั้น) รูปด้านล่างกราฟแสดงถึงการเคลื่อนที่ของมวล โดยมวลก้อนที่หนึ่งแสดงด้วยสีน้ำเงิน และมวลก้อนที่สองแสดงด้วยสีแดง

2. $\omega_1 < \omega < \omega_2$

ในช่วงนี้ครึ่งแรก เส้นกราฟการสั่นของมวลทั้งสองก้อนเป็นลบทั้งคู่ แสดงให้เห็นว่ามวลทั้งสองก้อนสั่นในทิศทางเดียวกัน ค่าของกราฟที่เป็นลบแสดงว่าการขจัดมีเฟสตรงกันข้ามกับแรงกระตุ้นที่ให้กับระบบ (คือแรงกระตุ้นให้มวลไปทางไหน มวลก็เคลื่อนไปทิศตรงกันข้าม)

สำหรับในครึ่งหลัง เส้นกราฟแสดงการสั่นของมวลก้อนที่ 1 เป็นบวก ส่วนมวลก้อนที่ 2 เป็นลบ แสดงให้เห็นว่ามวลทั้งสองก้อนเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามกัน หากมวลก้อนที่ 1 เคลื่อนไปทางขวา มวลก้อนที่ 2 ก็จะเคลื่อนไปทางซ้าย ขนาดของมวลก้อนที่ 1 ที่เป็นบวกแสดงให้เห็นว่าทิศทางการเคลื่อนที่ของมวลกับทิศทางของแรงกระทำเป็นไปในทิศทางเดียวกัน

3. $\omega_2 < \omega$

ในช่วงนี้เส้นกราฟการสั่นของมวลก้อนที่ 1 เป็นลบ ส่วนก้อนที่ 2 เป็นบวก แสดงให้เห็นว่าทั้งสองก้อนเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามกัน โดยในช่วงนี้มวลก้อนที่ 2 จะมีทิศทางการเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกับแรงที่กระตุ้น

จากกราฟยังสังเกตได้ว่าเมื่อ $\omega = \omega_1$ หรือ $\omega = \omega_2$ ขนาดการสั่นสะเทือนของมวลทั้งสองก้อนจะมีค่ามาก เรียกความถี่นี้ว่า ความถี่การสั่นพ้อง (Resonance frequencies) ขนาดของการสั่นในทางคณิตศาสตร์จะมีค่าเข้าใกล้อนันต์ แต่ในความเป็นจริงขนาดจะเพิ่มขึ้นมากจนกระทั่งเกินกว่าขีดจำกัดการยืดหยุ่นของระบบ ทำให้ระบบเสียหายก่อนที่ขนาดจะเพิ่มไปถึงอนันต์

เมื่อความถี่การกระตุ้นเข้าใกล้ ω_1 ขนาดการสั่นจะมากโดยมวลจะสั่นในทิศทางเดียวกัน และมีอัตราส่วนของขนาดการขจัดเข้าใกล้ Mode shape ที่ 1 แต่เมื่อความถี่การกระตุ้นเข้าใกล้ ω_2 มวลทั้งสองก้อนจะสั่นในทิศทางตรงกันข้ามกัน และมีอัตราส่วนของขนาดการสั่นเข้าใกล้ Mode shape ที่ 2

นอกจากนี้ยังพบอีกว่ามีความถี่ที่ทำให้มวลก้อนที่มีแรงมากระทำ (ในกรณีนี้คือมวลก้อนที่ 1) มีขนาดการสั่นสะเทือนเท่ากับศูนย์ ซึ่งหมายความว่าในขณะนั้นมวลก้อนที่ 1 จะไม่เกิดการสั่นเลย มวลก้อนที่สองเท่านั้นที่เกิดการสั่นสะเทือน ข้อสังเกตในกรณีนี้สามารถนำไปใช้ประยุกต์เพื่อควบคุมการสั่นสะเทือนของมวลก้อนที่ต้องการได้ โดยรายละเอียดจะได้กล่าวถึงอีกครั้งในหัวข้อ “ตัวดูดซับการสั่นสะเทือน (Vibration absorber)” ในบทที่ 7 วิธีการควบคุมการสั่นสะเทือน

4. การวิเคราะห์โดยวิธีโมดัล

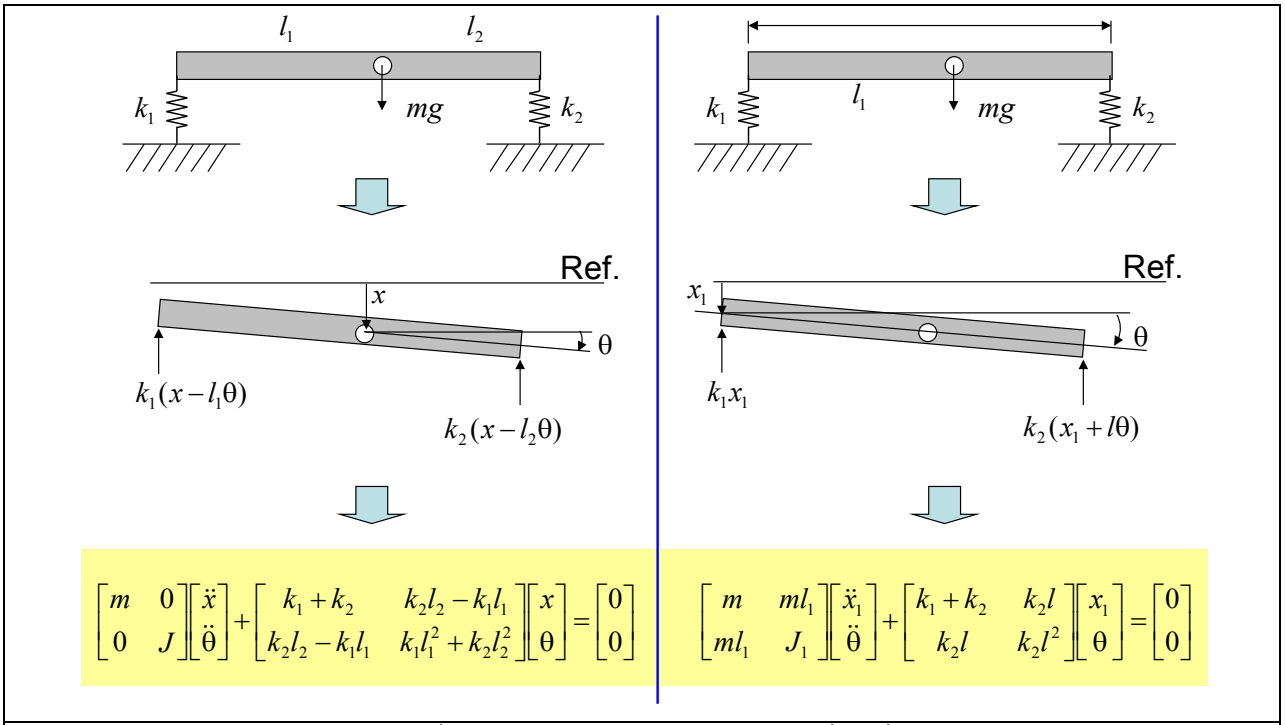
4.1 หลักการของการวิเคราะห์โมดัล

ปัญหาการสั่นสะเทือนของระบบที่มีหลายองศาอิสระมีความซับซ้อน เนื่องจากสมการการเคลื่อนที่ของทั้งระบบมีความเกี่ยวข้องกัน (Coupled equations) ไม่สามารถแยกระบบสมการให้เป็นสมการย่อยๆ เพื่อแก้หาผลการสั่นสะเทือนโดยตรงได้ เพื่อให้เข้าใจลักษณะปัญหายิ่งขึ้น พิจารณาสมการที่ (6-1) ซึ่งนำมาเขียนอีกครั้งดังนี้

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}1)$$

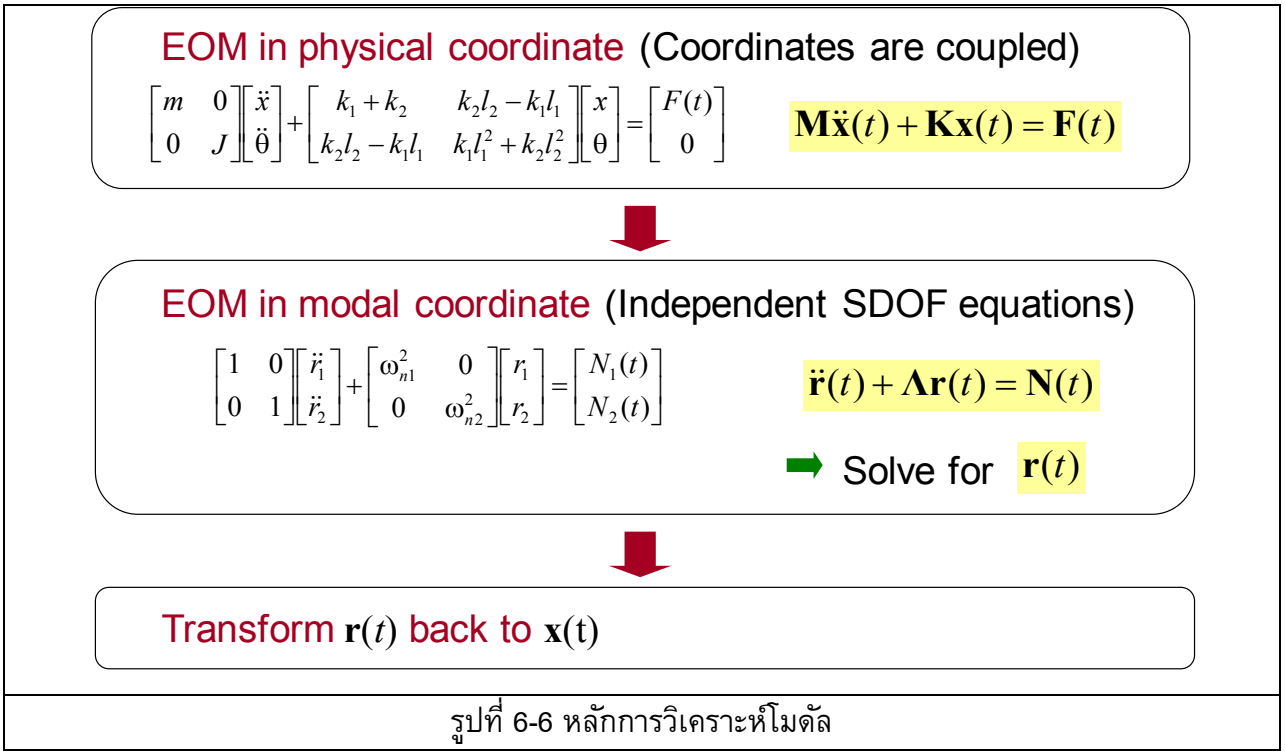
ระบบสมการนี้ประกอบด้วยสมการย่อย 2 สมการ ซึ่งไม่สามารถแก้ได้โดยตรง เนื่องจากแต่ละสมการติดตัวแปรสองตัวคือ x_1 และ x_2 การแก้สมการเพื่อหาลักษณะการสั่นสะเทือนจึงต้องแก้ระบบสมการพร้อมๆ กัน

รูปที่ 6-5 แสดงระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับ 2 รูปทางด้านซ้ายมือแสดงการกำหนดระบบพิกัด x ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งที่จุดศูนย์ถ่วง และมุมที่มวลหมุน θ เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ โดยหากใช้ระบบพิกัดนี้แล้วจะได้สมการการเคลื่อนดังแสดงทางด้านล่างซ้ายมือ แต่ถ้าหากใช้ระบบพิกัดอื่นดังแสดงในรูปทางด้านขวา โดยให้ x_1 แสดงการเคลื่อนที่ที่ปลายด้านซ้าย ส่วนมุมที่มวลหมุน θ ก็กำหนดให้วัดเทียบกับปลายด้านซ้ายเช่นกัน การกำหนดพิกัดเช่นนี้จะทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ดังแสดงทางด้านล่างขวามือ ซึ่งแตกต่างจากการกำหนดพิกัดตามแบบแรก



รูปที่ 6-5 ระบบพิกัดกับสมการการเคลื่อนที่

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าการกำหนดพิกัดแสดงการเคลื่อนที่แตกต่างกัน ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ที่ต่างกันด้วย สำหรับวิธีการวิเคราะห์โมดัลจะใช้ประโยชน์จากคุณสมบัติการสมมาตรของเมตริกซ์ของมวล และเมตริกซ์ความแข็งเกร็ง และคุณสมบัติความตั้งฉาก (Orthogonality property) ของ Mode shape แปลงพิกัดการเคลื่อนที่ให้เป็นพิกัดโมดัล (Modal coordinate) ทำให้ระบบสมการที่มีสมการการเคลื่อนที่ย่อยๆ แต่ละสมการที่มีความเกี่ยวข้องกัน กลายเป็นสมการหนึ่งองศาอิสระที่เป็นอิสระต่อกัน จึงสามารถแก้สมการแยกกันโดยตรงได้



รูปที่ 6-6 หลักการวิเคราะห์โมดัล

รูปที่ 6-6 แสดงตัวอย่างของการวิเคราะห์แบบโมดัลเพื่อให้เข้าใจในภาพรวมของการคำนวณ เริ่มจากสมการการเคลื่อนที่ ซึ่งในที่นี้แสดงตัวอย่างสมการทางด้านซ้ายมือในรูปที่ 6-5 จะเห็นว่าสมการนี้ประกอบด้วยสมการย่อยๆ ที่เกี่ยวข้องกันไม่สามารถแก้โดยตรงได้ การวิเคราะห์โมดัลจะเปลี่ยนรูปแบบสมการนี้จากพิกัด x และ θ มาเป็นพิกัดโมดัล r_1 และ r_2 ทำให้สามารถแปลงรูปแบบสมการการเคลื่อนที่ที่เกี่ยวข้องกัน กลายเป็นสมการที่สมการย่อยแต่ละสมการเป็นอิสระต่อกันดังสมการ

$$\ddot{r}_1+\omega_{n1}^2 r_1=N_1(t) \qquad \text{และ} \qquad \ddot{r}_2+\omega_{n2}^2 r_2=N_2(t)$$

สมการข้างบนนี้สามารถแก้ได้โดยตรงโดยใช้หลักการที่ได้กล่าวมาแล้วในบทก่อนหน้า เมื่อแก้สมการอนุพันธ์ย่อยๆ ในพิกัดโมดัลได้แล้ว คำตอบที่ได้จะเป็นการเคลื่อนที่ในพิกัดโมดัลเทียบกับเวลา $r(t)$ จึงจำเป็นที่จะต้องแปลงผลที่ได้นี้ให้กลับไปอยู่ในพิกัดเดิม ซึ่งก็คือการเคลื่อนที่ $x(t)$ ตามที่ต้องการ

เนื่องจากวิธีการวิเคราะห์โมดัลเป็นการแก้สมการย่อยๆ ที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นจะสามารถหาผลตอบสนองชั่วขณะ (Transient response) นอกเหนือจากผลตอบสนองในสภาวะคงตัว (Steady state response) ได้ด้วย และในกรณีที่เป็นการสั่นสะเทือนแบบบังคับ ซึ่งถูกกระทำด้วยแรงรูปแบบใดๆ ปัญหานี้ไม่อาจแก้ได้ด้วยวิธีโดยตรง แต่ก็สามารถใช้การวิเคราะห์แบบโมดัลในแก้ปัญหาได้

หมายเหตุ พิกัดโมดัล r_1 และ r_2 ในทางกายภาพนั้นจะสัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ตาม Mode shape ที่ 1 และที่ 2 ของระบบนั้นตามลำดับ

4.2 คุณสมบัติความตั้งฉาก

กำหนดให้ $\mathbf{x}_i$ และ $\mathbf{x}_j$ เป็นเวคเตอร์ของ mode shape (Eigen vector) ซึ่งสัมพันธ์กับความถี่ธรรมชาติ ω_i และ ω_j ตามลำดับ เนื่องจากเมตริกซ์ของมวล $\mathbf{M}$ และเมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง $\mathbf{K}$ เป็นเมตริกซ์ที่สมมาตรเสมอ ด้วยคุณสมบัติความตั้งฉาก (Orthogonal property) จะได้ความสัมพันธ์ของเวคเตอร์ของ mode shape และเมตริกซ์ของมวลและเมตริกซ์ความแข็งเกร็งดังนี้

$$\mathbf{x}_j^T\mathbf{M}\mathbf{x}_i = 0 \quad \text{และ} \quad \mathbf{x}_j^T\mathbf{K}\mathbf{x}_i = 0 \quad \text{เมื่อ } i \neq j \tag{6-24}$$

$$\mathbf{x}_i^T\mathbf{M}\mathbf{x}_i = M_{ii} \quad \text{และ} \quad \mathbf{x}_i^T\mathbf{K}\mathbf{x}_i = K_{ii} \tag{6-25}$$

ในกรณีของระบบที่องศาอิสระเท่ากับ 2 สมการ (6-24) และ (6-25) สามารถเขียนในรูปเต็มของการคูณเมตริกซ์และเวคเตอร์เพื่อความเข้าใจได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \end{Bmatrix}_j \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_i = 0 \quad \text{และ} \quad \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \end{Bmatrix}_j \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_i = 0 \tag{6-26}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \end{Bmatrix}_i \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_i = M_{ii} \quad \text{และ} \quad \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \end{Bmatrix}_i \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_i = K_{ii} \tag{6-27}$$

จะเห็นว่าหากใช้เวคเตอร์ของ Mode shape คนละ Mode คูณเข้ากับเมตริกซ์ของมวลและความแข็งเกร็งตามสมการ (6-26) และ (6-27) แล้ว ค่าที่ได้จะเท่ากับศูนย์ แต่ถ้าใช้เวคเตอร์ของ Mode shape ที่เป็น mode เดียวกันแล้วค่าที่ได้จะไม่เท่ากับศูนย์

เนื่องจากขนาดของ Mode shape จะกำหนดเป็นเท่าใดก็ได้ แต่อัตราส่วนของ Mode shape ต้องคงเดิมเสมอ เมื่อปรับขนาดของเวคเตอร์ของ Mode shape เทียบกับเมตริกซ์ของมวลโดยการคูณค่าคงที่ C ที่เหมาะสมจะได้เวคเตอร์ของ Normalized mode shape $\mathbf{u}_i$ และ $\mathbf{u}_j$ หรืออาจเรียกว่า Nomalized eigen vector ซึ่งมีสมบัติดังนี้

$$\mathbf{u}_i = C\mathbf{x}_i \tag{6-28}$$

$$\mathbf{u}_j^T\mathbf{M}\mathbf{u}_i = 0 \quad \text{และ} \quad \mathbf{u}_j^T\mathbf{K}\mathbf{u}_i = 0 \tag{6-29}$$

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_i = 1 \tag{6-30}$$

จะเห็นว่าสมการ (6-29) เป็นสมบัติเดียวกับสมการ (6-24) ส่วนการปรับขนาดเวคเตอร์ของ Mode shape ในสมการ (6-28) จะส่งผลให้ขนาด M_{ii} ในสมการ (6-25) มีค่าเท่ากับ 1

ปัญหาการสั่นสะเทือนของระบบที่มีองศาอิสระมากกว่า 1 จะเป็นปัญหาแบบ Eigen value problem ซึ่งมีรูปแบบสมการที่ใช้แก้ดังแสดงมาแล้วในสมการ (6-5) และนำมาเขียนใหม่อีกครั้งในที่นี้

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{x}(t)=\mathbf{0} \tag{6-5}$$

เมื่อพิจารณากรณีที่ความถี่ธรรมชาติที่ i สัดส่วนของ x แต่ละตัวในเวคเตอร์ $\mathbf{x}(t)$ ในสมการ (6-5) จะมีความสัมพันธ์ตาม Mode shape ใน mode ที่ i เมื่อแทนเวคเตอร์ของ Normalized mode shape ใน mode ที่ i $\mathbf{u}_i$ ลงในสมการจะได้

$$(\mathbf{K}-\omega_i^2\mathbf{M})\mathbf{u}_i=\mathbf{0}$$

หรือ

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_i=\omega_i^2\mathbf{M}\mathbf{u}_i$$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $\mathbf{u}_i^T$ จะได้

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{K}\mathbf{u}_i=\omega_i^2\mathbf{u}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_i$$

ใช้สมบัติของ Normalize mode shape ในสมการที่ (6-30) จะได้

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{K}\mathbf{u}_i=\omega_i^2\mathbf{u}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_i=\omega_i^2 \tag{6-31}$$

สมการนี้แสดงให้เห็นถึงสมบัติอีกอย่างหนึ่งของเวคเตอร์ของ Normalized mode shape ซึ่งจะถูกใช้ต่อไปในการวิเคราะห์โมดัล

หากนำเวคเตอร์ของ normalized mode shape มารวมเข้าด้วยกันให้เป็นเมตริกซ์ จะเรียกเมตริกซ์นั้นว่าโมดัลเมตริกซ์ (Modal matrix) ถ้าเป็นระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับ n โมดัลเมตริกซ์ก็จะมีมิติ $n\times n$ ดังสมการ

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1}\\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn}\end{bmatrix} \tag{6-32}$$

โดยค่า u_{pq} ในเมตริกซ์ หมายถึงค่า normalized mode shape ของ mode ที่ p และเป็นตัวที่ q

ความสัมพันธ์ในสมการที่ (6-29), (6-30) และ (6-31) สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในกรณีของโมดัลเมตริกซ์ได้ดังสมการ

$$\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\cdots\mathbf{u}_n\end{bmatrix}\mathbf{M}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I} \tag{6-33}$$

$$\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\cdots\mathbf{u}_n\end{bmatrix}\mathbf{K}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2\end{bmatrix}=\mathbf{\Lambda} \tag{6-34}$$

โดยเมตริกซ์ $\mathbf{\Lambda}$ ในสมการที่ (6-34) มีชื่อเรียกว่าสเปกทรัลเมตริกซ์ (Spectral matrix)
ความสัมพันธ์ในสมการ (6-32) ถึง (6-34) จะถูกนำไปใช้ในการวิเคราะห์โมดัล ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

4.3 <u>ขั้นตอนการวิเคราะห์โมดัล</u>

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบสมการ (6-2) ดังนี้

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{6-2}$$

กำหนดเวคเตอร์ของพิกัดโมดัล (Modal coordinate) $\mathbf{r}(t)$ มีความสัมพันธ์กับพิกัด $\mathbf{x}(t)$ ดังสมการ

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}\mathbf{r}(t) \tag{6-35}$$

แทนความสัมพันธ์ในสมการ (6-35) ลงในสมการ (6-2) จะได้

$$\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t)$$

คูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $\mathbf{U}^T$ จะได้

$$\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}^T\mathbf{F}(t)$$

จากความสัมพันธ์สมการที่ (6-33) และ (6-34) จะได้

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}^T\mathbf{F}(t) \tag{6-36}$$

สมการ (6-36) เขียนให้อยู่ในรูปเต็มของการคูณเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \ddot{r}_1(t) \\ \ddot{r}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{r}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ \vdots \\ N_n(t) \end{bmatrix} \tag{6-37}$$

สมการที่ (6-37) เป็นระบบสมการซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยๆ ที่เป็นอิสระต่อกัน n สมการ ดังนั้นจึงสามารถแก้สมการหาค่า $r_i(t)$ ของสมการย่อยๆ ได้โดยตรง

เนื่องจากการวิเคราะห์ด้วยวิธีโมดัลจะเปลี่ยนจากพิกัดปกติเป็นพิกัดโมดัล ดังนั้นค่าเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดในพิกัดปกติ $\mathbf{x}(0)$ จึงต้องเปลี่ยนให้เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นในพิกัดโมดัลด้วย โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (6-35) เช่นกัน ดังนี้

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{U}\mathbf{r}(0)$$

คูณทั้งสองข้างด้วย $\mathbf{U}^T\mathbf{M}$ จะได้ $\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{x}(0) = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{r}(0)$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (6-33) จะได้ $\mathbf{r}(0) = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{x}(0)$ (6-38)

และ $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(0)$ (6-39)

สมการที่ (6-38) และ (6-39) แสดงเงื่อนไขเริ่มต้นในระบบพิกัดโมดัล เมื่อใช้เงื่อนไขเหล่านี้จะสามารถหาผลเฉลย $\mathbf{r}(t)$ ออกมาได้ อย่างไรก็ตามผลที่ได้เป็นผลในระบบพิกัดโมดัล จึงต้องแปลงผลที่ได้กลับไปเป็นผลเฉลย $\mathbf{x}(t)$ ซึ่งแสดงการสั่นสะเทือนตามที่ต้องการ โดยใช้สมการ (6-35) ขั้นตอนการวิเคราะห์โมดัลที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นสามารถสรุปอีกครั้งได้ดังแผนภาพในรูปที่ 6-7

1. Draw FBD, apply Newton's law to obtain EOM → $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$
2. Solve for natural frequencies through CHE → $\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})=0$
3. Determine mode shapes through EVP → $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$
4. Construct modal matrix (normalized)

$$\begin{cases}\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix}\\ \mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}=\mathbf{I}\\ \mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}=\mathbf{\Lambda}\end{cases}$$

5. Perform a coordinate transformation $\mathbf{x}(t)=\mathbf{U}\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t) \rightarrow \mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{r}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}}(t)+\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{r}(t)=\mathbf{U}^T\mathbf{F}(t)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t)+\mathbf{\Lambda}\mathbf{r}(t)=\mathbf{U}^T\mathbf{F}(t)$$

6. Transform the initial conditions to modal coordinates

From $\mathbf{x}(t)=\mathbf{U}\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}=\mathbf{I}$

$$\mathbf{x}(0)=\mathbf{U}\mathbf{r}(0)$$

$$\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{x}(0)=\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}\mathbf{r}(0)$$

$$\mathbf{r}(0)=\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{x}(0)$$

and $$\dot{\mathbf{r}}(0)=\mathbf{U}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(0)$$

7. Find the response in modal coordinates → $\mathbf{r}(t)=\dots$
8. Transform the response in modal coordinate $\mathbf{r}(t)$ back to that in original coordinate $\mathbf{x}(t)$ → $\mathbf{x}(t)=\mathbf{U}\mathbf{r}(t)$

6-7 ขั้นตอนการวิเคราะห์โมดัล

<u>หมายเหตุ</u>

ขั้นตอนที่กล่าวมาทั้งหมดจะทำโดย Normalized mode shape อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์อาจจะทำโดยตรงจากเวคเตอร์และเมตริกซ์ของ mode shape ตามความสัมพันธ์พื้นฐานในสมการ (6-24) และ (6-25) เพียงแต่ว่าเมตริกซ์ของมวล และเมตริกซ์ของความแข็งเกร็งที่แปลงแล้วในพิกัดโมดัลจะแตกต่างไปจากสมการที่ (6-36) และ (6-37) โดยจะได้รูปแบบสมการด้านล่างแทนสมการ (6-37)

$$\begin{bmatrix}M_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & M_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & M_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{r}_1(t)\\ \ddot{r}_2(t)\\ \vdots\\ \ddot{r}_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & K_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & K_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1(t)\\ r_2(t)\\ \vdots\\ r_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1(t)\\ N_2(t)\\ \vdots\\ N_n(t)\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 6-3

ระบบการสั่นสะเทือนที่มีองศาอิสระเท่ากับ 2 มีสมการการเคลื่อนที่

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $v_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

จงหาลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบนี้

เนื่องจากการสั่นสะเทือนของระบบเป็นแบบ Synchronous motion คำตอบจะอยู่ในรูปฟังก์ชั่นไซนูซอยด์ $x=A\sin(\omega t+\phi)$ และ $\ddot{x}=-\omega^2 x$ เมื่อแทนค่านี้ลงในสมการการเคลื่อนที่จะได้สมการในรูปแบบเดียวกับสมการ (6-5) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 27-9\omega^2 & -3 \\ -3 & 3-\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{X}=\mathbf{0} \qquad (1)$$

และจะได้ Characteristics equation ดังนี้

$$\begin{vmatrix} 27-9\omega^2 & -3 \\ -3 & 3-\omega^2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{หรือ} \quad (27-9\omega^2)(3-\omega^2)-9=0$$

คำตอบของ Characteristics equation คือ

$$\omega_1^2=2 \quad \text{ดังนั้น} \quad \omega_1=\sqrt{2} \ \text{rad/s}$$

$$\omega_2^2=4 \quad \text{ดังนั้น} \quad \omega_2=2 \ \text{rad/s}$$

จากสมการ (1) จะได้ความสัมพันธ์

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{3}{27-9\omega^2}=\frac{3-\omega^2}{3} \qquad (2)$$

แทนค่า ω_1 และ ω_2 ลงในสมการ (2) เพื่อหา Mode shape จะได้

เมื่อ $\omega=\omega_1=\sqrt{2}$ $\quad \frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{3}$ หรือ $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\omega_1}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$ Mode shape ที่ 1

เมื่อ $\omega=\omega_2=2$ $\quad \frac{x_1}{x_2}=\frac{-1}{3}$ หรือ $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\omega_2}=\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \end{Bmatrix}$ Mode shape ที่ 2

ทำการ Normalize mode shape เพื่อให้ $\mathbf{u}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_i=1$ โดยกำหนดให้ $\mathbf{u}_i=C\mathbf{x}_i$

กรณี $\omega=\omega_1=\sqrt{2}$

$$\mathbf{u}_1=C\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\omega_1}=C\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

จาก $\mathbf{u}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_i = 1$ จะได้ $C^2\begin{Bmatrix}1 & 3\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 3\end{Bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}1\\ 3\end{Bmatrix}$

กรณี $\omega = \omega_2 = 2$

$$\mathbf{u}_2 = C\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}_{\omega_2} = C\begin{Bmatrix}-1\\ 3\end{Bmatrix}$$

จาก $\mathbf{u}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_i = 1$ จะได้ $C^2\begin{Bmatrix}-1 & 3\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\ 3\end{Bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}-1\\ 3\end{Bmatrix}$

เมื่อหา Normalized mode shape ของแต่ละ mode ได้แล้วจะสามารถหา Modal matrix ได้ดังนี้

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$$

จาก EOM $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$

ให้ $\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}\mathbf{r}(t)$ จะได้ $\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t)$

$$\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}^T\mathbf{F}(t)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}^T\mathbf{F}(t) \qquad (3)$$

<u>Check</u>

$$\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{U} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}27 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}$$

และ $\mathbf{U}^T\mathbf{F}(t) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$

เมื่อแทนในสมการ (3) จะได้

$$\begin{Bmatrix}\ddot{r}_1\\ \ddot{r}_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}r_1\\ r_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (4)$$

สมการ (4) นี้สามารถแก้ได้โดยตรง และมีคำตอบดังนี้

$$r_1 = A_1\sin(\sqrt{2}t + \theta_1) \qquad (5)$$

$$r_2 = A_2\sin(2t + \theta_2) \qquad (6)$$

และ $$\dot{r}_1 = A_1\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t + \theta_1) \qquad (7)$$

$$\dot{r}_2 = A_2 2\cos(2t + \theta_2) \qquad (8)$$

หาเงื่อนไขเริ่มต้นในระบบพิกัดโมดัลจากสมการ (6-38) และ (6-39) ดังนี้

จาก $\mathbf{r}(0) = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{x}(0)$ $\quad \begin{Bmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 3 \\ -3 \end{Bmatrix}$

จาก $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{U}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(0)$ $\quad \begin{Bmatrix} \dot{r}_1(0) \\ \dot{r}_2(0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นนี้ในสมการที่ (5)-(6) เพื่อหาค่าคงที่ในกรณี r_1

$$r_1(0) = \frac{3}{\sqrt{2}} = A_1 \sin(\theta_1)$$

$$\dot{r}_1(0) = 0 = A_1\sqrt{2}\cos(\theta_1)$$

แก้สมการข้างบนจะได้ $\theta_1 = \pi/2$ และ $A_1 = 3/\sqrt{2}$ ดังนั้น

$$r_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}t \qquad (9)$$

แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นนี้ในสมการที่ (7)-(8) เพื่อหาค่าคงที่ในกรณี r_2

$$r_2(0) = \frac{-3}{\sqrt{2}} = A_2 \sin(\theta_2)$$

$$\dot{r}_2(0) = 0 = A_2 2\cos(\theta_2)$$

แก้สมการข้างบนจะได้ $\theta_2 = \pi/2$ และ $A_2 = -3/\sqrt{2}$ ดังนั้น

$$r_2 = \frac{-3}{\sqrt{2}}\sin(2t + \frac{\pi}{2}) = \frac{-3}{\sqrt{2}}\cos 2t \qquad (10)$$

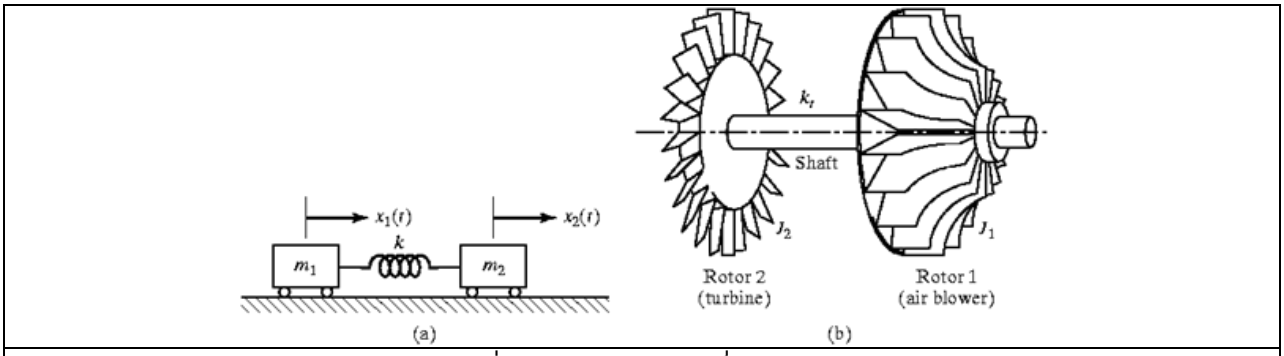
ค่า r_1 และ r_2 ในสมการ (9) และ (10) เป็นการสั่นสะเทือนในพิกัดโมดัล จึงต้องแปลงกลับเพื่อให้ได้การสั่นสะเทือนในระบบพิกัดที่โจทย์กำหนด

จาก $\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}\mathbf{r}(t)$ $\quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}t \\ \frac{-3}{\sqrt{2}}\cos 2t \end{Bmatrix}$

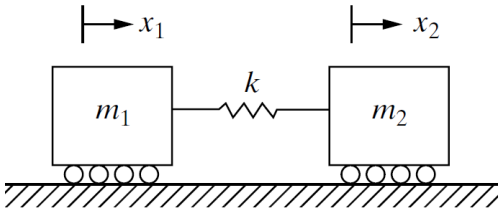
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{2}\cos 2t \\ \frac{3}{2}\cos\sqrt{2}t - \frac{3}{2}\cos 2t \end{Bmatrix} \qquad \underline{\text{ANS}}$$

4. Rigid body mode

ในระบบการสั่นสะเทือนบางระบบอาจมี Mode shape ที่ระบบทั้งระบบเคลื่อนที่ไปด้วยกัน เช่นเดียวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง Mode shape ที่มีลักษณะเช่นนี้เรียกว่า Rigid body mode เนื่องจากเป็นการเคลื่อนที่ไปด้วยกันหรือหมุนไปด้วยกัน ดังนั้นความถี่ธรรมชาติที่สอดคล้องกับ Rigid body mode จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\omega_n = 0$) ตัวอย่างของระบบที่มีการสั่นสะเทือน mode หนึ่งเป็น Rigid body mode แสดงในรูปที่ 6-8 โดยทั้งรูป (a) และ (b) แสดงระบบซึ่งประกอบด้วยมวล 2 ก้อน เชื่อมต่อกันด้วยสปริง โดยรูป (b) เพลาตรงกลางทำหน้าที่เป็นสปริง เมื่อวัตถุเกิดการสั่นจะเกิดได้เพียง 2 กรณีเท่านั้น คือ มวลทั้งสองเคลื่อนที่คนละทิศทางกัน และมวลทั้งสองก้อนเคลื่อนที่ไปพร้อมๆ กัน หรือหมุนไปพร้อมๆ กัน Mode shape ที่มวลทั้งสองก้อนเคลื่อนที่ไปพร้อมๆ กันนี้คือ Rigid body mode



6-8 ตัวอย่างระบบที่มี Mode shape หนึ่งเป็น Rigid body mode



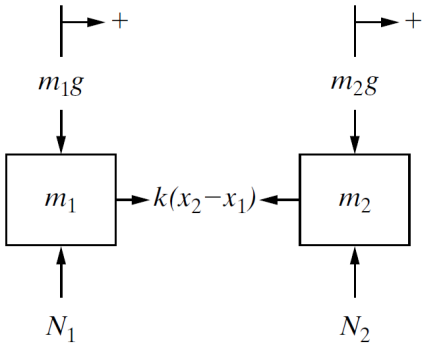
<u>ตัวอย่าง 6-4</u>

หาลักษณะการสั่นสะเทือนของระบบดังแสดงในรูป

กำหนดให้ m_1 = 1 kg, m_2 = 4 kg, k = 400 N/m

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และ } v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



ระบบที่โจทย์กำหนดสามารถเขียน FBD ได้ดังรูปทางด้านซ้ายมือ และสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

EOM $\quad m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1)$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1)$$

หรือเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 & -400 \\ -400 & 400 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จาก EOM จะเขียน สมการเพื่อคำนวณหาความถี่ธรรมชาติ และ Mode shape ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 400-\omega^2 & -400 \\ -400 & 400-4\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Characteristics equation $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = \mathbf{0}$

$$\begin{vmatrix} 400-\omega^2 & -400 \\ -400 & 400-4\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{หรือ} \quad (400-\omega^2)(400-4\omega^2) - 400^2 = 0$$

แก้สมการออกมาจะได้

$$\omega_1^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0 \text{ rad/s} \Rightarrow \text{Rigid body mode}$$

$$\omega_2^2 = 500 \Rightarrow \omega_2 = 22.36 \text{ rad/s}$$

จากสมการที่ (1) จะสามารถหาความสัมพันธ์เพื่อหา Mode shape ดังนี้

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{400}{400-\omega^2}$$

แทนค่า ω_1 และ ω_2 ลงในสมการเพื่อหา Mode shape จะได้

เมื่อ $\omega = \omega_1 = 0$ rad/s $\quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{1}$ หรือ $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\omega_1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ Mode shape ที่ 1

เมื่อ $\omega = \omega_2 = 22.36$ rad/s $\quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{4}{-1}$ หรือ $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\omega_2} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \end{Bmatrix}$ Mode shape ที่ 2

ทำการ Normalize mode shape เพื่อให้ $\mathbf{u}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_i = 1$ โดยกำหนดให้ $\mathbf{u}_i = C\mathbf{x}_i$

กรณี $\omega = \omega_1 = 0$ rad/s $\quad \mathbf{u}_1 = C\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\omega_1} = C\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

จาก $\mathbf{u}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_i = 1$ จะได้ $\quad C^2\begin{Bmatrix} 1 & 1 \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

กรณี $\omega = \omega_2 = 22.36$ rad/s $\quad \mathbf{u}_2 = C\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\omega_2} = C\begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \end{Bmatrix}$

จาก $\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_i = 1$ จะได้ $\quad C^2 \begin{Bmatrix} 4 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \end{Bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \end{Bmatrix}$

Modal matrix คือ $\quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับระบบ $\quad \mathbf{U}^T \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

จาก $\quad \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}^T \mathbf{F}(t)$ ดังนั้นสมการ EOM จะแปลงให้อยู่ในพิกัดโมดัลได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_1 \\ \ddot{r}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

สมการนี้สามารถแก้ได้โดยตรงดังนี้

$$\ddot{r}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = C_1 t + C_2 \tag{3}$$

$$\ddot{r}_2 + 500 r_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = C_3 \cos(22.36t + \theta) \tag{4}$$

และจะได้

$$\dot{r}_1 = C_1 \tag{5}$$

$$\dot{r}_2 = -C_3 (22.36) \sin(22.36t + \theta) \tag{6}$$

หาเงื่อนไขเริ่มต้นในระบบพิกัดโมดัลดังนี้

จาก $\mathbf{r}(0) = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{x}(0)$ $\quad \begin{Bmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.004472 \\ 0.008944 \end{Bmatrix}$

จาก $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(0)$ $\quad \begin{Bmatrix} \dot{r}_1(0) \\ \dot{r}_2(0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้นลงในสมการ (3)-(6) และแก้สมการ จะได้

C_1 = 0, $\quad C_2$ = 0.004472, $\quad C_3$ = 0.008944, $\quad \theta$ = 0 rad

ดังนั้นผลเฉลยในพิกัดโมดัลคือ

$$r_1 = 0.004472 \tag{7}$$

$$r_2 = 0.008944 \cos(22.36t) \tag{8}$$

ค่า r_1 และ r_2 ในสมการ (7) และ (8) เป็นการสั่นสะเทือนในพิกัดโมดัล จึงต้องแปลงกลับเพื่อให้ได้การสั่นสะเทือนในระบบพิกัดที่โจทย์กำหนด

จาก $\mathbf{x}(t) = \mathbf{U} \mathbf{r}(t)$ $\quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.004472 \\ 0.008944 \cos(22.36t) \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.002 + 0.008\cos(22.36t) \\ 0.002 - 0.002\cos(22.36t) \end{Bmatrix}$$ ANS

จากผลที่ได้แสดงให้เห็นว่ามวลทั้งสองก้อนมีการเลื่อนที่ไปเป็นระยะ 0.002 m เนื่องจากมีการเคลื่อนที่ mode หนึ่งที่เป็น Rigid body mode และมีการสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติ 22.36 rad/s รอบจุดสมดุลใหม่ โดยมีทิศทางการเคลื่อนที่ตรงข้ามกันตามสัดส่วนของ mode shape ที่ 2

5. การวิเคราะห์โมดัลในระบบที่มีความหน่วง

การวิเคราะห์ที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้ทั้งหมด เป็นการวิเคราะห์ในปัญหาที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนในระบบ ในกรณีที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนนั้น โดยปกติวิธีการวิเคราะห์โมดัลจะไม่สามารถกระทำได้ เนื่องจากเทอมที่เกี่ยวข้องกับเมตริกซ์ของตัวหน่วงการสั่นสะเทือน $\mathbf{C}$ จะไม่สามารถแปลงเป็นเมตริกซ์ในแนวเส้นทแยงมุมได้ ระบบสมการจึงยังเกี่ยวข้องกันอยู่ไม่สามารถแก้ได้โดยตรง อย่างไรก็ตามมีบางกรณีที่การวิเคราะห์โดยวิธีโมดัลสามารถกระทำได้ หากเมตริกซ์ของมวล ความแข็งเกร็ง และความหน่วง มีความสัมพันธ์กันดังสมการ

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \qquad (6\text{-}40)$$

ระบบที่มีค่าความหน่วงที่มีความสัมพันธ์ดังนี้จะเรียกว่า Classical damped system สำหรับกรณีอย่างง่ายที่สอดคล้องกับสมการ (6-40) ได้แก่กรณีที่สัมประสิทธิ์การหน่วงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับมวลและความแข็งเกร็งของระบบ ดังสมการ

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \qquad (6\text{-}41)$$

เมื่อค่า α และ β เป็นค่าคงที่ ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงนี้มีชื่อเรียกว่า Proportional damping สำหรับในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีนี้เท่านั้น พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ซึ่งมีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนในระบบ ดังสมการ

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \qquad (6\text{-}42)$$

เนื่องจากตัวหน่วงการสั่นสะเทือนเป็นสัดส่วนกับเมตริกซ์ของมวลตามสมการ (6-41) เมื่อแทนค่าลงในสมการ (6-42) จะได้

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K})\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \qquad (6\text{-}43)$$

ทำการหาเมตริกซ์ของ Mode shape $\mathbf{U}$ ตามวิธีการเดียวกับกรณีที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และกำหนดให้ $\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}\mathbf{r}(t)$ เมื่อแทนลงในสมการ (6-43) จะได้

$$\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}}(t) + (\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K})\mathbf{U}\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t)$$

คูณทุกพจน์ของสมการด้วย $\mathbf{U}^T$ จะได้

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K})\mathbf{U}\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{U}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}(t)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t)+(\alpha\mathbf{I}+\beta\mathbf{\Lambda})\dot{\mathbf{r}}(t)+\mathbf{\Lambda}\mathbf{r}(t)=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}(t)=\mathbf{N}(t) \qquad (6\text{-}44)$$

สมการ (6-44) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเต็มของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}\ddot{r}_1(t)\\ \ddot{r}_2(t)\\ \vdots\\ \ddot{r}_n(t)\end{bmatrix}+\left(\alpha\begin{bmatrix}1&0&&0\\0&1&&0\\&&&\\0&0&&0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}\omega_1^2&0&\dots&0\\0&\omega_2^2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&\omega_n^2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\dot{r}_1(t)\\ \dot{r}_2(t)\\ \vdots\\ \dot{r}_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_1^2&0&\dots&0\\0&\omega_2^2&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&\omega_n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1(t)\\ r_2(t)\\ \vdots\\ r_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1(t)\\ N_2(t)\\ \vdots\\ N_n(t)\end{bmatrix} \qquad (6\text{-}45)$$

จะเห็นว่าสมการย่อยแต่ละสมการไม่มีความเกี่ยวข้องกัน และสามารถแก้ได้โดยตรง โดยสมการย่อยแต่ละสมการจะอยู่ในรูป

$$\ddot{r}_i(t)+(\alpha+\beta\omega_i^2)\dot{r}_i(t)+\omega_i^2 r_i(t)=N_i(t)$$

หรือ

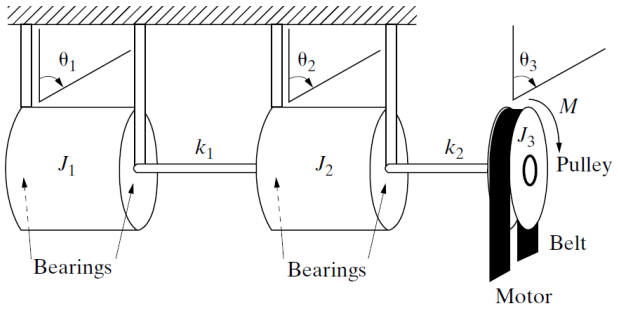
$$\ddot{r}_i(t)+2\zeta_i\omega_i\dot{r}_i(t)+\omega_i^2 r_i(t)=N_i(t) \qquad (6\text{-}46)$$

เมื่อ $2\zeta_i\omega_i=\alpha+\beta\omega_i^2$

สมการที่ (6-46) อยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการของระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับหนึ่งที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนโดยทั่วไป จึงสามารถแก้สมการได้โดยง่าย และเนื่องจากคำตอบที่หาได้อยู่ในพิกัดโมดัล จึงต้องแปลงกลับให้อยู่ในพิกัดปกติ ด้วยสมการ $\mathbf{x}(t)=\mathbf{U}\mathbf{r}(t)$ เช่นเดียวกับปัญหาที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

ตัวอย่างที่ 6-5

Determine the forced response of a belt-driven lathe as shown in the figure for zero initial conditions and the applied moment M(t) is a unit impulse.



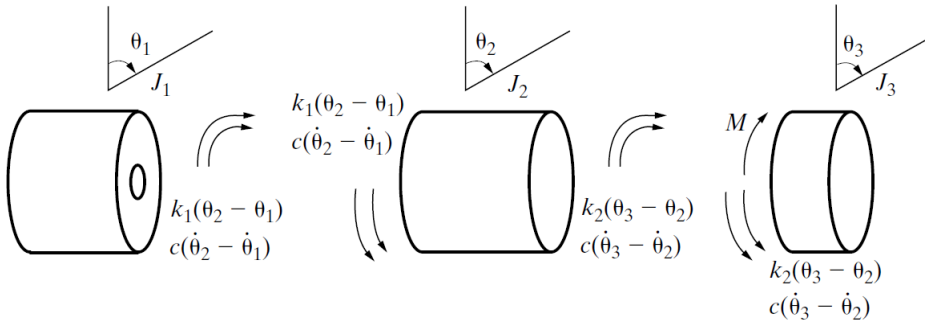
Given

- Bearings are modeled as providing viscous damping
- Shafts provide stiffness
- Belt drive provides an applied torque

$J_1=J_2=J_3=10\ \mathrm{kg.m^2/rad}$

$k_1=k_2=10^3\ \mathrm{N.m/rad}$

$c=2\ \mathrm{N.m.s/rad}$



จาก FBD จะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$J_1\ddot{\theta}_1 = k_1(\theta_2-\theta_1)+c(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 = -k_1(\theta_2-\theta_1)-c(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)+k_2(\theta_3-\theta_2)+c(\dot{\theta}_3-\dot{\theta}_2)$$
$$J_3\ddot{\theta}_3 = -k_2(\theta_3-\theta_2)-c(\dot{\theta}_3-\dot{\theta}_2)+M(t)$$

หรืออาจเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta(t) \end{Bmatrix}$$

และเขียนในรูปอย่างย่อได้เป็น $\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{K}\boldsymbol{\theta}=\mathbf{M}(t)$

หาค่าความถี่ธรรมชาติของระบบโดยพิจารณา Characteristic equation (CHE) กรณีที่ไม่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือน

$$\left|(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{J})\right| = \begin{vmatrix} k_1-\omega^2J_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2-\omega^2J_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2-\omega^2J_3 \end{vmatrix} = 0$$

จากสมการ CHE จะได้ความถี่ธรรมชาติออกมา 3 ค่า ได้แก่

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 10, \quad \omega_3 = \sqrt{300} \ \text{rad/s}$$

นำความถี่ธรรมชาติที่ได้แทนลงในสมการ $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{J})\boldsymbol{\Theta}=\mathbf{0}$ เพื่อหา Mode shape

<u>1st Mode</u>: $\omega_1 = 0 \ \text{rad/s}$

$$(\mathbf{K}-\omega_1^2\mathbf{J})\boldsymbol{\Theta}_1=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad 10^3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix}_1=\mathbf{0}$$

เมื่อให้ $\Theta_1 = C_1$ จะได้ $\mathbf{u}_1 = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

เนื่องจาก $\omega_1 = 0 \ \ \mathrm{rad/s}$ ดังนั้น Mode shape นี้จึงเป็น Rigid body mode และได้อัตราส่วนการเคลื่อนที่ของมวลแต่ละก้อนเท่ากันหมด

2nd Mode: $\omega_2 = 10 \ \ \mathrm{rad/s}$

$$(\mathbf{K} - \omega_2^2 \mathbf{J})\boldsymbol{\Theta}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad 10^3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix}_2 = \mathbf{0}$$

เมื่อให้ $\Theta_1 = C_2$ จะได้ $\mathbf{u}_2 = C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

3rd Mode: $\omega_3 = \sqrt{300} \ \ \mathrm{rad/s}$

$$(\mathbf{K} - \omega_3^2 \mathbf{J})\boldsymbol{\Theta}_3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad 10^3 \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{Bmatrix}_3 = \mathbf{0}$$

เมื่อให้ $\Theta_1 = C_3$ จะได้ $\mathbf{u}_3 = C_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

เมื่อได้ Mode shape แล้ว ขั้นต่อไปทำการ Normalized mode shape โดยสมการ $\mathbf{u}_i^T \mathbf{J} \mathbf{u}_i = 1$

1st mode

$$\mathbf{u}_1^T \mathbf{J} \mathbf{u}_1 = C_1^2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$$

โดยจะได้ $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{30}}$ และ $\mathbf{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

2nd mode

$$\mathbf{u}_2^T \mathbf{J} \mathbf{u}_2 = C_2^2 \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 1$$

โดยจะได้ $C_2 = \frac{1}{\sqrt{20}}$ และ $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

3rd mode

$$\mathbf{u}_3^T \mathbf{J} \mathbf{u}_3 = C_3^2 \begin{Bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$$

โดยจะได้ $C_3 = \frac{1}{\sqrt{60}}$ และ $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{60}}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

นำ Mode shape ที่ได้มาสร้าง Modal matrix ได้ดังนี้

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{60}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{60}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{20}} & \frac{1}{\sqrt{60}} \end{bmatrix}$$

วิเคราะห์โมดัล โดยแปลงระบบพิกัดเป็นพิกัดโมดัลด้วยสมการ $\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{U}\,\mathbf{r}(t)$

แปลงเงื่อนไขเริ่มต้นซึ่งเป็น zero initial conditions ให้อยู่ในพิกัดโมดัลด้วยสมการ

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{U}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0} \quad \text{และ} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{U}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}}(0) = \mathbf{0}$$

พิจารณาเมตริกซ์ของตัวหน่วงการสั่นสะเทือน $\mathbf{C}$ พบว่าเมตริกซ์นี้เป็นสัดส่วนกับเมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง $\mathbf{K}$ ดังสมการ

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \beta \mathbf{K} = 2 \times 10^{-3} \mathbf{K}$$

ดังนั้นจะสามารถแปลง EOM ให้อยู่ในพิกัดโมดัลได้ดังนี้

$$\mathbf{J}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}} + \beta \mathbf{K}\mathbf{U}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{U}\,\mathbf{r} = \mathbf{M}(t)$$

$$\mathbf{U}^T\mathbf{J}\mathbf{U}\ddot{\mathbf{r}} + \beta \mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U}\,\mathbf{r} = \mathbf{U}^T\mathbf{M}(t)$$

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{r}} + \beta \boldsymbol{\Lambda}\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\Lambda}\,\mathbf{r} = \mathbf{U}^T\mathbf{M}(t)$$

หรือเขียนเป็นรูปเต็มได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{r}_1\\\ddot{r}_2\\\ddot{r}_3\end{Bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0&0&0\\0&100&0\\0&0&300\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{r}_1\\\dot{r}_2\\\dot{r}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&100&0\\0&0&300\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{Bmatrix}=\mathbf{U}^T\begin{Bmatrix}0\\0\\\delta(t)\end{Bmatrix}=\delta(t)\begin{Bmatrix}1/\sqrt{30}\\-1/\sqrt{20}\\1/\sqrt{60}\end{Bmatrix}$$

สมการย่อยในระบบสมการข้างบนเป็นอิสระต่อกัน จึงสามารถแยกแก้สมการทีละสมการได้ โดยมีคำตอบของแต่ละสมการย่อยดังนี้

สมการ	เงื่อนไขเริ่มต้น	ผลเฉลย
$\ddot{r}_1=\frac{1}{\sqrt{30}}\delta(t)$	$r_1(0)=\dot{r}_1(0)=0$	$r_1(t)=\frac{1}{\sqrt{30}}t$
$\ddot{r}_2+0.2\dot{r}_2+100r_2=\frac{-1}{\sqrt{20}}\delta(t)$	$r_2(0)=\dot{r}_2(0)=0$	$r_2(t)=\frac{-1}{\sqrt{20}\omega_{d2}}e^{-0.1t}\sin\omega_{d2}t$
$\ddot{r}_3+0.6\dot{r}_3+300r_3=\frac{1}{\sqrt{60}}\delta(t)$	$r_3(0)=\dot{r}_3(0)=0$	$r_3(t)=\frac{1}{\sqrt{60}\omega_{d3}}e^{-0.3t}\sin\omega_{d3}t$

ค่า ω_d หาจากความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์เทอม $\dot{r}_i$ กับ $2\zeta_i\omega_i$ และสมการ $\omega_{di}=\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2}$ เช่นเดียวกับปัญหากรณีระบบที่มีองศาอิสระเท่ากับหนึ่ง ดังนี้

$\zeta_1=0$	
$\zeta_2=\frac{0.2}{2(10)}=0.01$	$\omega_{d2}=10\sqrt{1-0.01^2}=9.9995$ rad/s
$\zeta_3=\frac{0.6}{2\sqrt{300}}=0.01732$	$\omega_{d3}=\sqrt{300}\times\sqrt{1-0.01732^2}=17.3179$ rad/s

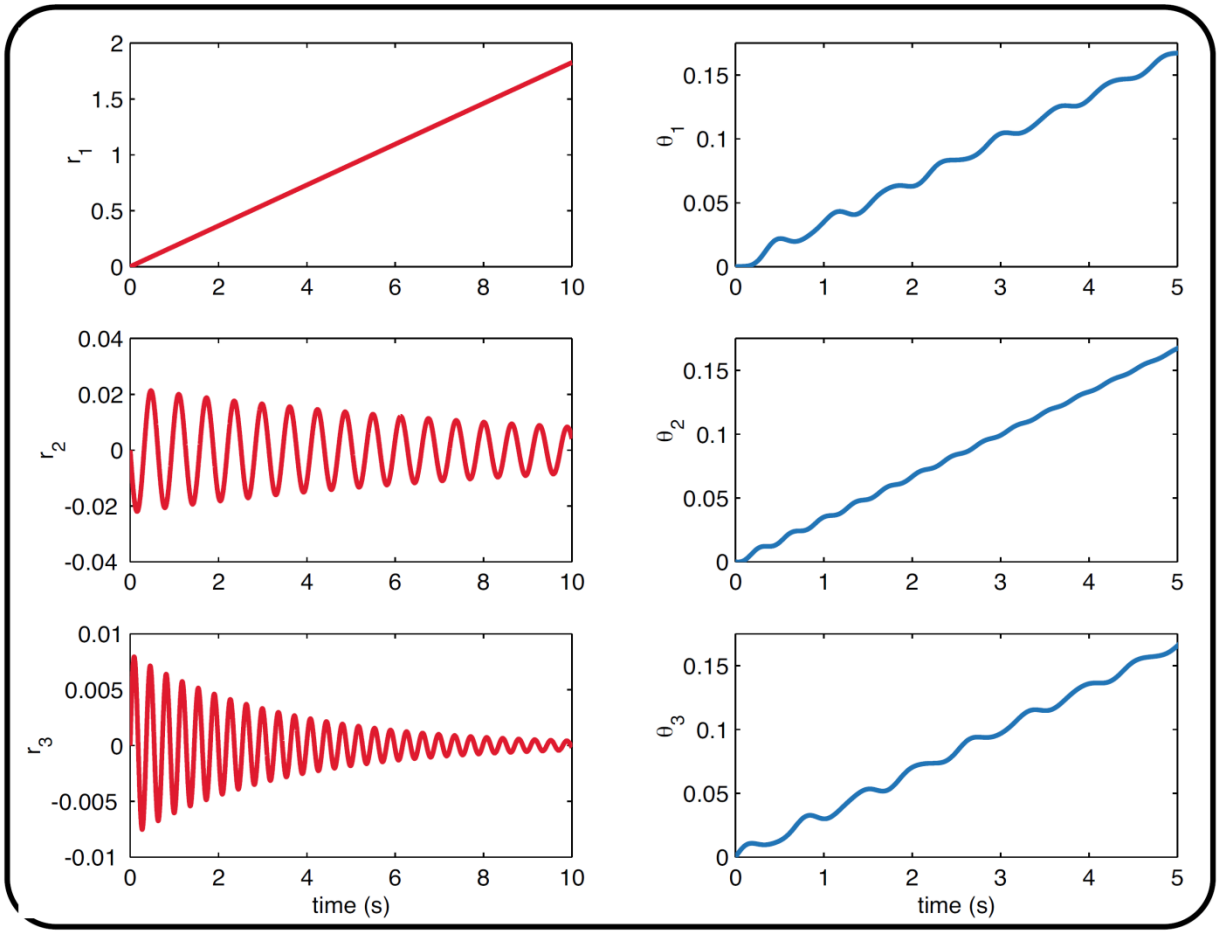
คำตอบที่ได้เป็นคำตอบในระบบพิกัดโมดัล จึงต้องแปลงกลับเป็นพิกัดปกติด้วยสมการ $\boldsymbol{\theta}(t)=\mathbf{U}\,\mathbf{r}(t)$ ดังนี้

$$\boldsymbol{\theta}(t)=\begin{Bmatrix}\theta_1(t)\\\theta_2(t)\\\theta_3(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{20}}&\frac{1}{\sqrt{60}}\\\frac{1}{\sqrt{30}}&0&\frac{-2}{\sqrt{60}}\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{-1}{\sqrt{20}}&\frac{1}{\sqrt{60}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}t\\\frac{-1}{\sqrt{20}\omega_{d2}}e^{-0.1t}\sin\omega_{d2}t\\\frac{1}{\sqrt{60}\omega_{d3}}e^{-0.3t}\sin\omega_{d3}t\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}(t)=\begin{Bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\\ \theta_3(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{30}t-\dfrac{1}{20\omega_{d2}}e^{-0.1t}\sin\omega_{d2}t+\dfrac{1}{60\omega_{d3}}e^{-0.3t}\sin\omega_{d3}t\\ \dfrac{1}{30}t-\dfrac{1}{30\omega_{d3}}e^{-0.3t}\sin\omega_{d3}t\\ \dfrac{1}{30}t+\dfrac{1}{20\omega_{d2}}e^{-0.1t}\sin\omega_{d2}t+\dfrac{1}{60\omega_{d3}}e^{-0.3t}\sin\omega_{d3}t\end{Bmatrix}$$

ANS

รูปด้านล่างแสดงถึงลักษณะการสั่นสะเทือนของมวลแต่ละก้อนในข้อนี้ โดยรูปทางด้านซ้ายแสดงการสั่นสะเทือนในพิกัดโมดัล ส่วนรูปทางด้านขวาแสดงการสั่นสะเทือนในระบบพิกัดตามรูปโจทย์



6. สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของระบบที่มีองศาอิสระมากกว่าหนึ่ง ในการวิเคราะห์จะต้องหาความถี่ธรรมชาติของระบบ และ Mode shape ซึ่งแสดงลักษณะของการสั่นสะเทือนของระบบเสียก่อน ในการสั่นอย่างอิสระ ลักษณะการสั่นสะเทือนจะเกิดจากการผสมกันของการสั่นที่ความถี่ธรรมชาติต่างๆ และ Mode shape ต่างๆ ซึ่งลักษณะการสั่นจะใกล้เคียงกับ Mode shape ใดนั้น ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ ในส่วนครึ่งหลังของบทกล่าวถึงการวิเคราะห์แบบโมดัล ซึ่งใช้หลักการการเปลี่ยนพิกัดของระบบให้เป็นระบบพิกัดโมดัล ทำให้ระบบของสมการการเคลื่อนที่ซึ่งแต่ละสมการย่อยมีความเกี่ยวข้องกันสามารถแยกออกเป็นสมการย่อยๆ ที่เป็นอิสระต่อกัน จึงสามารถแก้ปัญหาได้โดยตรง เมื่อแก้สมการเสร็จจึงแปลงระบบพิกัดโมดัลให้กลับเป็นระบบพิกัดเดิม การวิเคราะห์โมดัลนั้นนอกจากจะนำไปประยุกต์เพื่อเขียนโปรแกรมคำนวณได้สะดวกแล้ว ยังสามารถนำไปใช้กับปัญหาการสั่นสะเทือนแบบบังคับที่รูปแบบของแรงกระทำไม่ใช่แรงแบบฮาร์โมนิค ซึ่งไม่สามารถแก้ได้ด้วยวิธีโดยตรงได้ด้วย ในส่วนสุดท้ายของบทกล่าวถึงระบบที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนซึ่งเป็นสัดส่วนกับมวลและความแข็งเกร็งของระบบ ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะที่สามารถประยุกต์ใช้วิธีวิเคราะห์โมดัลในการแก้ปัญหาได้ สำหรับกรณีที่มีตัวหน่วงการสั่นสะเทือนเป็นค่าอื่นๆ อาจจะต้องใช้วิธีการประมาณค่าอัตราส่วนความหน่วงในการแก้ปัญหา