

บทที่ 7

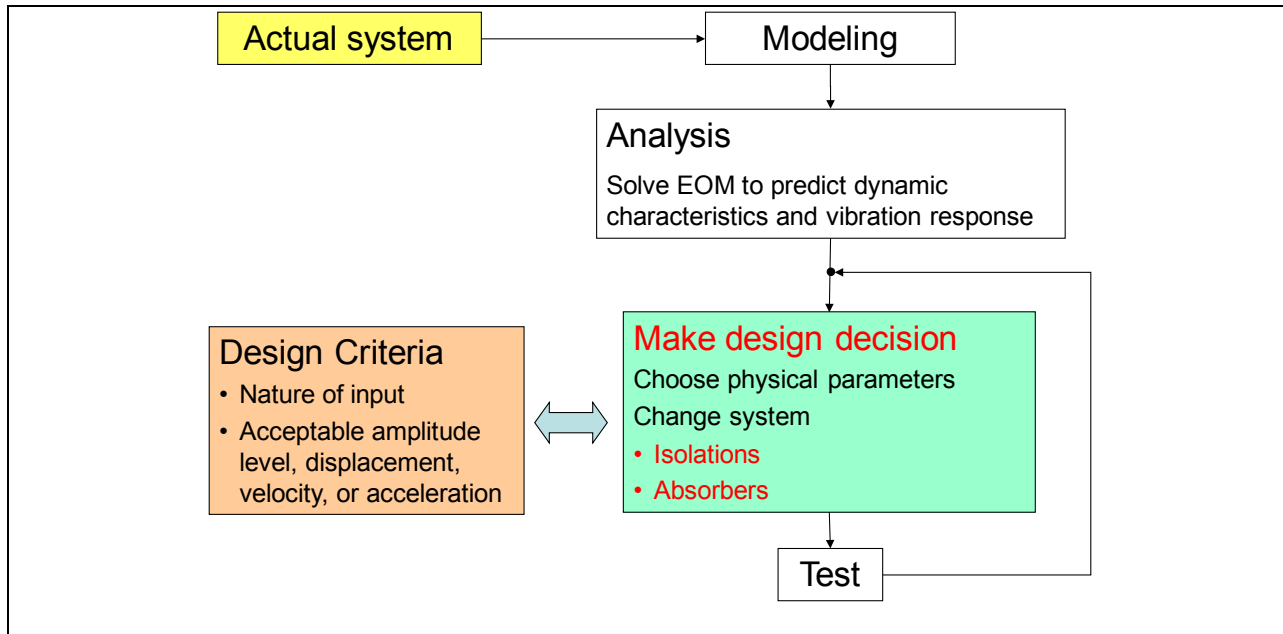
วิธีการควบคุมการสั่นสะเทือน

1. บทนำ

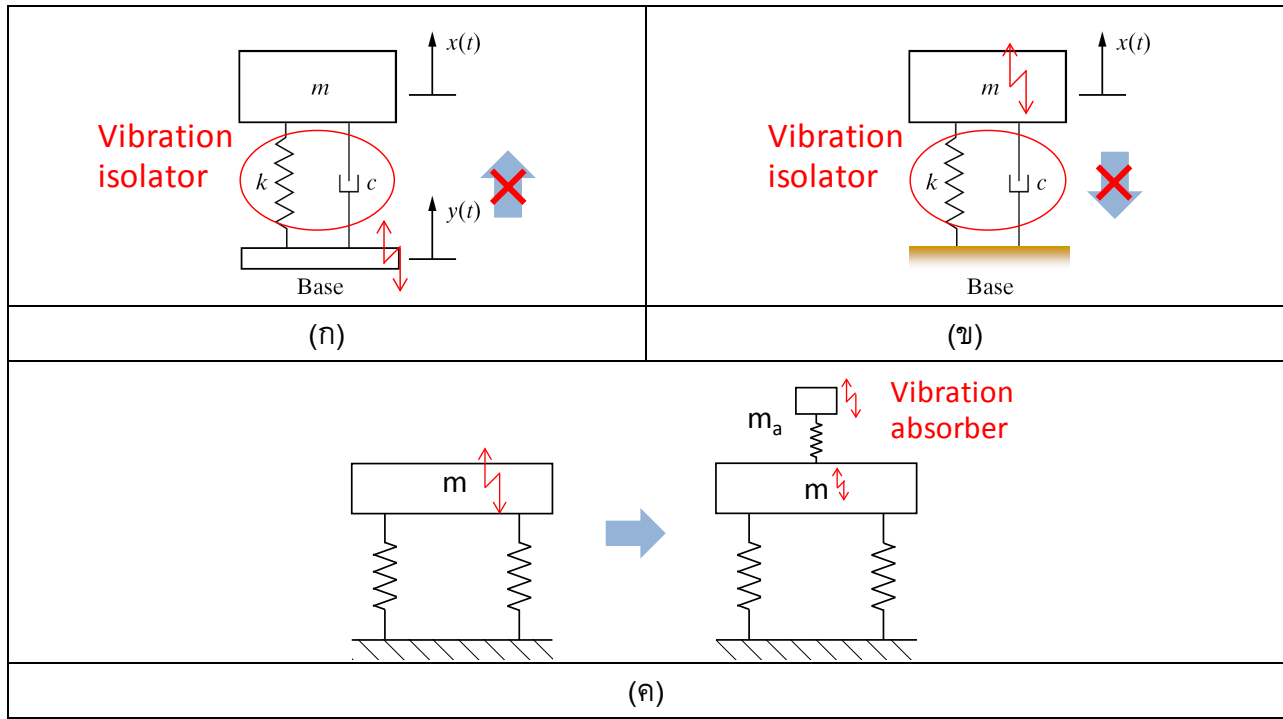
การสั่นสะเทือนเป็นเรื่องที่พบได้ในเครื่องจักรกลต่างๆ ที่มีการเคลื่อนที่ ไม่ว่าจะเป็นการหมุน หรือ การเคลื่อนที่กลับไปกลับมาของชิ้นส่วน การที่จะทำให้เครื่องจักรไม่เกิดการสั่นสะเทือนเลยเป็นสิ่งที่เป็นไป ได้ยากหรืออาจเป็นไปได้เลย เนื่องจากเมื่อชิ้นส่วนเคลื่อนที่จะมีความเร่งเกิดขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนทิศ ทางการเคลื่อนที่ เครื่องจักรกลหลายๆ ชนิดมีธรรมชาติการทำงานที่ไม่มีความสมดุล เช่น ลูกสูบของ เครื่องยนต์ที่มีเคลื่อนที่ไปกลับในแนวเส้นตรง การทำงานของปั้มน้ำ การหมุนปั่นผ้าของเครื่องซักผ้า เป็นต้น และหากมีความไม่สมดุลเกิดขึ้นแม้เพียงเล็กน้อย ก็อาจจะส่งผลเกิดแรงกระทำกับเครื่องจักรในขนาดที่มาก ได้ หากความถี่ของแรงกระทำใกล้เคียงกับช่วงความถี่ธรรมชาติของเครื่องจักร ดังที่ได้กล่าวถึงไปแล้วในบท ก่อนหน้า นอกจากนี้ นอกจากจะก่อให้เกิดความเสียหายกับตัวเครื่องจักรกลนั้นแล้ว การสั่นสะเทือนนี้ยังอาจส่งผล กระทบไปที่เครื่องจักรกลอื่นๆ ที่วางอยู่ในบริเวณใกล้เคียงกันได้ ถึงแม้ว่าการสั่นสะเทือนจะไม่สามารถ หลีกเลี่ยงได้ แต่ก็อาจควบคุมให้อยู่ในช่วงที่สามารถทำงานอย่างปลอดภัยได้

รูปที่ 7-1 แสดงแผนผังตัวอย่างการวิเคราะห์ระบบการสั่นสะเทือนเพื่อควบคุมการสั่น กระบวนการ วิเคราะห์ปัญหาเริ่มจากการสร้างแบบจำลองของระบบ ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 เพื่อให้ทราบถึงลักษณะ ของระบบและธรรมชาติของแรงกระตุ้นที่เกิดขึ้น หลังจากนั้นจึงวิเคราะห์หาลักษณะการสั่นสะเทือน โดยการ แก่สมการการเคลื่อนที่ที่สร้างขึ้น เมื่อทราบลักษณะการสั่นสะเทือนแล้ว การควบคุมการสั่นสะเทือนก็ สามารถทำได้โดยการปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ต่างๆ ของระบบ เช่น มวล ความแข็งสปริง ค่าความหน่วง เพื่อควบคุมไม่ให้เกิดการสั่นสะเทือนจากภายนอกกระทบกับระบบ หรือควบคุมไม่ให้เกิดการสั่นสะเทือนของระบบ แพร่ไปสู่ระบบอื่นๆ หรืออาจเพื่อควบคุมขนาดการสั่นสะเทือนของระบบโดยตรง ทั้งนี้การที่จะปรับเปลี่ยน พารามิเตอร์อย่างไรรั้น ก็ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของแรงกระตุ้น เช่น เป็นแรงกระตุ้นแบบเป็นคาบ หรือเป็นการ กระแทก เป็นต้น นอกจากนี้ยังต้องคำนึงถึงขนาดที่ยอมรับได้ของการขจัด ความเร็ว และความเร่งของการ สั่นสะเทือนด้วย ท้ายที่สุดเมื่อเลือกวิธีการควบคุมการสั่นสะเทือนได้แล้ว ก็ต้องมีการทดสอบเพื่อตรวจสอบ หาระดับการสั่นสะเทือนจริง และอาจมีการปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์เพิ่มเติม หากระดับการสั่นยังมีค่ามาก

สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงการควบคุมการสั่นสะเทือน 3 รูปแบบ ดังแสดงในรูปที่ 7-2 ได้แก่ 1) การ ป้องกันการสั่นสะเทือนจากพื้นไม่ให้ส่งผ่านไปยังเครื่องจักร 2) การป้องกันไม่ให้เกิดการสั่นสะเทือนจาก เครื่องจักรส่งผ่านไปยังพื้นและกระจายไปยังเครื่องจักรอื่นๆ และ 3) การลดการสั่นสะเทือนของตัวเครื่องจักร โดยตรง โดย 2 รูปแบบแรกเป็นการป้องกันการส่งผ่านการสั่นสะเทือน หรือเรียกว่า Vibration isolation ส่วนรูปแบบสุดท้ายเป็นการติดตั้งอุปกรณ์เพื่อเปลี่ยนแปลงระบบ ทำให้เครื่องจักรที่สนใจมีขนาดการ สั่นสะเทือนลดลง เนื่องจากอุปกรณ์ที่ติดตั้งเข้าไปทำหน้าที่ดูดซับการสั่นสะเทือน รูปแบบนี้จึงมีชื่อเรียกว่า Vibration absorber



รูปที่ 7-1 ขั้นตอนการวิเคราะห์ระบบการสั่นสะเทือนเพื่อควบคุมการสั่น



รูปที่ 7-2 รูปแบบการควบคุมการสั่นสะเทือน

2. การควบคุมการส่งผ่านการสั่นสะเทือนจากพื้นไปยังเครื่องจักร

การส่งผ่านการสั่นสะเทือนจากพื้นไปยังเครื่องจักรแสดงดังรูปที่ 7-2(ก) การควบคุมการส่งผ่านการสั่นสะเทือนทำได้โดยออกแบบ Vibration isolator ซึ่งก็คือสปริงและตัวหน่วงการสั่นสะเทือนที่มีค่าเหมาะสม ทำให้การสั่นสะเทือนจากพื้นส่งผ่านไปยังเครื่องจักรน้อยลงได้ ตัวอย่างการควบคุมการสั่นสะเทือนในรูปแบบนี้ได้แก่ ระบบรองรับของรถยนต์ ซึ่งช่วยลดการสั่นสะเทือนอันเนื่องมาจากความไม่เรียบของสภาพพื้นถนน ให้ส่งผ่านไปยังห้องผู้โดยสารได้น้อยลง หรือโต๊ะควบคุมการสั่นสะเทือน (Table isolator) ซึ่งทำหน้าที่ลดการสั่นสะเทือนจากพื้นที่จะส่งผ่านไปยังเครื่องจักรหรืออุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่วางบนโต๊ะ เป็นต้น

การวิเคราะห์ปัญหาในกรณีนี้เป็นเช่นเดียวกับปัญหาการสั่นสะเทือนจากการสั่นของพื้น ที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 สำหรับในที่นี้จะกล่าวทบทวนพอสังเขป รูปที่ 7-3 แสดงการสั่นสะเทือนเนื่องจากการสั่นของพื้น และ FBD ซึ่งเป็นรูปเดียวกับรูปที่ 4-18 รูปแบบสมการการเคลื่อนที่ในกรณีนี้คือ

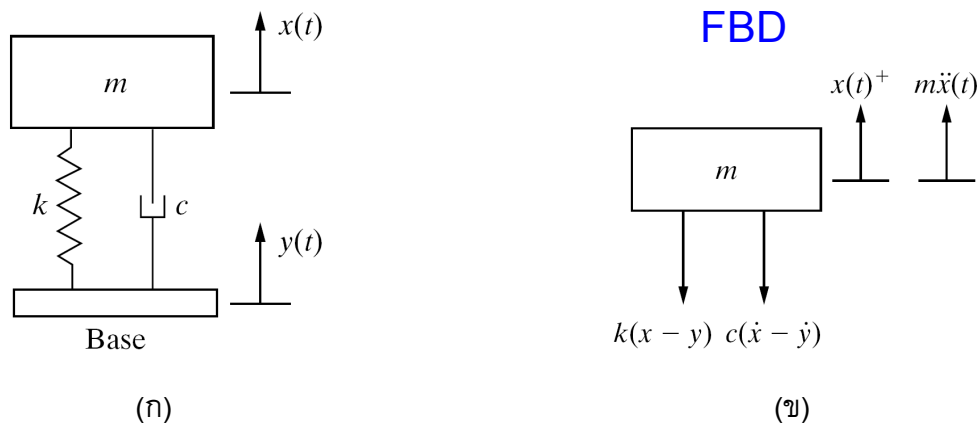
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = cy + ky$$

หรือ
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y \quad (7-1)$$

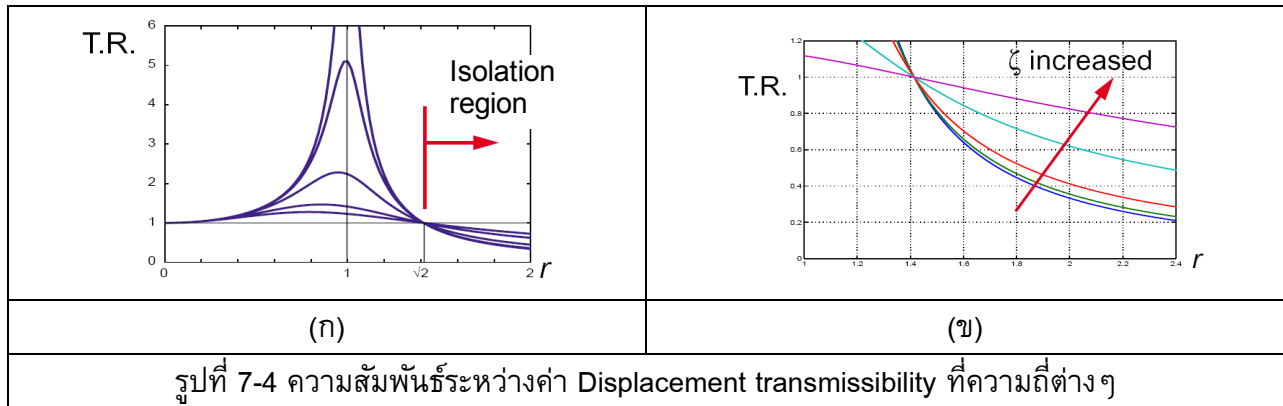
เมื่อกำหนดให้การเคลื่อนที่ของพื้นเป็นแบบฮาร์โมนิก $y(t) = Y \cos \omega t = \text{Re}[Ye^{j\omega t}]$ การตอบสนองในรูปแบบเชิงซ้อนคือ $z(t) = Ze^{j\omega t}$ และ $x(t) = \text{Re}[z(t)]$ แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (7-1) และให้ $r = \omega/\omega_n$ จะได้

$$\frac{X}{Y} = |T(\omega)| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (7-2)$$

สมการที่ (7-2) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดการเคลื่อนที่ของวัตถุที่สนใจ X กับขนาดการสั่นสะเทือนของพื้น Y และมีชื่อเรียกว่า Displacement transmissibility (T.R.) อัตราส่วนนี้แสดงให้เห็นว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ไปเท่าไรเมื่อให้การกระตุ้นโดยการสั่นของพื้นที่มีความถี่ต่างๆ โดยความสัมพันธ์ตามสมการที่ (7-2) จะเขียนเป็นกราฟได้ดังแสดงในรูปที่ 7-4(ก) และส่วนขยายช่วง $r > \sqrt{2}$ ในรูป 7-4(ข)



รูปที่ 7-3 แบบจำลองการสั่นสะเทือนจากการสั่นของพื้น และ FBD



จากรูปที่ 7-4 จะได้ว่า เมื่อความถี่การกระตุ้นมีค่าน้อยๆ (เข้าใกล้ 0 Hz) ค่า T.R. จะมีค่าเข้าใกล้ 1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการขจัดของการสั่นสะเทือนของพื้นมีค่าเท่ากับการสั่นสะเทือนของมวลที่สนใจ เมื่อความถี่การสั่นสะเทือนเพิ่มมากยิ่งขึ้นขนาดของการสั่นสะเทือนจะเพิ่มมากขึ้น และจะมีค่ามากเมื่อความถี่การกระตุ้นเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของระบบ ($r = 1$) และจะพบว่าขนาดของการสั่นสะเทือนของมวลจะลดลงน้อยกว่าขนาดการสั่นของพื้นที่มีการกระตุ้น ($T.R. \leq 1$) เมื่อ $r > \sqrt{2}$ ช่วงนี้มีชื่อเรียกว่าช่วง isolation ดังนั้นหากต้องการควบคุมให้การส่งผ่านการสั่นสะเทือนไปยังมวลมีค่าน้อย จะต้องออกแบบให้ระบบมีการสั่นอยู่ในช่วงนี้ เนื่องจากค่า r ยิ่งมาก ขนาดของการส่งผ่านการสั่นสะเทือนจะลดลง การจะเพิ่มค่า r นั้น ทำได้โดยลดความถี่ธรรมชาติ ซึ่งทำได้โดยลดค่าความแข็งสปริง k และเพิ่มมวล m ของระบบ สำหรับผลของตัวหน่วงการสั่นสะเทือนนั้นจะพบว่า ถึงแม้ตัวหน่วงการสั่นสะเทือนจะช่วยลดการสั่นสะเทือนในช่วงใกล้ๆ กับ resonance ได้มาก แต่สำหรับในช่วงที่เกิดการ isolation นั้น ยิ่งค่าอัตราส่วนการหน่วงมีค่ามาก ขนาดการสั่นสะเทือนกลับเพิ่มมากขึ้นด้วย ดังนั้นในการออกแบบ vibration isolation การกำหนดค่าอัตราส่วนการหน่วงมากเกินไปจึงไม่เป็นผลดี นอกจากจะพิจารณาการส่งผ่านการสั่นสะเทือนหรือ T.R. แล้ว แรงที่ส่งผ่านก็จำเป็นที่จะต้องพิจารณาเช่นกัน

จาก FBD ในรูปที่ 7-3(ข) จะได้ว่าแรงส่งผ่านมีค่าเท่ากับผลบวกของแรงที่ส่งผ่านโดยสปริง และส่งผ่านโดยตัวหน่วงการสั่นสะเทือน และจาก EOM จะได้ว่าแรงนี้มีค่าเท่ากับ $-m\ddot{x}$ ดังสมการ

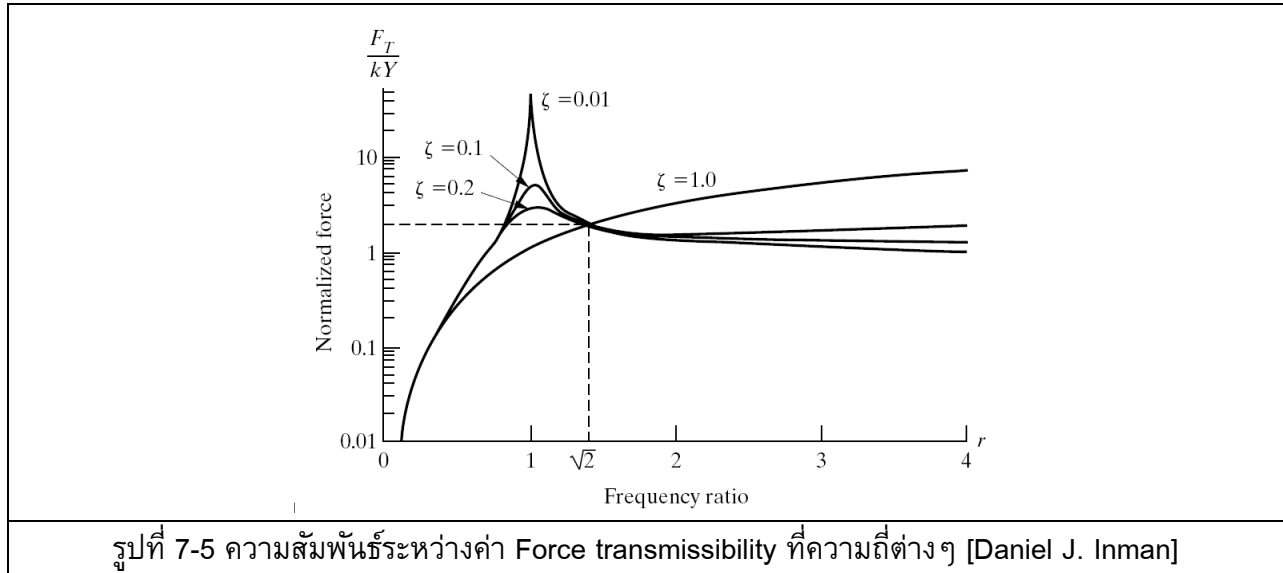
$$F(t) = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x} \quad (7-3)$$

ดังนั้นจะได้ $F(t) = m\omega^2 X \cos(\omega t + \theta) = m\omega^2 Y |T(\omega)| \cos(\omega t + \theta) = F_T \cos(\omega t + \theta)$

และ
$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (7-4)$$

อัตราส่วนในสมการที่ (7-4) เรียกว่า Force transmissibility ซึ่งเป็นอัตราส่วนแสดงขนาดแรงส่งผ่านที่ความถี่ต่างๆ รูปที่ 7-5 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของ Force transmissibility ตามสมการที่ (7-4) จากรูป

จะพบว่า Force transmissibility จะมีค่ามากกว่า 1 แม้ว่าจะเป็นช่วง isolation ซึ่ง $r > \sqrt{2}$ ก็ตาม และจะพบว่าค่า Force transmissibility จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนการหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้น



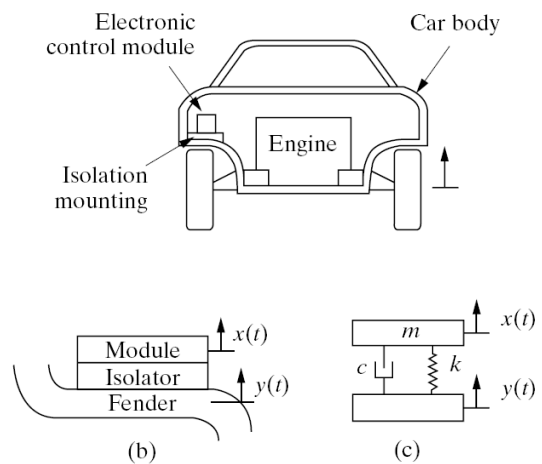
ตัวอย่าง 7-1

An electronic control system for an automobile engine is to be mounted on top of the fender inside the engine compartment of the automobile as illustrated in the figure. To protect it from fatigue and breakage, it is desirable to isolate the module from the vibration induced in the car body by road and engine vibration. Hence the module is mounted on an isolator. Design the isolator (pick c and k). Once the design values for isolator are chosen, calculate the magnitude of the force transmitted to the module through the isolator.

Given

1. The mass of the module is 3 kg.
2. The dominant vibration of the fender is approximated by $y(t) = 0.01 \sin(35t)$ m.
3. It is desired to keep the displacement of the module less than 0.005 m at all times.

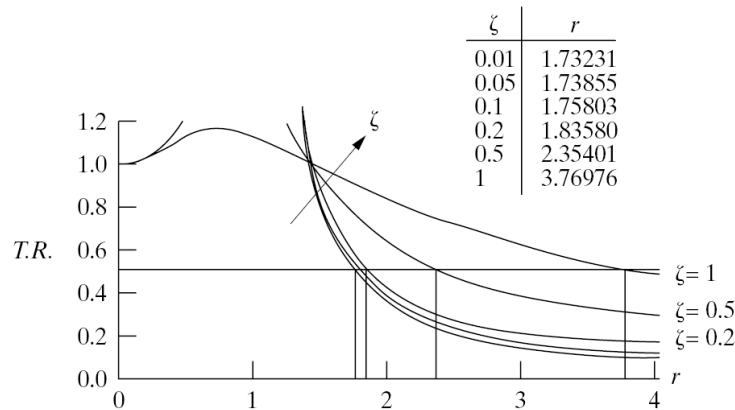
[Daniel J. Inman, Ex. 5.2.1]



จากโจทย์จะได้ว่าขนาดการสั่นสะเทือนของโครงสร้าง Y เท่ากับ 0.01 m ส่วนการสั่นสะเทือนของ module X ที่ต้องการคือน้อยกว่า 0.005 m ดังนั้นจะได้

$$T.R. = \frac{X}{Y} = \frac{0.005}{0.01} = 0.5$$

เมื่อพิจารณาจากกราฟด้านล่าง จะได้ว่าเมื่อ $T.R. = 0.5$ อาจจะต้องเลือกจุดที่ต้องการออกแบบ r และอัตราส่วนความหน่วง ζ ได้เป็นคู่ๆ ดังที่แสดงในตารางในรูปด้านล่าง



สมมุติในที่นี้เลือกใช้ $\zeta = 0.02$ จะได้ว่า $r = 1.73$ จากค่าที่เลือกนี้สามารถหาค่าต่างๆ ได้ดังนี้

1. ความถี่ธรรมชาติ หาได้จาก $r = \omega/\omega_n = 35/\omega_n = 1.73$

ดังนั้น $\omega_n = 20.231$ rad/s

2. ค่าความแข็งสปริง k หาได้จาก $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{k/3} = 20.231$ rad/s

ดังนั้น $k = 1228$ N/m

ANS

3. ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง c หาได้จาก $c = 2\zeta m \omega_n = 2(0.02)(3)(20.231) = 2.428$ kg/s

ANS

เมื่อได้ค่า k และ c เบื้องต้นแล้ว ก็สามารถนำไปเปิดหาค่า k และ c ที่เหมาะสมจาก catalog ต่อไป หากเลือกได้หลายชุด อาจต้องพิจารณาจากราคา ความยากง่ายในการประกอบ ช่วงอุณหภูมิใช้งาน เป็นต้น

อุปกรณ์บางอย่างอาจถูกจำกัดด้วยแรงที่กระทำ ดังนั้นต้องพิจารณาค่าแรงที่ส่งผ่านด้วย ดังนี้

$$F_T = kYr^2 \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = kYr^2 (T.R.)$$

ดังนั้น $F_T = (1228)(0.01)(1.73)^2(0.5) = 18.375$ N

ANS

หากค่าที่คำนวณได้ไม่มากเกินไป ก็สามารถใช้ได้เลย ถ้าแรงยังมากเกินไป ก็จำเป็นที่จะต้องย้อนกลับไปพิจารณา r และ ζ คู่ใหม่ และทำการคำนวณใหม่อีกครั้ง

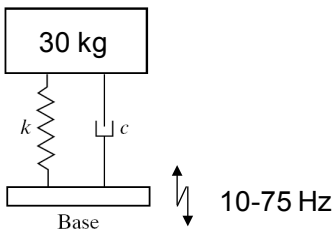
สำหรับปัญหาบางชนิด ระยะ static deflection อาจจะเป็นเงื่อนไขในการติดตั้ง จึงอาจตรวจสอบ ระยะนี้ด้วย ดังนี้

$$\delta = \frac{mg}{k} = \frac{(3)(9.81)}{1228} = 0.024 \text{ m}$$

ระยะ 2.4 cm นี้ในกรณีที่ เป็นรถยนต์อาจจะเหมาะสม อย่างไรก็ตามค่านี้อาจจะมากเกินไปสำหรับ ปัญหาอื่นๆ เช่น กรณีของคอมพิวเตอรืโน้ตบุ๊ก เป็นต้น

จากตัวอย่างนี้จะพบว่าการออกแบบ Isolator นั้น นอกจากจะต้องพิจารณาถึงเงื่อนไขของขนาด การสั่นสะเทือนแล้ว ยังต้องพิจารณาถึงแรงส่งผ่าน และระยะ static deflection ด้วยเนื่องจากอาจมี ความเกี่ยวข้องกับการใช้งาน

การวิเคราะห์ปัญหาในตัวอย่างนี้ จำเป็นต้องมีการตั้งสมมุติฐานหลายๆ อย่าง เช่น การกำหนดให้ แรงอยู่ในรูป $y(t) = 0.01 \sin(35t)$ ซึ่งในความเป็นจริง ความถี่ของการกระตุ้นอาจจะเปลี่ยนแปลง จากสาเหตุต่างๆ เช่น สภาพพื้นผิวถนน ความเร็วการเคลื่อนที่ หรือความเร็วรอบเครื่องยนต์ อย่างไรก็ตามค่า y ที่กำหนดโดยผู้ออกแบบ ควรเป็นค่าวิกฤตที่เหมาะสมในการออกแบบ เช่น ขนาดการสั่นสะเทือน Y ที่ความถี่อื่นๆ อาจจะน้อยกว่า 0.01 m หรือการกระตุ้นที่ความถี่อื่นอาจจะ มีความถี่มากกว่า 35 rad/s ซึ่งจะส่งผลให้ค่า r ในกรณีแรงกระตุ้นอื่น มีค่ามากกว่าค่าที่ใช้ ออกแบบ ซึ่งค่า T.R. ที่ความถี่สูงๆ นั้นจะมีค่าน้อยกว่าค่าที่ออกแบบอยู่แล้ว จึงสามารถใช้งานได้ เป็นต้น



ตัวอย่าง 7-2 A sensitive electronic system, of mass 30 kg, is supported by a spring-damper system on the floor of a building that is subjected to a harmonic motion in the frequency range 10-75 Hz. If the damping ratio of the suspension is 0.25, determine the stiffness of the suspension if the amplitude of vibration transmitted to the system is to be less than 15 percent of the floor vibration over the given frequency range. [Singiresu S. Rao, Prob. 9.46]

จากโจทย์กำหนดให้การส่งผ่านการสั่นสะเทือนน้อยกว่า 15 เปอร์เซ็นต์ ดังนั้นจะได้

$$\text{T.R.} = \frac{X}{Y} \leq 0.15 \quad \text{พิจารณาให้ T.R.} = 0.15$$

จากความสัมพันธ์ของค่า T.R. กับค่าอัตราส่วนความหน่วงและอัตราส่วนความถี่จะได้

$$T.R. = 0.15 = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2 \cdot 0.25 \cdot r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot 0.25 \cdot r)^2}}$$

คำนวณหาค่าอัตราส่วนความเร็วได้ $r = 3.9546$

$$\text{ดังนั้น } r = 3.9546 = \frac{\omega}{\omega_n} = \omega \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{แทนค่ามวลของระบบ 30 kg จะได้ } 3.9546 = \omega \cdot \sqrt{\frac{30}{k}}$$

$$\text{หรือ } k = 1.9183\omega^2 \text{ N/m}$$

จะเห็นว่าค่า k ที่ทำให้ $T.R. = 0.15$ จะแตกต่างกันตามความถี่ของการกระตุ้น

$$\text{กรณีการกระตุ้นที่ 10 Hz จะได้ } \omega = 2\pi(10) = 62.832 \text{ rad/s}$$

$$\text{และ } k = 1.9183(62.832)^2 = 75730776 \text{ N/m}$$

$$\text{กรณีการกระตุ้นที่ 75 Hz จะได้ } \omega = 2\pi(75) = 471.240 \text{ rad/s}$$

$$\text{และ } k = 1.9183(471.240)^2 = 4259856163 \text{ N/m}$$

เนื่องจากค่า k ที่น้อยกว่าจะส่งผลให้ความถี่ธรรมชาติของระบบน้อยกว่า เมื่อนำไปคำนวณหา r จะได้ค่า r ที่สูงกว่าเมื่อระบบถูกกระตุ้นด้วยความถี่เดียวกัน ดังนั้นในกรณีนี้จึงควรเลือกใช้ค่าความแข็งสปริง 7573.0776 N/m

การตรวจสอบ

ตรวจสอบว่าค่า $k = 7573.0776 \text{ N/m}$ ใช้ได้หรือไม่หากมีแรงกระตุ้นความถี่ 75 Hz

$$\text{ในกรณีนี้ } \omega = 471.240 \text{ rad/s} \text{ และ } \omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{75730776/30} = 15.8882 \text{ rad/s}$$

$$\text{และ } r = \omega/\omega_n = 471.240/15.8882 = 29.6567$$

$$T.R. = \sqrt{\frac{1 + (2 \cdot 0.25 \cdot 29.6567)^2}{(1 - 29.6567^2)^2 + (2 \cdot 0.25 \cdot 29.6567)^2}} = 0.0169 \leq 0.15$$

ดังนั้นจึงยืนยันได้ว่า $k = 7573.0776 \text{ N/m}$ สามารถทำให้การสั่นสะเทือนที่ส่งผ่านมาที่ระบบน้อยกว่า 15 เปอร์เซ็นต์ได้ตลอดในช่วงความถี่ที่กำหนด

ANS

หมายเหตุ

หากตรวจสอบโดยใช้ค่า $k = 425,985.6163 \text{ N/m}$ ในกรณีที่ระบบถูกกระตุ้นด้วยความถี่ 10 Hz จะคำนวณค่า T.R. ได้เท่ากับ 1.3455 ซึ่งมากกว่าค่าที่กำหนดคือ 0.15 มาก จึงสรุปได้ว่าค่า $k = 425,985.6163 \text{ N/m}$ ไม่สามารถทำให้การส่งผ่านการสั่นสะเทือนน้อยกว่าที่กำหนดตลอดช่วงได้

3. การควบคุมการส่งผ่านการสั่นสะเทือนจากเครื่องจักรไปยังพื้น

เมื่อเครื่องจักรทำงานจะเกิดการสั่นสะเทือนขึ้น การสั่นสะเทือนจะส่งผ่านโครงสร้างและระบบรองรับของเครื่องจักรไปยังพื้นและส่งผ่านไปยังอุปกรณ์อื่นๆ ที่อยู่ใกล้เคียงต่อไป ตัวอย่างปัญหาในกรณีนี้ เช่น การทำงานของเครื่องซักผ้าซึ่งโดยธรรมชาติของการทำงานไม่มีความสมดุล เนื่องจากผ้าที่หมุนปั่นในเครื่องไม่อาจจะกระจายอย่างสม่ำเสมอในถังซักได้ การสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นจะส่งผ่านไปยังพื้นและเครื่องใช้อื่นๆ ภายในบ้านต่อไป ดังนั้นการออกแบบเครื่องซักผ้าจึงต้องมีการออกแบบระบบรองรับอย่างดี เพื่อให้การส่งผ่านการสั่นสะเทือนไปยังส่วนอื่นๆ มีค่าน้อย ตัวอย่างอื่นๆ เช่น ในเครื่องจักรขนาดใหญ่เช่น ปัม หรือ คอมเพรสเซอร์ การสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นมีค่ามาก ดังนั้นที่ฐานรองรับของเครื่องจักรเหล่านี้จึงต้องมีการติดตั้ง Isolator เพื่อลดการส่งผ่านการสั่นสะเทือนไปยังพื้นด้วยเสมอ ตัวอย่างของ Isolator ที่ใช้ในเครื่องจักรเหล่านี้ แสดงดังรูปที่ 7-6

 <p>Smaller centrifugal fans can be directly mounted on isolators. (Fan shown is a Model 18-BISW Arr. 10)</p> <p>Larger centrifugal fans and all sizes of Arr. 1 or 3 fans are typically mounted on structural bases. The fan shown in this photo is mounted on a structural base with height saving brackets and free standing springs. (Fan shown is Model 30 AFDW, Arr. 3)</p> <p>Greenheck Fan Corp., Catalog Mounting Bases and Vibration Isolation SN Rev.2 March 2006</p>	 <p>Photos of springs by KTI Germany</p> <p>Coil spring isolator with integral viscous damping unit.</p> <p>Fabreeka Vibration & Shock control, Foundation Isolation Solutions for Equipment & Machines</p>
<p>รูปที่ 7-5 ตัวอย่าง Isolator</p>	

การวิเคราะห์ปัญหาการส่งผ่านการสั่นสะเทือนไปยังพื้น เริ่มจากการเขียนแบบจำลองและ FBD ดังแสดงในรูปที่ 7-6 เมื่อกำหนดให้แรงกระทำเป็นแบบฮาร์มอนิก จะได้ว่าปัญหานี้เป็นรูปแบบเดียวกับปัญหาการสั่นสะเทือนแบบบังคับตั้งได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 จาก FBD สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (7-5)$$

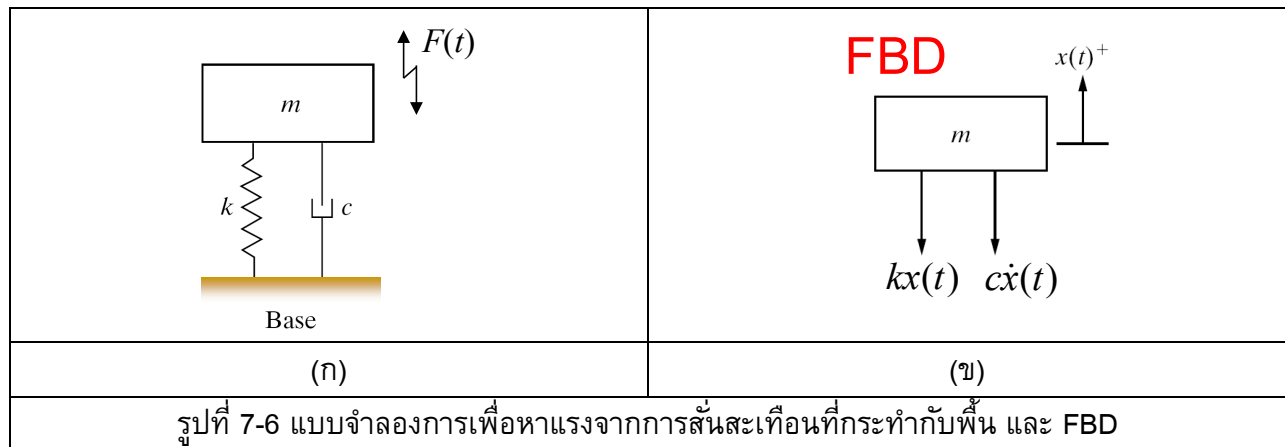
การสั่นสะเทือนสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ $x(t) = X \cos(\omega t - \theta)$

โดยขนาดการสั่นสะเทือนหาได้จาก $X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ โดย $r = \omega/\omega_n$

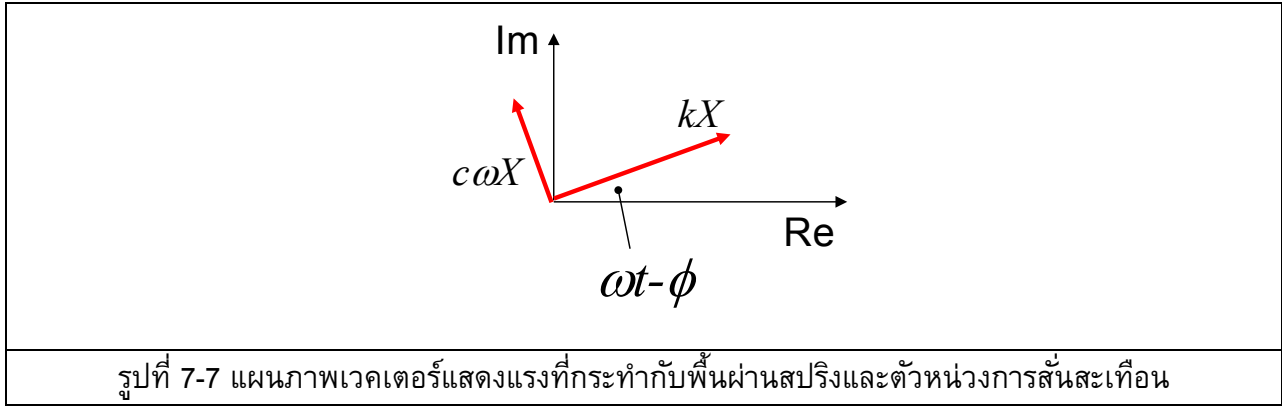
สำหรับแรงที่กระทำกับพื้นจะกระทำผ่านสปริงและตัวหน่วงการสั่นสะเทือน ดังแสดงด้วยสมการ

$$F_T(t) = kx(t) + c\dot{x}(t)$$

$$F_T(t) = kX \cos(\omega t - \theta) - c\omega X \sin(\omega t - \theta) \quad (7-6)$$



ขนาดของแรงในสมการที่ (7-6) สามารถหาได้หลายวิธี อาจจะใช้วิธีทางตรีโกณมิติ วิธีจำนวนเชิงซ้อน หรืออาจพิจารณาโดยใช้เวกเตอร์หมุนดังนี้ รูปที่ 7-7 แสดงแผนภาพเวกเตอร์ของแรงที่กระทำผ่านสปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือน โดยเวกเตอร์ทั้งสองเป็นเวกเตอร์ซึ่งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω ค่าของแรงในเวลานั้นๆ หากจากผลรวมของเวกเตอร์ที่ถูกฉายลงบนแกนจริง เนื่องจากเวกเตอร์ของแรงที่ส่งผ่านตัวหน่วงการสั่นสะเทือนเป็นฟังก์ชัน sine ดังนั้นมุมจึงต่างจากแรงที่ส่งผ่านสปริง ซึ่งเป็นฟังก์ชัน cosine อยู่ 90 องศา โดยเวกเตอร์ไหนจะนำหรือตาม ขึ้นอยู่กับเครื่องหมายบวกลบในสมการ เช่นในสมการที่ (7-6) เทอมของ sine มีเครื่องหมายเป็นลบ แสดงให้เห็นว่ามุมต้องนำหน้าอยู่ 90 องศา เป็นต้น จากแผนภาพในรูปที่ 7-7 จะเห็นว่าขนาดของแรงส่งผ่านรวมจากสปริงและตัวหน่วงการสั่นสะเทือนจะหาได้จากผลรวมของเวกเตอร์ทั้งสอง ดังสมการ



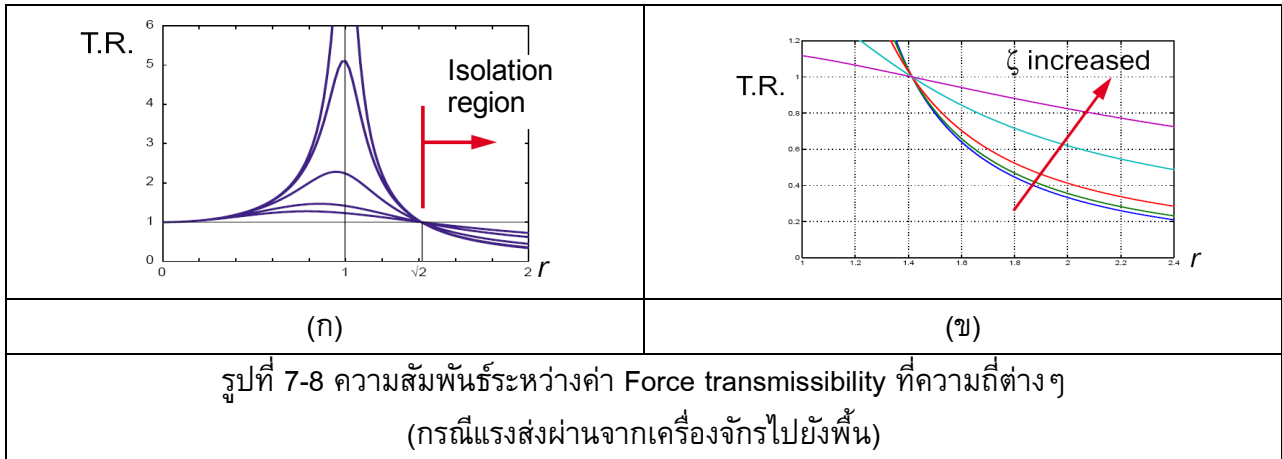
$$|F_T(t)| = \sqrt{(kX)^2 + (c\omega X)^2} = X\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$$

$$|F_T(t)| = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$$

จัดรูปสมการ จะได้

$$\left| \frac{F_T(t)}{F_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (7-7)$$

สมการที่ (7-7) เรียกว่า Force transmissibility (T.R.) แสดงให้เห็นถึงอัตราส่วนของแรงส่งผ่านต่อแรงกระตุ้นที่ความถี่ต่างๆ สมการนี้เหมือนกับสมการ (7-2) ซึ่งแสดง Displacement transmissibility ในหัวข้อการสั่นสะเทือนจากการสั่นของในหัวข้อที่แล้ว จึงมีลักษณะของกราฟความสัมพันธ์เช่นเดียวกันกับรูปที่ 7-4 และนำมาเขียนซ้ำอีกครั้งในรูปที่ 7-8



จากรูปจะสรุปได้ว่า การส่งผ่านแรงจะลดลงเมื่อ $r > \sqrt{2}$ เรียกช่วงที่การส่งผ่านแรงลดลงว่าช่วง isolation และเพื่อที่จะทำให้ค่า r มีค่ามาก จึงต้องออกแบบให้มวลที่ธรรมชาติของระบบมีค่าน้อย ซึ่งทำได้

โดยใช้สปริงที่มีค่าความแข็งน้อย หรือเพิ่มมวลของระบบ สำหรับในช่วง isolation การเพิ่มค่าอัตราส่วนการหน่วงจะทำให้การสั่นสะเทือนเพิ่มมากขึ้น ดังนั้นในการออกแบบ isolator จึงไม่ต้องการให้มีอัตราส่วนการหน่วงมาก อย่างไรก็ตามตัวหน่วงการสั่นสะเทือนยังมีความจำเป็นอยู่เพื่อลดการสั่นสะเทือนที่ resonance ซึ่งเป็นจุดที่ต้องผ่านในขณะที่เพิ่มความเร็วเมื่อเริ่มเดินเครื่องก่อนไปถึงจุดทำงานที่ได้ออกแบบไว้

หากความถี่การกระตุ้นสูงกว่าความถี่ธรรมชาติมาก เช่น เมื่อ $r > 3$ และอัตราส่วนการหน่วงน้อยๆ เช่น เมื่ออัตราส่วนการหน่วง $\zeta < 0.2$ จะเห็นว่าค่า T.R. แทบจะไม่ขึ้นกับอัตราส่วนการหน่วงเลย ในกรณีนี้อาจประมาณสมการที่ (7-7) โดยที่ไม่คำนึงถึงตัวหน่วงการสั่นสะเทือนของระบบดังสมการ

$$T.R. \approx \frac{1}{r^2 - 1} \quad (7-8)$$

เมื่อกำหนดให้ การลดลงของการส่งผ่าน $R = 1 - T.R.$ จะได้

$$R = 1 - T.R. = 1 - \frac{1}{r^2 - 1}$$

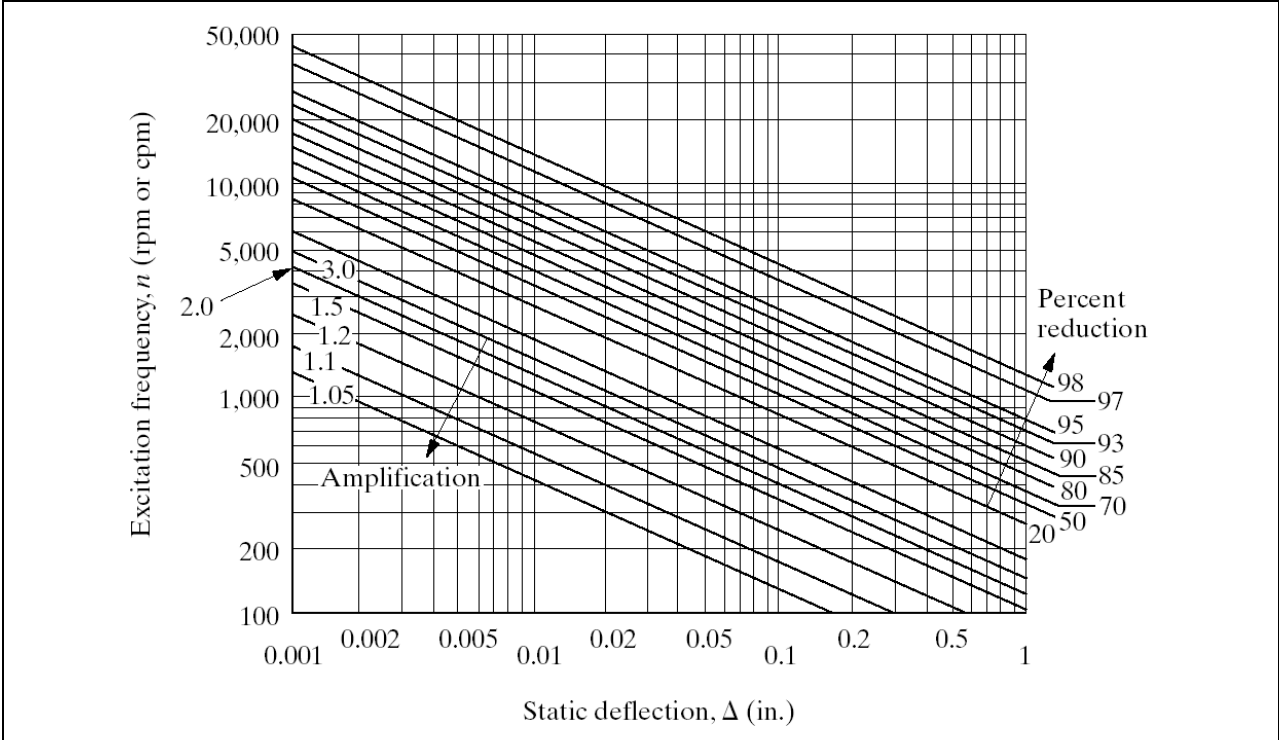
จัดรูปจะได้
$$r = \sqrt{\frac{2-R}{1-R}} = \frac{\omega}{\sqrt{k/m}} \quad (7-9)$$

เนื่องจากการใช้งานจริง ข้อมูลที่มีมักอยู่ในรูปของความเร็วรอบหมุนของเครื่องจักร n ที่มีหน่วยเป็น rpm ส่วนค่าความแข็งของสปริง k ในหลายๆ ครั้งก็บอกเป็นค่ายุบตัวของสปริง (Static deflection, Δ) โดย $k = mg/\Delta$ ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการที่ (7-9) ในรูปของตัวแปรเหล่านี้ได้ดังนี้

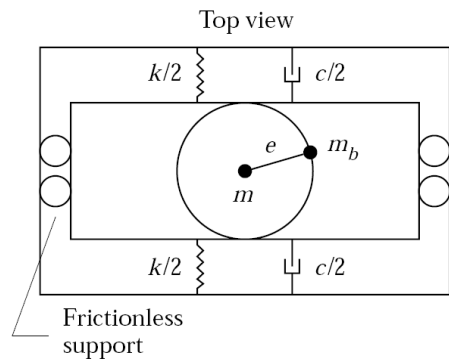
$$n = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g(2-R)}{\Delta(1-R)}} = 29.9093 \sqrt{\frac{2-R}{\Delta(1-R)}}$$

หรือ
$$\log n = -\frac{1}{2} \log \Delta + \log \left(29.9093 \sqrt{\frac{2-R}{\Delta(1-R)}} \right) \quad (7-10)$$

สมการที่ (7-10) สามารถนำไปวาดกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่ายุบตัวของสปริง และค่าความเร็วรอบหมุนเครื่องจักร ที่เปอร์เซ็นต์การลดลงของการส่งผ่านแรงต่างๆ ใน Log-scale ได้ดังรูปที่ 7-9 สำหรับช่วง Percent reduction หมายถึงช่วงที่แรงส่งผ่านน้อยกว่าแรงกระตุ้น ส่วน Amplification เป็นช่วงที่แรงส่งผ่านมากกว่าแรงกระตุ้น การใช้รูปที่ 7-9 ในการออกแบบ ทำได้โดยกำหนดค่าเปอร์เซ็นต์การส่งผ่านแรงที่ต้องการ เมื่อทราบความเร็วรอบการทำงานของเครื่องจักร จะสามารถดูกราฟเพื่อหาค่าการยุบตัวของสปริง และนำไปเลือกหาค่าความแข็งสปริงได้โดยคำนวณจากสมการ $k = mg/\Delta$



รูปที่ 7-9 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าขยายตัวของสปริงและค่าความเร็วรอบหมุนเครื่องจักร ที่เปอร์เซ็นต์การลดลงของการส่งผ่านแรงสั่นสะเทือนต่างๆ [Daniel J. Inman]



ตัวอย่าง 7-3 A model of a washing machine is illustrated in the figure. A bundle of wet clothes form a mass of 10 kg (m_0, m_b) and causes a rotating unbalance. The rotating mass is 20 kg (including m_0) and the diameter of the washer basket ($2e$) is 50 cm. Assume that the spin cycle rotates at 300 rpm. Let k be 1000 N/m and $\zeta = 0.01$. (a) Calculate the force transmitted to the sides of the washing machine. (b) The quantities m, m_0, e and ω are all fixed by the previous design, Design the isolation system so that the force transmitted to the side of the washing machine is less than 100 N. [Daniel J. Inman, Prob. 5.8-5.9]

(a) หาแรงจากการสั่นสะเทือนที่ถ่ายไปยังตัวเครื่อง จากโจทย์สามารถคำนวณหาค่าต่างๆ ได้ดังนี้

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{20}} = 7.071 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \left(\frac{300}{60} \right) = 31.4159 \text{ rad/s}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{31.4159}{7.071} = 4.443$$

$$c = 2m\zeta\omega_n = 2(20)(0.01)(7.071) = 2.8284 \text{ Ns/m}$$

ขนาดการสั่นสะเทือนเกิดจากความไม่สมดุลของมวลของผ้าที่ถูกเหวี่ยงให้ชิดกับผิวด้านในของถังซักผ้า และสามารถหาได้จาก

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{(m_0 e \omega^2)/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{m_0 e}{m} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

ดังนั้น

$$X = \frac{10(0.25)}{20} \frac{4.443^2}{\sqrt{(1-4.443^2)^2 + (2 \cdot 0.01 \cdot 4.443)^2}} = 0.1317 \text{ m}$$

แรงที่ส่งผ่านสปริงและตัวหน่วงการสั่นสะเทือนไปยังตัวเครื่องหาได้จาก

$$F_T = X \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2} = (0.1317) \sqrt{1000^2 + (2.8284)^2 (31.4159)^2} = 132.2 \text{ N}$$

ANS

(b) ออกแบบให้แรงที่ส่งผ่านน้อยกว่า 100 N

พิจารณาให้แรงส่งผ่าน = 100 N จะได้

$$T.R. = \frac{F_T}{F_0} = \frac{F_T}{m_0 e \omega^2} = \frac{100}{10(0.25)(31.4159)^2} = 0.0405$$

จาก $T.R. = \sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$ จะพบว่า T.R. ขึ้นอยู่กับทั้งค่า r และ ζ ซึ่งเกี่ยวข้องกับค่า

k และค่า c ของระบบ ดังนั้นจะต้องกำหนดค่า ζ เสียก่อนจึงจะคำนวณหาค่า r ได้

สมมติให้ $\zeta = 0.01$ จะได้

$$T.R. = \sqrt{\frac{1+(2 \cdot 0.01 \cdot r)^2}{(1-r^2)^2+(2 \cdot 0.01 \cdot r)^2}} = 0.0405$$

คำนวณหาค่า r ได้ โดย $r = 5.079$

เมื่อทราบค่า r จะสามารถคำนวณหาค่า k และ c ได้จาก

$$r = 5.079 = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{31.4159}{\sqrt{k/20}} \quad \text{ดังนั้น } k = 765 \text{ N/m}$$

ANS

จาก $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ ดังนั้น $c = 2\zeta\sqrt{km} = 2(0.01)\sqrt{(765)(20)} = 2.47 \text{ Ns/m}$

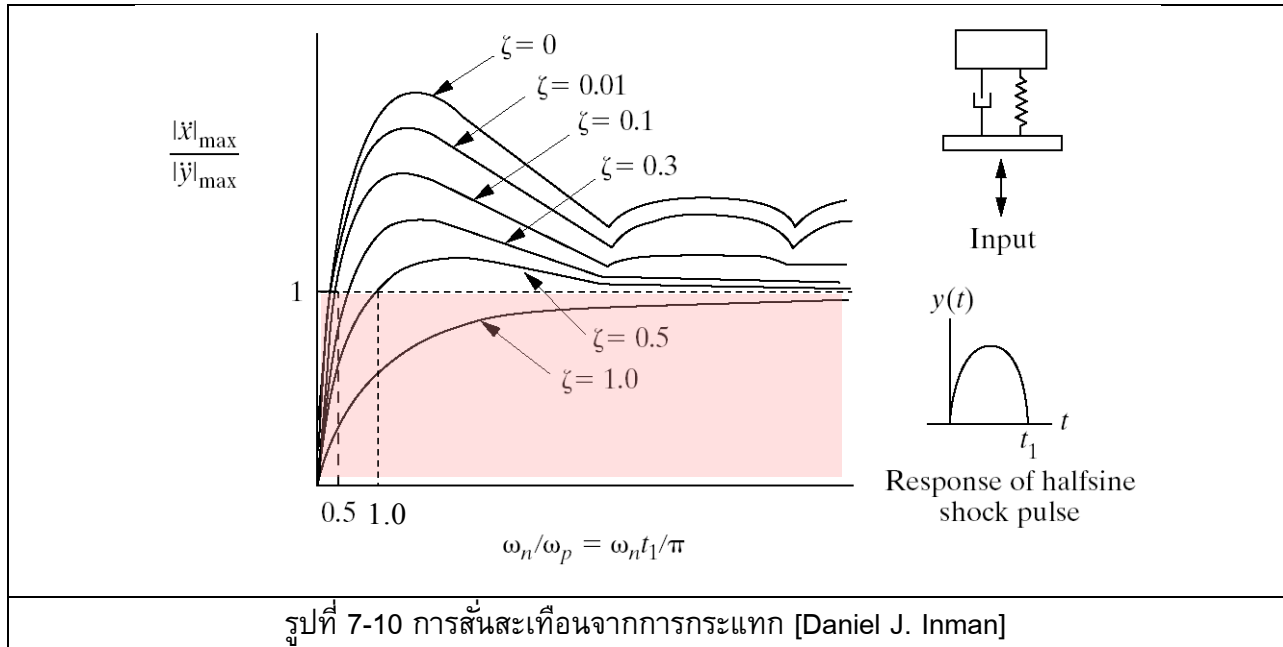
ANS

หมายเหตุ

หากต้องการปรับค่าออกแบบ ทำได้โดยกำหนดค่าอัตราส่วนความหน่วงใหม่ และคำนวณตามวิธีการข้างต้นซ้ำอีกครั้ง

4. Shock Isolator

แรงกระแทกหมายถึงแรงกระทำในช่วงเวลาสั้นๆ อาจเกิดเพียงเสี้ยวของวินาที เนื่องจากแรงกระแทกมักมีขนาดมาก หากไม่มีการออกแบบเพื่อรองรับแรงกระแทกแล้ว พลังงานจากการกระแทกจะส่งถ่ายไปยังเครื่องจักรและทำให้เกิดความเสียหายได้ ตัวอย่างของปัญหา เช่น ระบบรองรับของรถยนต์ ช่วยดูดซับแรงกระแทกที่เกิดขึ้น เมื่อรถยนต์ตกหลุม หรือชนเนินกระโดด เป็นต้น รูปที่ 7-10 แสดงแบบจำลองของการกระแทก ลักษณะฟังก์ชันการกระแทก และการตอบสนองเชิงความถี่ของระบบต่อการกระแทก

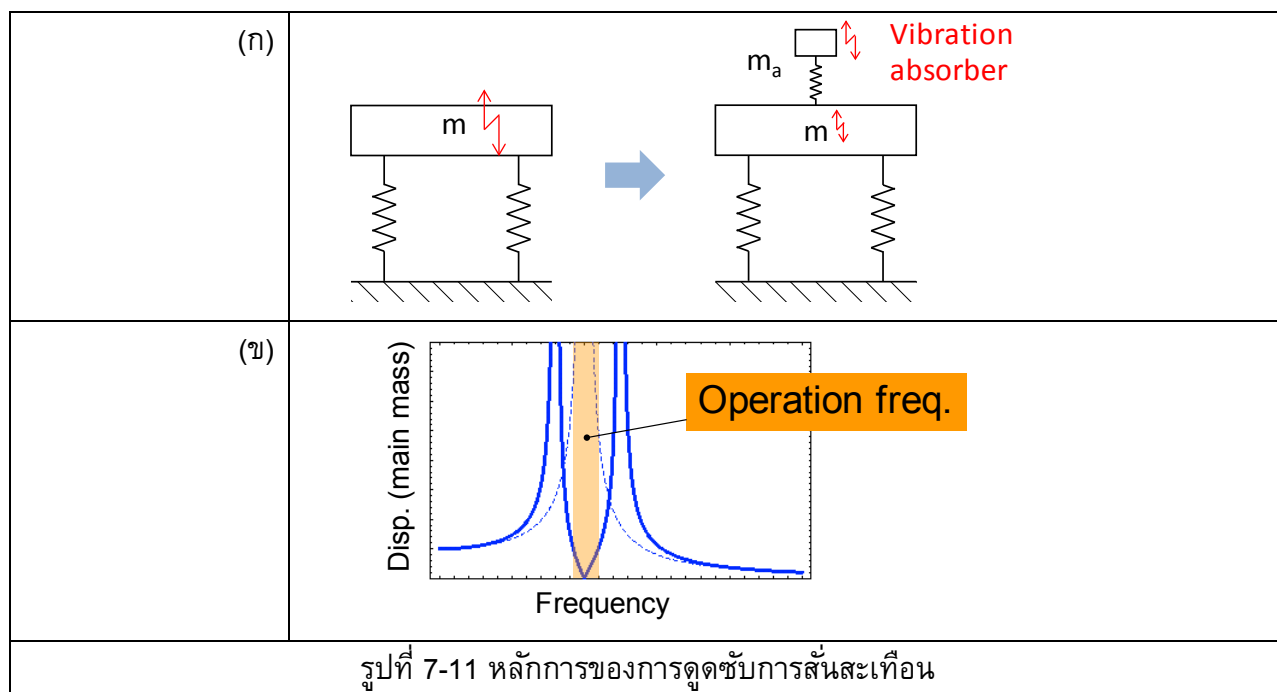


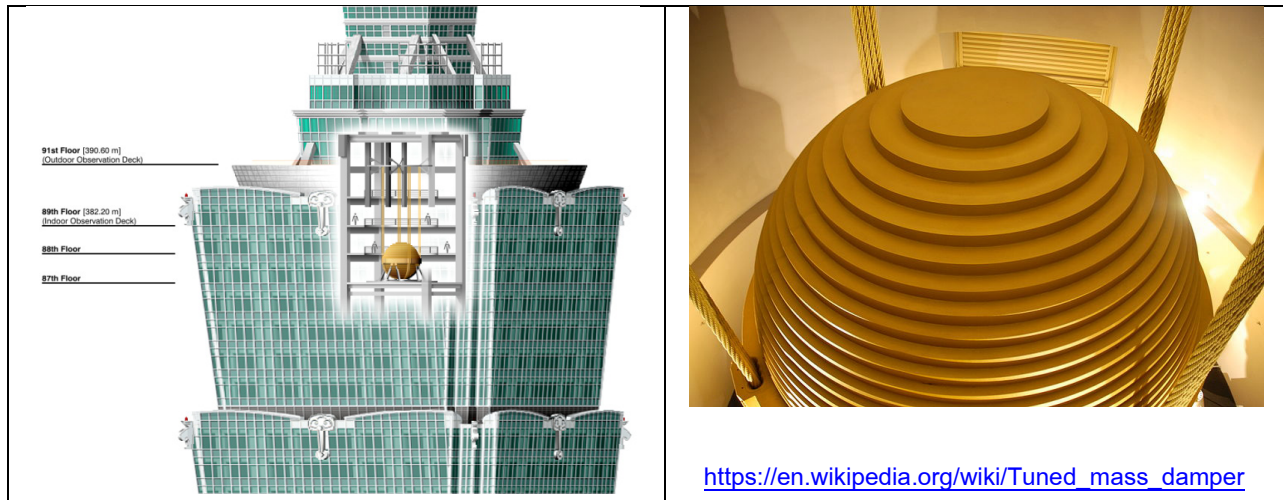
จากรูปที่ 7-10 ช่วงเวลา t_1 เป็นช่วงเวลาที่ให้มีแรงกระทำ ค่าในแกนแนวดิ่งแสดงถึงอัตราส่วนของความเร่งของมวลต่อความเร่งของแรงกระแทก พื้นที่ที่แรเงาในรูปเป็นส่วนที่อัตราส่วนความเร่งน้อยกว่า 1 ซึ่งหมายความว่ามวลมีความเร่งน้อยกว่าความเร่งของแรงกระแทก จะเห็นว่าผลของการกระแทกจะน้อยเมื่อความถี่ธรรมชาติของระบบต้องมีค่าน้อย การออกแบบ shock isolator จึงต้องออกแบบให้มีค่าความแข็งสปริงน้อย การเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความหน่วงมีผลอย่างมากต่อการลดลงของขนาดการสั่นสะเทือน ยิ่งมีความหน่วงมากขนาดการสั่นสะเทือนจากการกระแทกจะยิ่งน้อย

จะเห็นว่า การออกแบบ isolator ทั้งในกรณีที่แรงกระตุ้นเป็นคาบหรือเป็นแรงกระแทก ควรใช้ค่าความแข็งสปริงที่ไม่มากนักแต่ก็ต้องไม่น้อยไปจนทำให้ระบบไม่มีความแข็งแรง สำหรับค่าความหน่วงที่เหมาะสมนั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะแรงกระตุ้นว่าเป็นอย่างไร กรณีที่แรงกระตุ้นเป็นคาบ ค่าอัตราส่วนความหน่วงควรมีค่าน้อย แต่หากเป็นแรงกระแทก อัตราส่วนความหน่วงควรมีค่ามาก

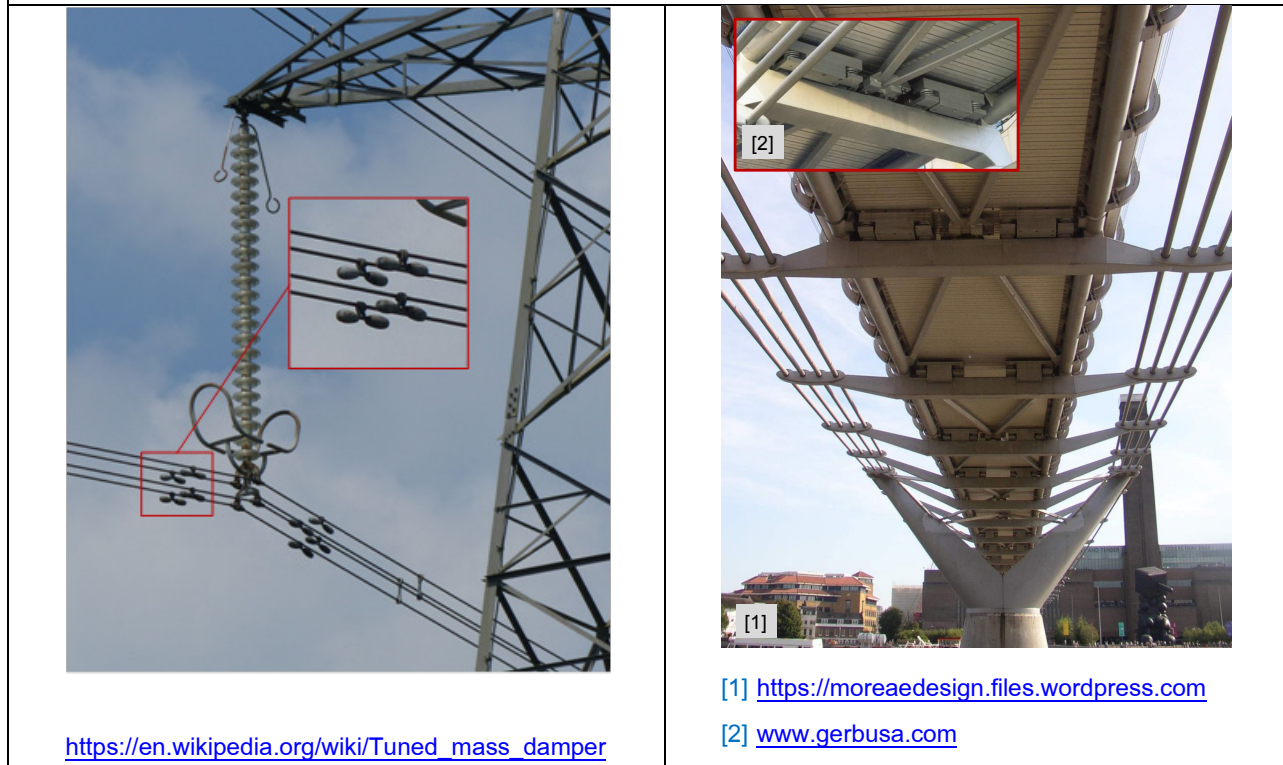
5. ตัวดูดซับการสั่นสะเทือน (Vibration absorber)

ในหัวข้อที่ผ่านมา การควบคุมการสั่นสะเทือนทำโดยการลดการส่งผ่านการสั่นสะเทือนทั้งจากแหล่งกำเนิดการสั่นสะเทือนไปยังส่วนอื่นๆ และการสั่นสะเทือนจากพื้นมายังเครื่องจักรที่สนใจ สำหรับการควบคุมการสั่นสะเทือนในหัวข้อนี้จะไม่ใช่การควบคุมการส่งผ่านการสั่นสะเทือน แต่จะเป็นการลดการสั่นสะเทือนของระบบหรือเครื่องจักรที่ต้องการโดยตรง ด้วยการเพิ่มอุปกรณ์ที่เรียกว่าตัวดูดซับการสั่นสะเทือนเข้าไปในระบบ หลักการของการดูดซับการสั่นสะเทือนอาจแสดงได้ดังรูปที่ 7-2(ค) และนำมาแสดงอีกครั้งในรูปที่ 7-11(ก) ในรูปด้านซ้ายมือ ระบบอย่างง่ายประกอบด้วยมวลและสปริง ระบบนี้เป็นระบบ 1-dof เมื่อมวลสั่นจะมีกราฟการตอบสนองเชิงความถี่ดังแสดงด้วยเส้นประในรูปที่ 7-11(ข) หากมวลหรือเครื่องจักรจำเป็นต้องทำงานในช่วงความถี่รอบหมุนที่ใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติ (ช่วงที่แรงเงาสีส้ม) การสั่นสะเทือนของมวลจะมีขนาดสูงมาก การควบคุมการสั่นทำโดยติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือน m_a เข้าในระบบ โดยยึดกับระบบด้วยสปริง ดังแสดงในรูปที่ 7-11(ก) ด้านขวามือ เมื่อติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือนเข้าไปแล้วระบบจะเปลี่ยนแปลงจาก 1-dof เป็น 2-dof ดังนั้นกราฟการตอบสนองเชิงความถี่จึงมีรูปร่างเปลี่ยนไป ดังแสดงด้วยเส้นทึบในรูปที่ 7-11(ข) โดยช่วงที่มีขนาดการสั่นมากมี 2 ช่วง ซึ่งเป็นช่วงที่ใกล้กับความถี่ธรรมชาติทั้ง 2 ค่าของระบบใหม่ หากเลือกใช้ขนาดมวลของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน และค่าความแข็งสปริงที่ติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือนที่เหมาะสม จะสามารถออกแบบให้ช่วงใช้งานเดิม (ช่วงแรงเงาสีส้ม) กลายเป็นช่วงที่มีขนาดการสั่นน้อยของระบบใหม่ได้ การใช้หลักการนี้จะเหมาะกับระบบที่ความถี่การทำงานไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก เนื่องจากช่วงที่ตัวดูดซับการสั่นสะเทือนใช้งานได้ไม่กว้างนัก การเปลี่ยนความถี่รอบการทำงานมากๆ อาจทำให้ช่วงทำงานไปตรงกับความถี่ธรรมชาติของระบบใหม่ได้





(ก)



(ข)

(ค)

รูปที่ 7-12 ตัวอย่างการใช้หลักการของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนในงานทางวิศวกรรม

รูปที่ 7-12 แสดงตัวอย่างการใช้หลักการของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนในงานทางวิศวกรรม รูปที่ 7-12(ก) เป็นการใส่ลูกตุ้มขนาดใหญ่เพื่อเป็นตัวดูดซับการสั่นสะเทือนในตึก Taipei 101 ประเทศไต้หวัน เมื่อเกิดการสั่นสะเทือนของตึกซึ่งอาจเกิดมาจากแรงลม หรือแผ่นดินไหว การแกว่งของลูกตุ้มจะช่วยลดการสั่น

ของตัวตุ๊กโดยรวมลงได้ รูปที่ 7-12(ข) แสดงตัวดูดซับการสั่นสะเทือนที่ใช้ในสายไฟฟ้าแรงสูง ซึ่งจะช่วยลดการสั่นของสายไฟเมื่อมีลมพายุ สำหรับรูปที่ 7-13(ค) แสดงมวลติดสปริงซึ่งติดอยู่ด้านล่างของสะพาน Millennium ในกรุงลอนดอน ประเทศอังกฤษ เพื่อดูดซับและควบคุมการสั่นสะเทือนแนวตั้งของสะพาน

5.1 วิธีการวิเคราะห์ปัญหา

พิจารณาระบบในรูปที่ 7-13 ซึ่งประกอบด้วยมวล m และสปริงความแข็ง k และถูกกระทำด้วยแรงภายนอกแบบฮาร์โมนิก เพื่อควบคุมการสั่นสะเทือนระบบนี้จึงติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือน m_a การเชื่อมต่อระหว่างมวลทั้งสองก้อนผ่านสปริงที่มีความแข็ง k_a การเคลื่อนที่ของมวล m แสดงด้วยระยะ x ส่วนการเคลื่อนที่ของมวล m_a แสดงด้วยระยะ x_a ระบบนี้เป็นระบบ 2-dof และสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7-11)$$

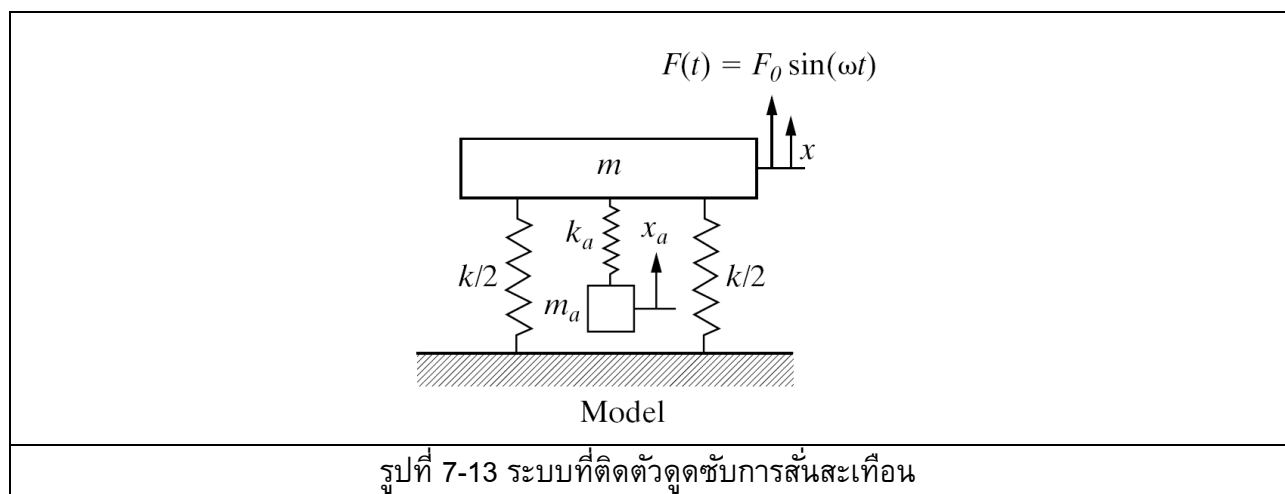
เนื่องจากการเคลื่อนที่เป็นแบบ Synchronous motion ซึ่งมวลทั้งสองก้อนจะสั่นด้วยความถี่เท่ากัน เท่ากับความถี่ของแรงกระตุ้น และจะผ่านจุดที่มีการขจัดสูงที่สุดหรือต่ำสุด และผ่านจุดสมดุลพร้อมๆ กัน ดังนั้นลักษณะการสั่นสะเทือนของมวลทั้งสองก้อนสามารถแสดงได้ด้วยสมการ

$$x(t) = X \sin \omega t \quad \text{และ} \quad x_a(t) = X_a \sin \omega t \quad (7-12)$$

แทนการเคลื่อนที่ x และ x_a ลงในสมการการเคลื่อนที่ (7-11) จะได้

$$\begin{bmatrix} k+k_a-m\omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a-m_a\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} \sin \omega t = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

$$\begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k+k_a-m\omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a-m_a\omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



รูปที่ 7-13 ระบบที่ติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือน

$$\begin{Bmatrix} X \\ X_a \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} k_a - m_a \omega^2 & k_a \\ k_a & k + k_a - m \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{Bmatrix} (k_a - m_a \omega^2) F_0 \\ k_a F_0 \end{Bmatrix} \quad (7-13)$$

โดย Δ คือ determinant ของเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} k + k_a - m \omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a - m_a \omega^2 \end{bmatrix}$

และมีค่าเท่ากับ $\Delta = (k + k_a - m \omega^2)(k_a - m_a \omega^2) - k_a^2$

จากสมการที่ (7-13) จะได้ขนาดการเคลื่อนที่ของมวล m และมวลของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน m_a ดังสมการ

$$X = \frac{(k_a - m_a \omega^2) F_0}{\Delta} \quad (7-14ก)$$

และ
$$X_a = \frac{k_a F_0}{\Delta} \quad (7-14ข)$$

จากสมการที่ (7-14) จะพบว่าสมการที่จะเลือกค่า m_a และ k_a ที่เหมาะสมเพื่อให้ขนาดการสั่นสะเทือนของมวล m เท่ากับศูนย์ได้ โดยขนาดการสั่นสะเทือนของมวล m จะเป็นศูนย์เมื่อ

$$\omega^2 = \frac{k_a}{m_a} \quad (7-15)$$

และเมื่อกำหนดค่า m_a และ k_a ให้มีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (7-15) จะได้ว่าการสั่นสะเทือนของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนดังสมการที่ (7-14) และ (7-12) จะมีค่าเท่ากับ

$$X_a = -\frac{F_0}{k_a} \quad \text{และ} \quad x_a(t) = -\frac{F_0}{k_a} \sin \omega t \quad (7-16)$$

และจะพบว่าแรงที่กระทำกับมวล m โดยมวล m_a จะมีค่าเท่ากับ

$$k_a X_a = k_a (-F_0 / k_a) = -F_0 \quad (7-17)$$

จากสมการ (7-17) จะเห็นว่าแรงที่มวล m_a กระทำกับมวล m จะมีค่าเท่ากับขนาดของแรงภายนอก F_0 พอดี ทำให้แรงลัพธ์ที่กระทำกับมวล m มีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดเวลา ดังนั้นมวล m จึงไม่มีการเคลื่อนที่ หรือ $X = 0$

เมื่อกำหนดให้ $\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}$ แสดงความถี่ธรรมชาติของระบบในตอนแรกที่ยังไม่ติดตัวดูดซับการสั่น

$\omega_a = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$ แสดงความถี่ธรรมชาติของตัวดูดซับการสั่น เมื่อยังไม่ได้ติดกับระบบ

$\mu = \frac{m_a}{m}$ แสดงอัตราส่วนมวล

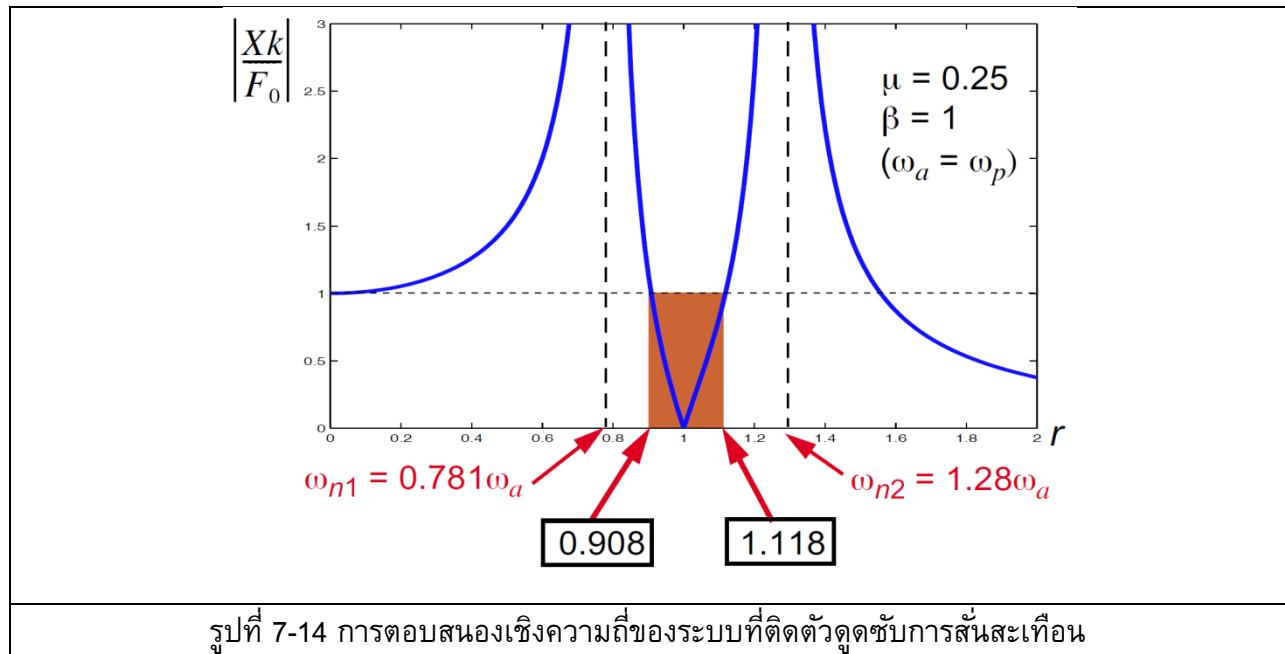
$\beta = \frac{\omega_a}{\omega_p}$ แสดงอัตราส่วนความถี่ธรรมชาติของตัวดูดซับการสั่นกับของระบบ

และ $r = \frac{\omega}{\omega_a}$ แสดงอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้นต่อความถี่ธรรมชาติของตัวดูดซับการสั่น

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการ (7.14ก) จะได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ของขนาดการสั่นสะท้อนของมวล m ของระบบ แบบไร้มิติดังสมการ

$$\left| \frac{Xk}{F_0} \right| = \left| \frac{1-r^2}{(1+\mu\beta^2-r^2)(1-r^2)-\mu\beta^2} \right| \quad (7-18)$$

รูปที่ 7-14 แสดงการตอบสนองเชิงความถี่ของมวล m ในระบบที่ติดตัวดูดซับการสั่นสะท้อนตามสมการ (7-18) โดยกำหนดให้ $\mu = 0.25$ และ $\beta = 1$ จะเห็นว่าช่วงที่ขนาดการสั่นสะท้อนเกิดน้อยกว่าระยะยุบตัวสถิตของระบบที่เกิดจากแรง F_0 จะแสดงในช่วงที่แรงเงาสีน้ำตาล ช่วงนี้เป็นช่วงทำงานของตัวดูดซับการสั่นสะท้อน ($0.908\omega_a \leq \omega \leq 1.118\omega_a$) โดยค่ามวลของตัวดูดซับการสั่น m_a และความแข็งสปริงที่ใช้ติดตัวดูดซับการสั่น k_a จะต้องเลือกเพื่อให้ช่วงการสั่น r ตกอยู่ในช่วงที่แรงเงา โดยต้องระวังไม่ให้ค่า r มีค่าเท่ากับหรือใกล้กับ 0.781 หรือ 1.28 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เกิดการสั่นพ้อง (resonance) ทำให้ระบบซึ่งติดตัวดูดซับการสั่นสะท้อนอย่างรุนแรงและเสียหายได้



5.2 ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนมวลกับความถี่ธรรมชาติของระบบ

เมื่อติดตัวดูดซับการสั่นสะท้อนเข้าไปในระบบ ระบบการสั่นสะท้อนจะกลายเป็นระบบ 2-dof โดยความถี่ธรรมชาติของระบบจะสามารถหาได้จากสมการ Characteristic equation (CHE) ดังสมการ

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (7-19)$$

หรือสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังสมการ

$$\begin{vmatrix} k + k_a - m\omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a - m_a\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

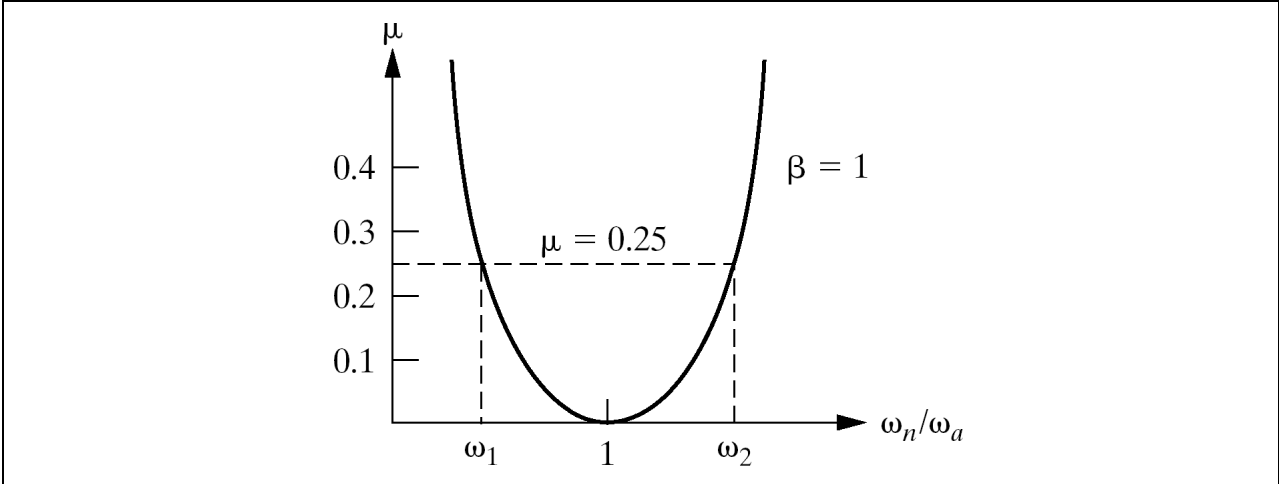
หรือ $(k + k_a - m\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - k_a^2 = 0$ (7-20)

โดยค่า ω ที่คำนวณได้จากสมการ (7-20) จะเป็นค่าความถี่ธรรมชาติ ω_n ของระบบที่ติดตัวดูดซับการสั่นสะเทือน

เมื่อแทนความสัมพันธ์ ω_p , ω_a , μ และ β ตามที่กำหนดข้างต้นลงในสมการ (7-20) และแทนค่า ω ในสมการ (7-20) ด้วย ω_n จะสามารถเขียนสมการ (7-20) ได้ดังสมการ

$$\beta^2 \left(\frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} \right)^2 - [1 + \beta^2(1 + \mu)] \left(\frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} \right) + 1 = 0$$
 (7-21)

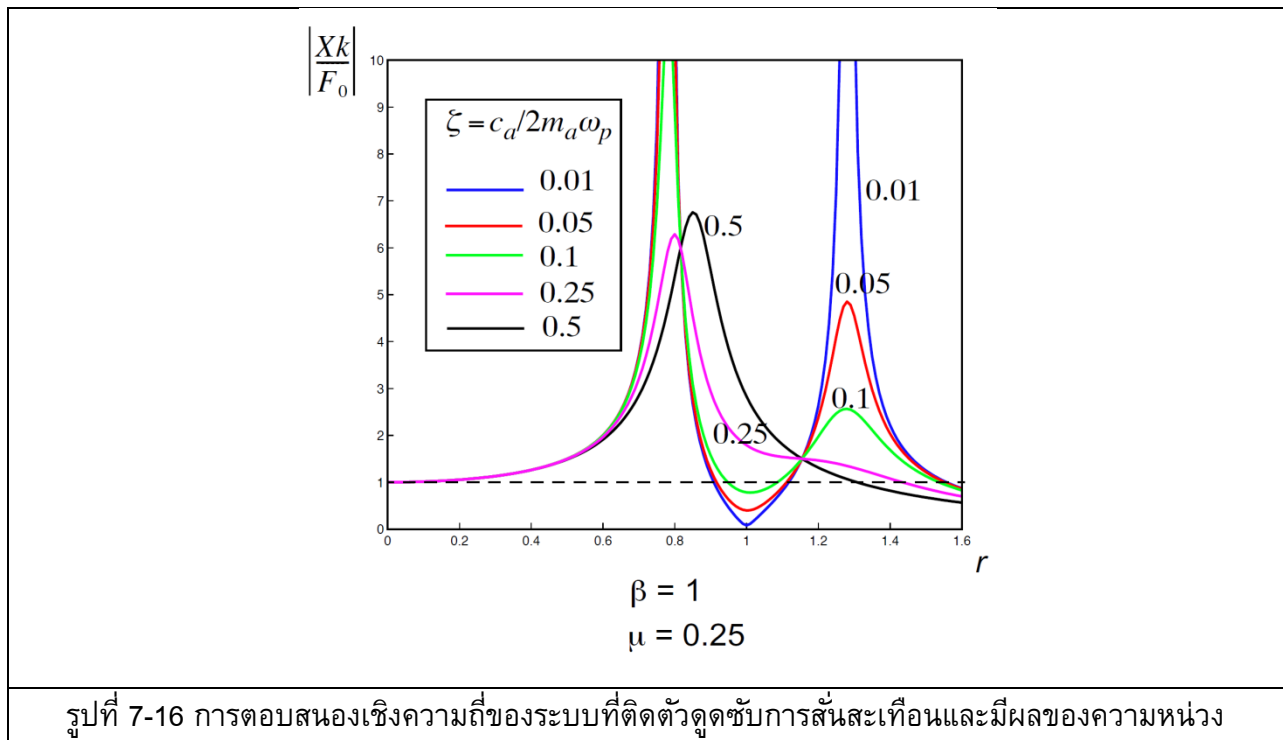
ความสัมพันธ์ตามสมการ (7-21) สามารถแสดงได้ดังกราฟในรูปที่ 7-15 โดยในรูปกำหนดให้ค่าอัตราส่วนความถี่ธรรมชาติ $\beta = 1$ หรือหมายความว่าตัวดูดซับการสั่นสะเทือนได้ถูกออกแบบให้มีความถี่ธรรมชาติ ω_a เท่ากับความถี่ธรรมชาติของระบบเดิมก่อนติดตัวดูดซับการสั่น ω_p ซึ่งจะทำให้ขนาดการสั่นสะเทือนของมวล m เมื่อทำงานที่ความถี่ธรรมชาติเดิม ($\omega = \omega_p$) มีค่าเท่ากับศูนย์ จากรูป 7-15 ยังพบว่าเมื่ออัตราส่วนของมวล μ เพิ่มขึ้น ช่วงห่างระหว่างความถี่ธรรมชาติ ω_1 และ ω_2 (ระยะระหว่างเส้นประ ในรูปที่ 7-14) มีค่ากว้างขึ้น ซึ่งจะส่งผลให้ช่วงการทำงานของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน (ช่วงที่แรงในรูปที่ 7-14) จะกว้างขึ้นเช่นกัน ถึงแม้ว่าการเพิ่มค่า μ หรือมวลของตัวดูดซับการสั่น m_a จะส่งผลที่ทำให้ช่วงการทำงานเพิ่มมากขึ้น แต่ถ้ามากเกินไปก็จะส่งผลต่อปัญหาความเค้น และความล้าของสปริงที่ยึดตัวดูดซับการสั่นได้เช่นกัน โดยปกติในการใช้งานจะเลือกใช้อัตราส่วนของมวลประมาณ 0.05 – 0.25



รูปที่ 7-15 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนมวล μ กับความถี่ธรรมชาติของระบบที่ติดตัวดูดซับการสั่น

5.3 ผลของตัวหน่วงการสั่นสะเทือนต่อตัวดูดซับการสั่น

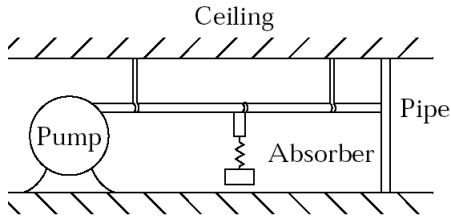
การวิเคราะห์ในหัวข้อที่ผ่านมา มาไม่ได้คำนึงถึงผลของตัวหน่วงการสั่นสะเทือน อย่างไรก็ตามในความเป็นจริง ถึงแม้ว่าจะติดตั้งตัวดูดซับการสั่นเข้ากับระบบด้วยสปริงเท่านั้น ก็ยังมีความหน่วงเกิดขึ้น ซึ่งอาจเกิดจากการเสียดสีพลังงานระหว่างการเสียดสีรูปของสปริงได้ รูปที่ 7-16 แสดงการตอบสนองเชิงความถี่ของระบบที่ติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือนและมีผลของความหน่วงร่วมอยู่ด้วย จะเห็นว่าเมื่อความหน่วงมีค่าเพิ่มมากขึ้น ขนาดการสั่นสะเทือนที่ความถี่ธรรมชาติจะต่ำลง อย่างไรก็ตามจะทำให้การสั่นสะเทือนที่จุดทำงานมีค่าสูงมากขึ้นด้วย สำหรับในระบบที่ยึดตัวดูดซับการสั่นด้วยสปริงเท่านั้น อัตราส่วนความหน่วงมักจะมีค่าน้อย ทำให้การคำนวณโดยประมาณให้ไม่มีผลของตัวหน่วงการสั่นสะเทือนมีความสมเหตุสมผล และช่วยลดความซับซ้อนในการคำนวณลงได้มาก



5.4 ขั้นตอนการออกแบบตัวดูดซับการสั่นสะเทือน

จากที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่ 5 สามารถสรุปขั้นตอนการออกแบบตัวดูดซับการสั่นสะเทือนได้เป็นขั้นๆ ดังนี้

1. เลือกความถี่การทำงาน ω ที่ต้องการปรับให้มีขนาดการสั่นสะเทือนเท่ากับศูนย์
2. ทราบความสัมพันธ์ของมวลของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน m_a และค่าความแข็งสปริง k_a จาก
$$\omega_a = \sqrt{k_a/m_a}$$
3. เลือกค่า m_a และ k_a โดยคำนึงถึงข้อจำกัดด้านแรง และระยะเคลื่อนที่ของตัวดูดซับการสั่นสะเทือน
4. ตรวจสอบอัตราส่วนของมวล $\mu = m_a/m$ โดยค่าที่แนะนำอยู่ระหว่าง 0.05 - 0.25



ตัวอย่าง 7-4 A pipe carrying steam through a section of a factory vibrates violently when the driving pump hits a speed of 232 rpm. In an attempt to design an absorber, a trial 1 kg absorber tuned to 232 rpm was attached. By changing the pump speed, it was found that the pipe-absorber system has a resonance at 198 rpm. Redesign the absorber so that the natural frequencies are less than 160 rpm and more than 320 rpm. [ดัดแปลงจาก William T. Thomson and Marie D. Dahleh, Prob.5-46]

เพื่อให้เข้าใจการแก้ปัญหาในตัวอย่างนี้จะแยกการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี ดังนี้

1. กรณีที่ยังไม่ได้ติดตั้งดูดซับการสั่นสะเทือน จึงพิจารณาได้ว่าเป็นระบบ 1-dof ในกรณีนี้ปั๊มสั่นมากที่ 232 rpm (ความถี่ธรรมชาติ ω_n เกิดที่ 232 rpm)
2. เมื่อทดลองติดตั้งดูดซับการสั่นขนาด 1 กก. และปรับให้การสั่นสะเทือนที่ 232 rpm มีค่าเท่ากับศูนย์ (tune ไปที่ 232 rpm) ในกรณีนี้ระบบจะเปลี่ยนเป็น 2-dof ดังนั้นพบว่าความถี่ธรรมชาติใหม่ของระบบจะเปลี่ยนไปจากเดิมที่เกิดที่ความถี่เดียว คือที่ 232 rpm เป็นเกิดที่ความถี่ 2 ความถี่ ซึ่งความถี่ธรรมชาติตัวหนึ่งของระบบ (ω_1) มีค่าเท่ากับ 198 rpm (อีกตัวหนึ่ง (ω_2) จะเกิดที่ความเร็วรอบสูงกว่า 232 rpm)
3. เป็นกรณีที่โจทย์ต้องการ คือจะเปลี่ยนตัวดูดซับการสั่นสะเทือนใหม่อย่างไร ความถี่ธรรมชาติจึงจะเปลี่ยนไปเป็นเกิดที่ความเร็วรอบน้อยกว่า 160 rpm (ω_1) และเกิดที่มากกว่า 320 rpm (ω_2)

กรณีที่ 1 จะได้ว่า $\omega_n = \omega_p = 2\pi(232/60) = 24.295 \text{ rad/s}$

กรณีที่ 2 จะได้ว่า $m_a = 1 \text{ kg}$ และเนื่องจาก tune ไปที่ 232 rpm แสดงว่า

$$\omega_a = \omega_p = 24.295 \text{ rad/s} \text{ และ } \beta = \omega_a / \omega_p = 1$$

เมื่อติดตั้งดูดซับ ระบบจะกลายเป็น 2-dof ซึ่ง $\omega_1 = 198 \text{ rpm}$ ดังนั้น $\frac{\omega_1^2}{\omega_a^2} = \frac{198^2}{232^2} = 0.7284$

แทนค่า $\beta = 1$ และ $\frac{\omega_1^2}{\omega_a^2} = 0.7284$ ลงในสมการ

$$\beta^2 \left(\frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} \right)^2 - [1 + \beta^2(1 + \mu)] \left(\frac{\omega_n^2}{\omega_a^2} \right) + 1 = 0 \quad (1)$$

จะได้ $1^2(0.7284)^2 - [1 + 1^2(1 + \mu)](0.7284) + 1 = 0$

ดังนั้นจะได้ $\mu = 0.1$ และจะสามารถหามวลเดิมของระบบได้จาก $\mu = m_a/M = 1/M = 0.1$
ดังนั้นจะได้ $M = 10 \text{ kg}$

กรณีที่ 3 ออกแบบตัวดูดซับใหม่ เพื่อให้ $\omega_1 \leq 160 \text{ rpm}$ และ $\omega_2 \geq 320 \text{ rpm}$
กำหนดให้ tune ไปที่ 232 rpm เช่นเดิม ดังนั้น $\beta = 1$

1. พิจารณาเมื่อให้ $\omega_1 = 160 \text{ rpm}$

$$\text{จะได้ } \frac{\omega_1^2}{\omega_a^2} = \frac{160^2}{232^2} = 0.4756 \text{ แทนในสมการ (1)}$$

$$1^2(0.4756)^2 - [1 + 1^2(1 + \mu)](0.4756) + 1 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } \mu = 0.5782$$

2. พิจารณาเมื่อให้ $\omega_1 = 320 \text{ rpm}$

$$\text{จะได้ } \frac{\omega_1^2}{\omega_a^2} = \frac{320^2}{232^2} = 1.9025 \text{ แทนในสมการ (1)}$$

$$1^2(1.9025)^2 - [1 + 1^2(1 + \mu)](1.9025) + 1 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } \mu = 0.4281$$

เนื่องจากค่าอัตราส่วนมวล μ ที่มากกว่าจะให้ช่วงใช้งานมากกว่า หรือ ω_1 กับ ω_2 ห่างกันมากกว่า ดังนั้นเลือก $\mu = 0.5782$ เพื่อให้ช่วงทำงาน $\omega_1 \leq 160 \text{ rpm}$ และ $\omega_2 \geq 320 \text{ rpm}$
เมื่อทราบอัตราส่วนมวล จะสามารถหามวลของตัวดูดซับการสั่นได้จาก

$$\mu = m_a/M = m_a/10 = 0.5782 \text{ ดังนั้น } m_a = 5.782 \text{ kg}$$

จาก $\omega_a = \omega_p = 24.295 \text{ rad/s}$ ดังนั้น $\omega_a = \sqrt{k_a/m_a} = \sqrt{k_a/5.782} = 24.295 \text{ rad/s}$

จะได้ $k_a = 341399 \text{ N/m}$

สรุปได้ว่า มวลของตัวดูดซับการสั่น $m_a = 5.782 \text{ kg}$ และความแข็งสปริง $k_a = 341399 \text{ N/m}$ ANS

Note ในตัวอย่างนี้เลือกอัตราส่วนมวล $\mu = 0.5782$ เพื่อให้ตอบสนองความต้องการในแง่ของช่วงการทำงาน แต่ค่าที่เลือกมากกว่าค่าที่แนะนำคือ 0.25 ซึ่งอาจจะส่งผลต่อปัญหาหาความแข็งแรงและความล้าของสปริงที่ยึดตัวดูดซับการสั่นได้

6. สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงวิธีการควบคุมการสั่นสะเทือน โดยแบ่งออกเป็น 1) การควบคุมการส่งผ่านการสั่นสะเทือน และ 2) การลดการสั่นสะเทือนของเครื่องจักรที่สนใจ โดยติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือนสำหรับการควบคุมการส่งผ่าน สามารถแบ่งออกเป็นกรณีต่างๆ ได้แก่การควบคุมการส่งผ่านการสั่นจากพื้นไปยังเครื่องจักรที่สนใจ การส่งผ่านจากเครื่องจักรต้นเหตุการสั่นสะเทือนไปยังพื้น และการควบคุมการสั่นสะเทือนจากการกระแทก หลักการของการควบคุมการส่งผ่านจะเป็นการเลือกค่าความแข็งสปริง และตัวหน่วงการสั่นสะเทือนที่เหมาะสม เพื่อควบคุมให้การส่งผ่านการจัดและแรงมีค่าที่น้อยลงกว่าขนาดของการกระตุ้น ส่วนหลักการของการลดการสั่นสะเทือนโดยติดตั้งตัวดูดซับการสั่นสะเทือนจะเป็นการเปลี่ยนแปลงระบบจาก 1-dof ไปเป็น 2-dof โดยเพิ่มมวลของตัวดูดซับการสั่นสะเทือนเข้าไปในระบบ ทำให้ความถี่ที่เคยมีการสั่นสะเทือนมาก มีการสั่นสะเทือนลดลงหรืออาจไม่มีการสั่นสะเทือนเลย การควบคุมการสั่นสะเทือนในวิธีนี้ทำโดยเลือกขนาดมวลของตัวดูดซับการสั่น และค่าความแข็งสปริงที่จะใช้ติดตั้งตัวดูดซับที่เหมาะสมตามความสัมพันธ์ที่ได้แสดงไว้ นอกจากนี้ขนาดมวลของดูดซับก็ไม่ควรจะมีมากเกินไปนักเพื่อลดปัญหาเกี่ยวกับความล้าและความแข็งแรงของวัสดุ