Wilcoxon Signed Ranks test

<u>ใช้เมื่อไร?</u>

- 2 correlated group design
- ตัวอย่างถูกเลือกมาจากประชากร แล้วทดลองเปรียบเทียบ
    1. Before/Method 1
    2. After/Method 2

<u>สมมุติฐาน</u>

Ho: ค่า *Median* ของผลต่างแต่ละคู่ ไม่แตกต่างจาก 0

H1: ค่า *Median* ของผลต่างแต่ละคู่ แตกต่างจาก 0

<u>Contrary to paired t-test</u>

Ho: ค่า Mean ของผลต่างแต่ละคู่ ไม่แตกต่างจาก 0

H1: ค่า Mean ของผลต่างแต่ละคู่ แตกต่างจาก 0

Wilcoxon Signed Ranks test

<u>ขั้นตอน</u>

1. หาค่าผลต่าง (difference) ของแต่ละคู่
2. เรียงลำดับของค่าผลต่างโดยไม่ต้องคำนึงว่าจะเป็นค่า + หรือ - แล้วให้ Rank
3. แล้วกำหนด + หรือ – ให้กับ Rank ตามค่าผลต่าง
4. หาผลรวมของ rank ที่เป็น + (T_+) และ – (T_-)
5. ค่า $T_{obt} = \min(T_+, T_-)$
6. หาก $T_{obt} \leq T_{crit} \Rightarrow$ reject H_o

- If N > 25, then use T_{min} to estimate z *(one-tail)* for testing hypothesis
  - Note: some may say that N as few as 8 can be used this estimation

$$z = \frac{\left|T_{\min}\right| - \dfrac{N(N+1)}{4}}{\sqrt{\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{24} - \dfrac{1}{48}\sum_i t_i^3 - t_i}}$$

where

- $T_{min} = \min(T_+, T_-)$
- N : number of all pair differences not equal to 0; may be the same as or less than that of observations
- t_i : number of pair differences with the same rank *i* , i.e. tied ranks; summation of all groups of tied ranks is necessary

Example

H_o: The median difference of polybrominated biphenyl (PBB) in contaminated raw meat between pairs is equal to 0

H_1: The median difference of polybrominated biphenyl (PBB) in contaminated raw meat between pairs is not equal to 0

Sample	Raw	Cooked	difference	|difference|	Rank	Sign	Rank+	Rank-
1	0.19	0.15	-0.04	0.04	4	-		**-4**
2	0.20	0.10	-0.10	0.10	8	-		**-8**
3	0.01	0.02	0.01	0.01	1	+	**1**	
4	0.16	0.18	0.02	0.02	2	+	**2**	
5	0.15	0.10	-0.05	0.05	5	-		**-5**
6	0.27	0.04	-0.23	0.23	9	-		**-9**
7	0.08	0.01	-0.07	0.07	6	-		**-6**
8	0.23	0.15	-0.08	0.08	7	-		**-7**
9	0.07	0.04	-0.03	0.03	3	-		**-3**
10	0.10	0.10	0					

Median difference = -0.05, T_{obt}=3

$T_{crit,\ 2\text{-tailed},\ \alpha=0.05,\ N=9} = 5$

$z = -2.31$; $P_{2\text{-tailed}} = 0.02$

$T_+=3$ $T_-=-42$

Conclusion: Because of $T_{obt}<T_{crit}$, Reject Ho and accept H1; thus, cooking does decrease PBB level in contaminated meat

Kruskal-Wallis test, *k* samples

ใช้เมื่อไร?

- *k* independent group design, $k \geq 2$
- เมื่อข้อมูลมีการกระจายไม่เป็นแบบปกติ
- หากความแปรปรวนของแต่ละกลุ่มตัวอย่างไม่เท่ากัน ให้ใช้ Welch’s Test

สมมุติฐาน

Ho: ค่าเฉลี่ยของ Rank ในกลุ่มตัวอย่าง *k* กลุ่ม ไม่แตกต่างกัน

H1: ค่าเฉลี่ยของ Rankในกลุ่มตัวอย่าง *k* กลุ่ม แตกต่างกัน

Kruskal-Wallis test, *k* samples

ขั้นตอน

1. นำค่าข้อมูลทั้งหมดมาเรียงลำดับ แล้วให้ Rank จาก 1 ถึง N เมื่อ N=จำนวนค่าทั้งหมด
2. หาผลรวมของ rank ในแต่ละกลุ่ม
3. คำนวนค่า H_{obt} จากสมการ
4. เมื่อจำนวนค่าข้อมูลในแต่ละกลุ่มเท่ากับหรือมากกว่า 5 แล้ว ค่า H_{obt} จะมีการแจกแจงใกล้เคียงกับค่า χ^2 ที่ df=k-1
5. หาก $H_{obt} > H_{crit} \Rightarrow$ reject H_o

$$H_{obt} = \left[\frac{12}{N(N+1)}\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{(R_i)^2}{n_i}\right] - 3(N+1)$$

k = จำนวนกลุ่ม

n_i = จำนวนค่าสังเกตของกลุ่ม *i*

R_i = ผลรวมของ rank ของค่าสังเกตในกลุ่ม *i*

N = จำนวนค่าข้อมูลทั้งหมด

หากมี tied rank แล้ว ให้หา H′ แทน ด้วย

$$H' = \frac{H_{obt}}{T} = \frac{H_{obt}}{1 - \frac{1}{N^3 - N}\sum_i (t_i^3 - t_i)}$$

t_i คือ จำนวนค่าสังเกตที่มี rank เป็น *i* เดียวกัน และต้องรวมค่าทุก tied rank

Example Does hemodialysis have effect on the size of the liver?

H_o: Mean ranks of liver sizes in three groups are the same

H_1: Mean ranks of liver sizes in three groups are NOT the same

Control	nondialyzed patient	dialyzed patient
206.90	194.60	288.00
150.00	145.60	269.20
197.30	174.90	288.30
173.20	187.50	357.50
147.20	223.40	229.20
143.80	143.00	249.00
192.60	170.00	346.10
		216.60
		202.60
		213.50

Ranking

Group	2	1	2	1	1	2	1	2	2
Scores	143.00	143.80	145.60	147.20	150.00	170.00	173.20	174.90	187.50
Rank	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Group	1	2	1	3	1	3	3	2	3
Scores	192.60	194.60	197.30	202.60	206.90	213.50	216.60	223.40	229.20
Rank	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Group	3	3	3	3	3	3
Scores	249.00	269.20	288.00	288.30	346.10	357.50
Rank	19	20	21	22	23	24

$k = 3$

$N = 24$

$n_1 = 7$

$R_1 = 54$

$n_2 = 7$

$R_2 = 55$

$n_3 = 10$

$R_3 = 191$

$$H_{obt} = \left[\frac{12}{N(N+1)}\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{(R_i)^2}{n_i}\right] - 3(N+1)$$

$$= \left[\frac{12}{24(24+1)}\right]\left[\frac{54^2}{7}+\frac{55^2}{7}+\frac{191^2}{10}\right] - 3(24+1)$$

$$= 14.94$$

$$df = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$H_{crit,\ \alpha=0.05,\ df=2} = \chi^2_{\alpha=0.05,\ df=2} = 5.991$

P = chisq.dist.rt(14.94,2) = 0.0005

$H_{obt} > H_{crit}$, reject H_o, that is, difference in liver size does exist among three populations

Which group has the largest size of liver?

Control (1)	nondialyzed patient (2)	dialyzed patient (3)
206.90	194.60	288.00
150.00	145.60	269.20
197.30	174.90	288.30
173.20	187.50	357.50
147.20	223.40	229.20
143.80	143.00	249.00
192.60	170.00	346.10
		216.60
		202.60
		213.50

$$\bar{R}_1 = \frac{54}{7} = 7.71$$

$$\bar{R}_2 = \frac{55}{7} = 7.86$$

$$\bar{R}_3 = \frac{191}{10} = 19.10$$

Which group has the largest size of liver? Post hoc test using Dunn procedure

ในการเปรียบเทียบของกลุ่มที่ *i* กับกลุ่มที่ *j* (ที่มีจำนวนค่าข้อมูลดิบเป็น n_i กับ n_j ตามลำดับ) ทำดังนี้

1. หาคะแนนมาตรฐานของกลุ่ม i และ j จาก

$$z_{ij} = \frac{\bar{R}_i - \bar{R}_j}{\sqrt{\frac{N(N+1)}{12} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

หรือหากมี tied rank ให้หาจาก

$$z_{ij} = \frac{\bar{R}_i - \bar{R}_j}{\sqrt{\left(\frac{N(N+1)}{12} - \frac{\sum_i (t_i^3 - t_i)}{12(N-1)}\right) \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

เมื่อ *N* เป็นจำนวนข้อมูลดิบทั้งหมด

และ $\bar{R}_{.}$ คือ ค่าเฉลี่ยของ rank

Which group has the largest size of liver? Post hoc test using Dunn procedure

2. ในกรณีทดสอบแบบ 2-tailed ที่ระดับ α
   หาก $|z| > z_{1-\alpha^*/_2}$ แล้ว **ปฏิเสธ** Ho: $\bar{R}_i = \bar{R}_j$
   หาก $|z| \le z_{1-\alpha^*/_2}$ แล้ว *ยอมรับ* Ho: $\bar{R}_i = \bar{R}_j$
   - เมื่อเปรียบเทียบค่ากลุ่มหนึ่งกับกลุ่มอื่น ๆ ทุกกลุ่ม ใช้ $\alpha^* = \frac{\alpha}{k(k-1)/_2}$ และ *k* คือจำนวนกลุ่ม
   - เมื่อเปรียบเทียบค่ากลุ่มอ้างอิงหรือ control กับกลุ่มอื่น ๆ ทุกกลุ่ม ใช้ $\alpha^* = \frac{\alpha}{k-1}$ และ *k* คือจำนวนกลุ่ม
   - Example: k=4

i	ii
	iii
	iv
ii	i
	iii
	iv
iii	i
	ii
	iv
iv	i
	ii
	iii

=k(k-1)
=4*3
=12

i	ii
	iii
	iv
ii	iii
	iv
iii	iv

=k(k-1)/2
=4*3/2
=6

i	ii
	iii
	iv

=k-1
=4-1
=3

Which group has the largest size of liver?

Control (1)	nondialyzed patient (2)	dialyzed patient (3)
206.90	194.60	288.00
150.00	145.60	269.20
197.30	174.90	288.30
173.20	187.50	357.50
147.20	223.40	229.20
143.80	143.00	249.00
192.60	170.00	346.10
		216.60
		202.60
		213.50

$$\bar{R}_1 = \frac{54}{7} = 7.71$$

$$\bar{R}_2 = \frac{55}{7} = 7.86$$

$$\bar{R}_3 = \frac{191}{10} = 19.10$$

α	=	0.05
α^*	=	$\alpha/3$
α^*	=	0.00833
$1-\alpha^*/2$	=	0.99584
$z_{1-\alpha^*/2}$	=	2.63839

$\lvert z_{12}\rvert$ =	0.03780	
$\lvert z_{13}\rvert$ =	3.26738	*
$\lvert z_{23}\rvert$ =	3.22639	*

Something's different but results are the same

Mann-Whitney U test

Ranks

	Marker class	N	Mean Rank	Sum of Ranks
F_st value	DNA	6	10.08	60.50
	Protein	14	10.68	149.50
	Total	20		

Test Statistics[b]

	F_st value
Mann-Whitney U	39.500
Wilcoxon W	60.500
Z	-0.206
Asymp. Sig. (2-tailed)	0.837
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	0.841[a]

Kruskal-Wallis test

Ranks

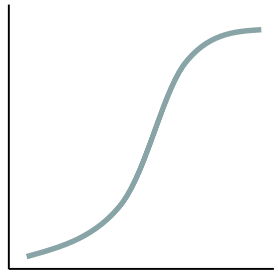
	Marker class	N	Mean Rank
F_st value	DNA	6	10.08
	Protein	14	10.68
	Total	20	

Test Statistics[a,b]

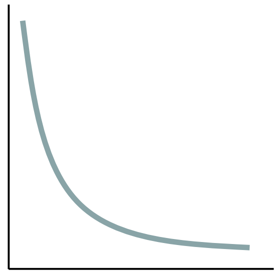
	F_st value
Chi-Square	0.043
df	1
Asymp. Sig.	0.837
Exact Sig.	0.857
Point Probability	0.033

Spearman's Rank Correlation Coefficient

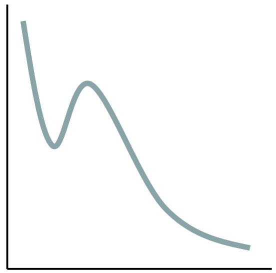
- When to use
  - Finding bivariate correlation for ordinal or ranked variables, or for data with uncertainty about normality
  - Detecting monotonic correlation between variables
- A monotonic function is one that either never increases or never decreases as its independent variable increases. The following graphs illustrate monotonic functions:



Monotonically increase – as *x* increases, *y* never decreases



Monotonically decrease – as *x* increases, *y* never increases



Non-monotonic – as *x* increases, *y* sometimes decreases and sometimes increases

Spearman's Rank Correlation Coefficient

<u>ขั้นตอน</u>

1. พิจารณาข้อมูลแต่ละคู่ (x_i, y_i) ให้เรียงลำดับข้อมูลตัวแปร X จากน้อยไปมากและให้ Rank
2. จากนั้น ทำเช่นเดียวกับตัวแปร Y **<u>ทั้งนี้ห้ามแยกค่าสังเกตที่เป็นคู่กัน</u>**
3. หาค่า Σr_{x_i} Σr_{y_i} $\Sigma r_{x\_i} r_{y\_i}$ $\Sigma r^2_{x\_i}$ และ $r^2_{y\_i}$
   - หากไม่ Tied rank อาจใช้ค่า Σd^2 แทนได้
4. คำนวณค่า r_s แล้วแปลงเป็นค่า t โดยมี df=n-2 ทดสอบสมมุติฐาน
5. ถ้า $t_{obt} \geq t_{crit} \Rightarrow$ reject Ho

Spearman's rank correlation coefficient, r_s

$$r_s = \frac{n\sum r_{x_i} r_{y_i} - \sum r_{x_i} \sum r_{y_i}}{\sqrt{[n\sum r_{x_i}^2 - \left(\sum r_{x_i}\right)^2][n\sum r_{y_i}^2 - \left(\sum r_{y_i}\right)^2]}}$$

n=# paired ranks
r_{x_i}=ranks of x_i variables
r_{y_i}=ranks of y_i variables
Σr_{x_i}=sum of ranks of x variable
Σr_{x_i}=sum of ranks of x variable

Spearman's rank correlation coefficient, r_s

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n^3 - n}$$

- เมื่อ d คือผลต่างของ rank ของข้อมูลดิบแต่ละคู่ หรือ $d_i = r_{x_i} - r_{y_i}$
  เมื่อ r_{x_i}= Rank of x_i และ r_{y_i}= Rank of y_i
- n คือ จำนวนข้อมูลดิบ (คู่)
- ใช้เมื่อ Rank ของข้อมูลในตัวแปรทั้งสอง ไม่มี tie

Approximation of t for testing r_s

$$t = \frac{r_s}{\sqrt{(1 - r_s^{\,2}) / (n - 2)}}$$

df = n-2
where n=# paired ranks

Value of r_s	Interpretation
r= 0	The two variables do not vary together at all
0 > r > 1	The two variables tend to increase or decrease together
r = 1.0	Perfect correlation
-1 > r > 0	One variable increases as the other decreases
r = -1.0	Perfect negative or inverse correlation

Melfi and Poyser (2007) observed the behavior of 6 male colobus monkeys (*Colobus guereza*) in a zoo and number od eggs of *Trichuris* nematodes per gram of monkey feces. They wanted to know whether social dominance was associated with the number of nematode eggs.

Ho : social dominance and the number of nematode eggs are NOT associated
H1 : social dominance and the number of nematode eggs are associated

Monkey name	Dominance rank, *x*	Eggs per gram	Rank of Eggs per gram, *y*
Erroll	1	5777	1
Milo	2	4225	2
Fraiser	3	2674	3
Fergus	4	1249	4
Kabul	5	749	6
Hope	6	870	5

$$\sum x = 21, \sum x^2 = 91$$

$$\sum y = 21, \sum y^2 = 91 \sum xy = 90$$

$$r_s = \frac{6 \times 90 - 21 \times 21}{\sqrt{(6 \times 91 - 21^2) \times (6 \times 91 - 21^2)}}$$

$$r_s = 0.943$$

$$t_{cal} = \frac{0.943}{\sqrt{(1 - 0.943^2)/(6-2)}} = 5.659$$

$$df = 6 - 2 = 4$$

$$P_{2-tailed} = t.dist.2t(0.5659, 4) = 0.005$$

$$t_{crit,2-tailed,\propto=0.05} = 2.776$$

$T_{cal} > T_{crit}$ [or $P << 0.05$] ➔ reject Ho and accept H1, *that is social dominance and the number of nematode eggs are statistically associated*

From -- http://www.biostathandbook.com/spearman.html

Ho: No correlation between nicotine in blood and nicotine in cigar

H1: There is correlation between them

Nicotine in blood (nmol/L)	**Nicotine in cigar (mg)**	r_x	r_y	d	d^2	r^2_x	r^2_y	$r_x{*}r_y$
196.5	0.76							
192.8	0.84							
197.3	0.96							
199.1	1.11							
207.4	1.14							
204.2	1.21							
183.0	1.28							
185.7	1.51							
234.1	1.53							
199.9	1.66							
sum								

	r_x	r_y	d	d^2	r^2_x	r^2_y	$r_x{*}r_y$
sum	55	55		120	385	385	325

$$r_s = \frac{n\sum r_{x_i} r_{y_i} - \sum r_{x_i} \sum r_{y_i}}{\sqrt{[n\sum r_{x_i}^2 - \left(\sum r_{x_i}\right)^2][n\sum r_{y_i}^2 - \left(\sum r_{y_i}\right)^2]}}$$

$$r_s = \frac{(10\times 325) - (55\times 55)}{\sqrt{[(10\times 385) - 55^2][(10\times 385) - 55^2]}}$$

$$r_s = \frac{255}{825} = 0.2727$$

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n^3 - n}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\times 120}{10^3 - 10} = 1 - \frac{720}{990} = 0.2727$$

Hypothesis testing

$$t = \frac{r_s}{\sqrt{(1 - r_s^2)/(n-2)}}$$

$$t = \frac{0.2727}{\sqrt{(1 - 0.2727^2)/(10-2)}}$$

$$t = \frac{0.2727}{0.3402} = 0.8018$$

$t_{cal} = 0.801$

df=8

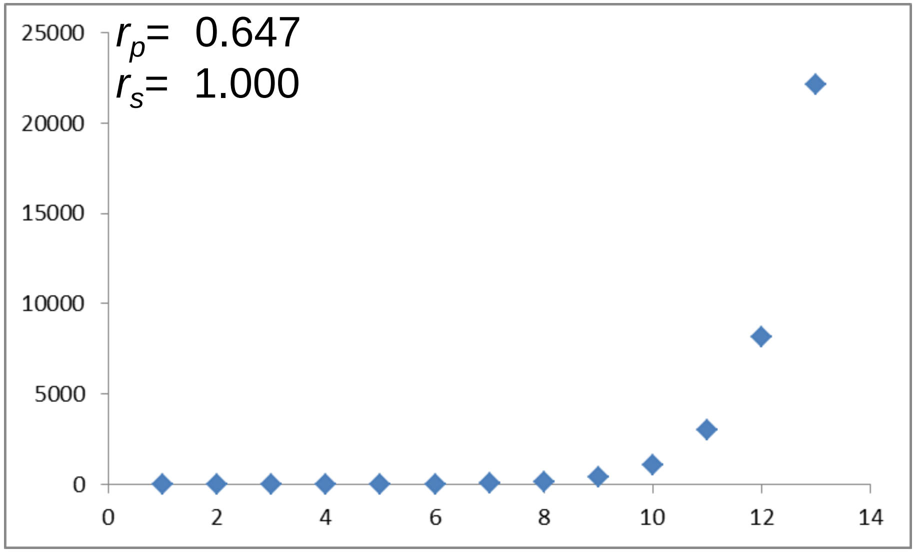
P = t.dist.2t(0.801,8)=0.94

$T_{crit,\ 2\text{-tailed},\ \alpha=0.05} = 2.306$

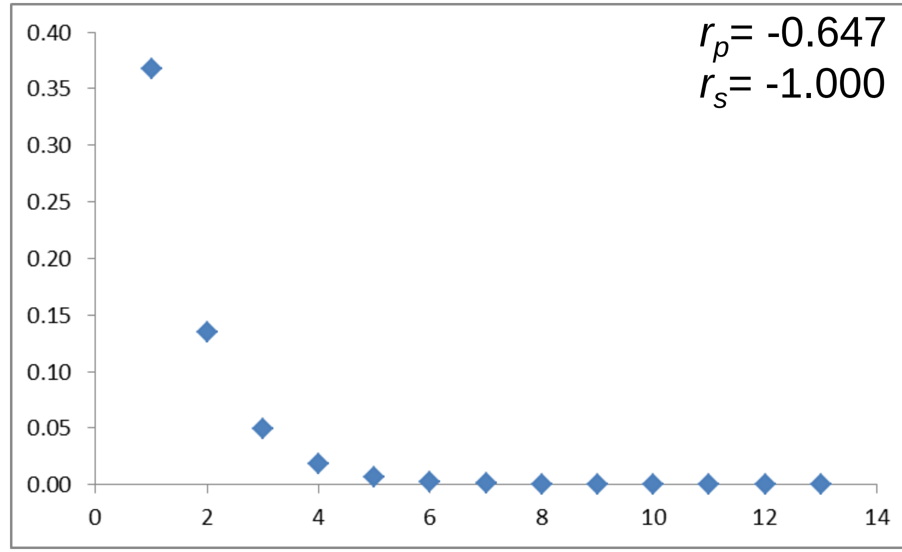
$t_{cal} < t_{crit}$ ⇨ Retain H_0, *that is there is no statistically correlation between nicotine in blood and nicotine in cigar*

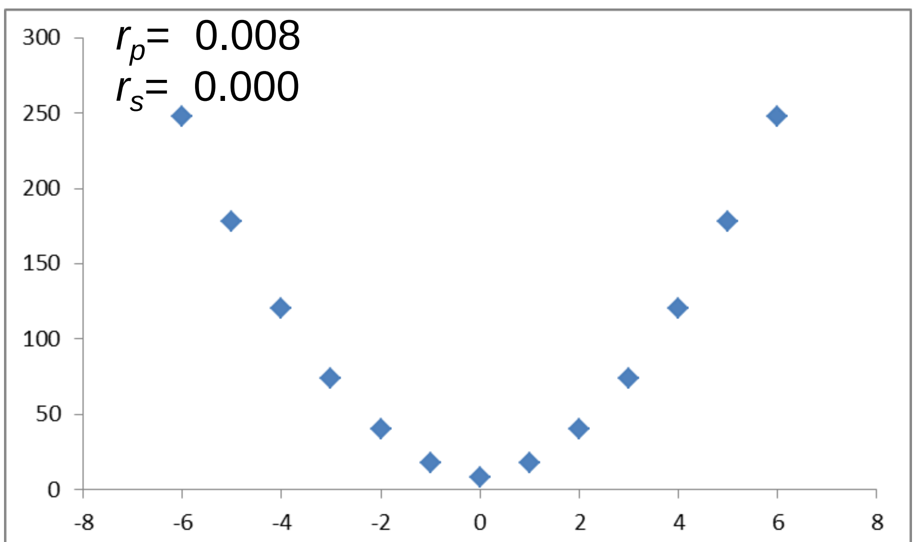
Pearson, r_p, vs Spearman rank, r_s, correlation coefficients

Perfect positive monotonic relationship

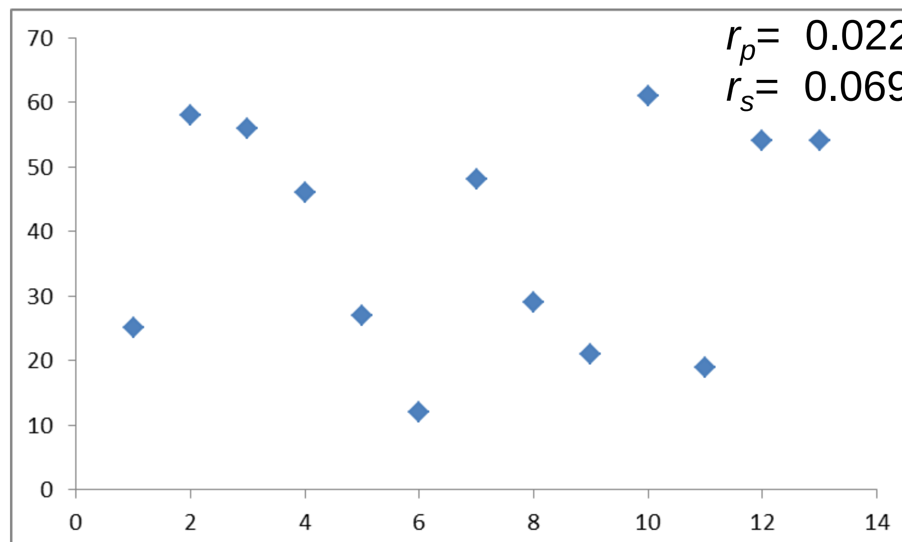


Perfect negative monotonic relationship





NO monotonic relationship, but perfect quadratic relationship



NO relationship

Tie or Equal Rank: WSR test (and similar tests)

A. หากพบว่าข้อมูลดิบคู่ใดมีค่าเดียวกัน **<u>ไม่ต้องนำข้อมูลดิบคู่นั้นไปวิเคราะห์</u>**

B. หาก<u>*ค่าผลต่าง (x-y)*</u> อย่างน้อย 2 ค่า มีค่าเท่ากัน ให้หาค่าเฉลี่ย Rank ของผลต่างที่มีค่าเท่ากัน แล้วจึงใช้ค่าเฉลี่ย Rank ในการกำหนด Rank ของผลต่างนั้น ๆ

X	**Y**	**x-y**	**$R_{\|x-y\|}$**	**$R_{(x-y)}$ (final)**	
15	17	-2	3	-2.5	← B
10	10	0	N/A	N/A	← A
9	10	-1	1	-1	
5	7	-2	2	-2.5	← B

Tie or Equal Rank: Kruskal-Wallis test (and similar tests)

- เมื่อเรียงลำดับข้อมูลดิบแล้วพบว่าข้อมูลดิบ 2 ค่าหรือมากกว่า เป็นค่าเดียวกัน
- Rank ของข้อมูลดิบ 2 ค่าหรือมากกว่า มีค่าเดียวกัน
- Example
  - ให้เรียงข้อมูลตามเดิม เช่น 199 201 201 203
  - ในการกำหนด Rank นั้น ขั้นแรกกำหนดเรียงจากน้อยไปมาก ในตัวอย่างข้างต้น คือ 1 2 3 4
  - จากนั้น ให้เฉลี่ยค่า Rank ของข้อมูลดิบที่มีค่าเดียวกัน ในตัวอย่าง คือข้อมูลดิบ 201 ซึ่งมี 2 ค่า และมี Rank เป็น 2 และ 3 จึงหาค่าเฉลี่ยได้ (2+3)/2= 2.5
  - กำหนด Rank ใหม่เป็น 1 2.5 2.5 4

Tie or *Equal Rank:* Spearman Rank Correlation Coefficient (and similar tests)

A. หากว่า*ค่าข้อมูลดิบในตัวแปรเดียวกัน*อย่างน้อย 2 ค่า มีค่าเท่ากัน ให้หาค่าเฉลี่ย Rank ของข้อมูลที่มีค่าเท่ากัน แล้วจึงใช้ค่าเฉลี่ย Rank ในการกำหนด Rank ของข้อมูลนั้น ๆ

B. หากว่า Rank ที่กำหนดในตัวแปร X และตัวแปร Y เป็น Rank เดียวกัน ***ไม่นับว่าเป็น tie* และไม่ต้องตัดออกจากการวิเคราะห์**

X	Y	R_x	R_y	R_y (final)	
15	17	4	4	4	← B
10	10	3	3	2.5	← A
9	10	2	2	2.5	← A
5	7	1	1	1	← B