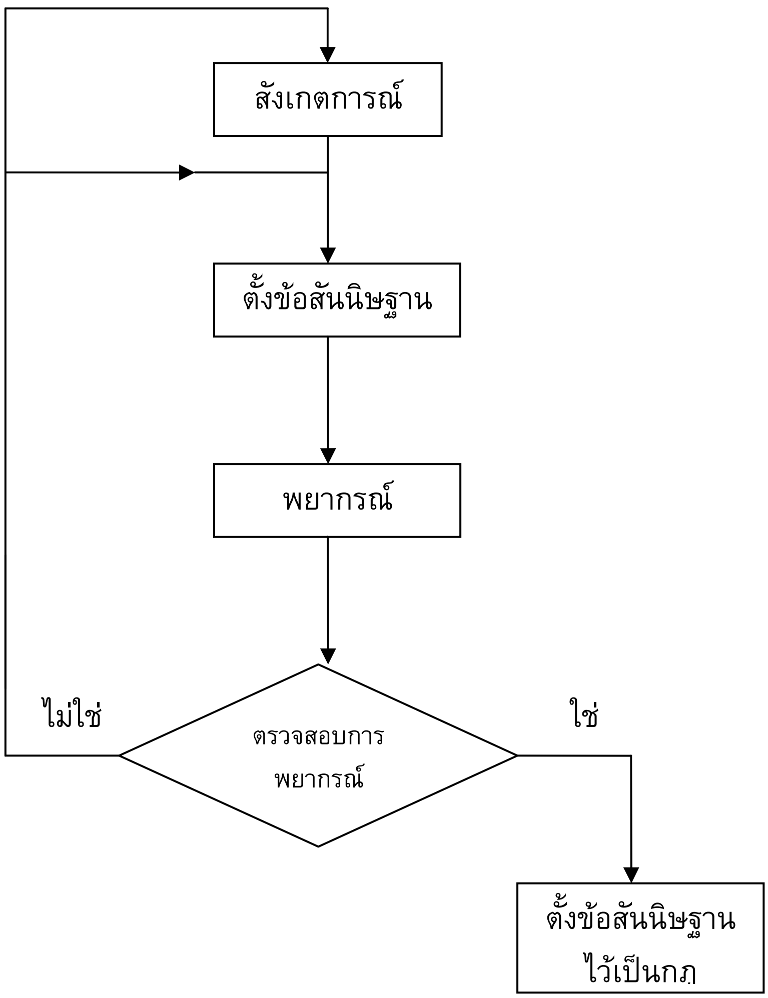
บทที่ 1
การจำลองแบบปรากฏการณ์ทางชีววิทยา

แคลคูลัสเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการศึกษาค้นคว้าหาความรู้ทางวิทยาศาสตร์ เซอร์ไอแซก นิวตัน (พ.ศ. 2185-2270) เป็นผู้หนึ่งที่คิดค้นแคลคูลัสขึ้นมาเพื่อใช้ในการสร้างทฤษฎีฟิสิกส์ของเขา อีกคนหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญในการคิดค้นแคลคูลัสคือ กอตต์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิตซ์ (พ.ศ. 2189-2260)

วิธีการศึกษาหาความรู้วิทยาศาสตร์ของนิวตันนั้นเป็นไปตามแนวคิดที่ กาลิเลอี กาลิเลโอ เสนอไว้ทุกประการ กาลิเลโอ (พ.ศ. 2107-2185) เสนอแนวทางสำหรับใช้ในการศึกษาหาความรู้วิทยาศาสตร์ไว้ว่า การศึกษาวิทยาศาสตร์ทุกสาขาควรทำโดยการแสวงหากฎขั้นพื้นฐานเกี่ยวกับปรากฏการณ์ธรรมชาติ แล้วอนุมานข้อความรู้ต่างๆจากกฎเหล่านั้น คือทำแบบเดียวกันกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ จากสัจพจน์อย่างที่ทำกันในคณิตศาสตร์ แต่จะต้องมีการตรวจสอบข้อความรู้เหล่านั้นด้วยสังเกตการณ์หรือการทดลองเพื่อให้สามารถใช้วิธีการของคณิตศาสตร์ได้ กฎต่าง ๆ จึงควรอยู่ในรูปที่ใช้ภาษาคณิตศาสตร์ เช่น เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ปริมาณต่าง ๆ เป็นต้น ปัจจุบันนี้การศึกษาหาความรู้วิทยาศาสตร์ก็คงเป็นไปตามแนวทางที่ กาลิเลโอวางไว้ ขั้นตอนหลักของวิธีการศึกษาหาความรู้วิทยาศาสตร์มีดังนี้

1. สังเกตปรากฏการณ์ที่เราต้องการศึกษาปรากฏการณ์ที่กล่าวถึงนี้ อาจเป็นปรากฏการณ์ ธรรมชาติหรือปรากฏการณ์ที่ได้จากการทดลองก็ได้
2. ตั้งข้อสันนิษฐานเกี่ยวกับปรากฏการณ์นั้น ข้อสันนิษฐานดังกล่าวนี้ก็คือสิ่งที่เราคาดเดาว่าคงจะเป็นจริงโดยทั่วไปสำหรับปรากฏการณ์แบบเดียวกันนี้
3. ลองสมมติดูว่าหากข้อสันนิษฐานเป็นจริงจะต้องมีปรากฏการณ์อะไรเกิดขึ้นอีกบ้าง กล่าวคือ ใช้ข้อสันนิษฐานเป็นหลักในการพยากรณ์ปรากฏการณ์อื่น ๆ โดยการใช้การคิดอย่างมีเหตุผล
4. ทำสังเกตการณ์เพิ่มเติมเพื่อตรวจสอบดูว่าบรรดาสิ่งที่พยากรณ์ไว้ในข้อ 3 ถูกต้องดีหรือไม่
5. ถ้าสิ่งที่พยากรณ์ไว้ไม่ถูกต้อง แสดงว่าข้อสันนิษฐานที่คิดไว้นั้นไม่ถูกต้อง ในกรณีเช่นนี้เราต้องปรับปรุงข้อสันนิษฐานเสียใหม่ หรือตั้งข้อสันนิษฐานใหม่โดยสิ้นเชิง แล้วทำข้อ 2,3,4 กันใหม่ แต่ถ้าสังเกตการณ์ชี้ชัดว่า ข้อพยาการณ์ที่ใช้ข้อสันนิษฐานเป็นหลักนั้นถูกต้องดีทุกข้อ ข้อสันนิษฐานของเราก็เป็นสิ่งที่ใช้พยากรณ์ปรากฏการณ์อื่นๆได้ดี ในกรณีเช่นนี้เราก็ยอมรับข้อสันนิษฐานเป็นกฎ

ขั้นตอนหลักของวิธีการศึกษาหาความรู้วิทยาศาสตร์



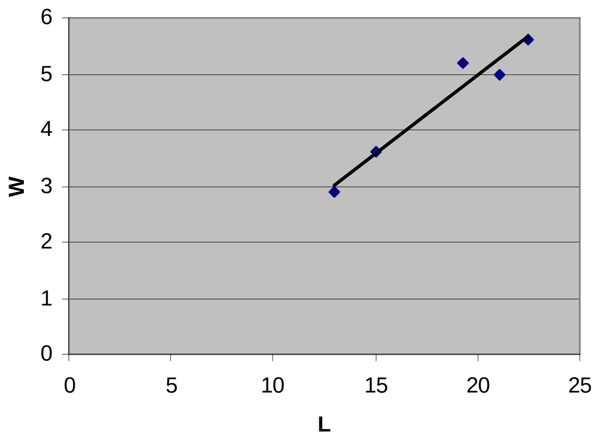
ถ้าสังเกตความกว้างและความยาวของใบไม้ในธรรมชาติ ดังตัวอย่างต่อไปนี้แสดงความกว้างและความยาวของใบมะม่วงน้ำดอกไม้ 5 ใบซึ่งเก็บโดยสุ่มจากต้นเดียวกัน

ตารางแสดงส่วนสัดของใบมะม่วงน้ำดอกไม้

ลำดับที่	ความยาว(L) ซม.	ความกว้าง(W) ซม.
1	15.0	3.6
2	13.0	2.9
3	22.5	5.6
4	21.1	5.0
5	19.3	5.2

เมื่อนำค่ามาเขียนลงจุดระหว่างความกว้าง (W) และความยาว (L) ของใบมะม่วง จะสังเกตว่าลักษณะคล้ายเส้นตรง ทำให้เกิดข้อสันนิษฐานถึงความสัมพันธ์ระหว่างความกว้างและความยาวของใบไม้มีลักษณะเป็นเส้นตรง ขั้นต่อไปในการพยากรณ์ความกว้างและความยาวของใบมะม่วงนี้คือการหาสมการเส้นตรงที่แทนความสัมพันธ์ของข้อมูลนี้ได้ดีที่สุด นั่นคือมีความคลาดเคลื่อน(error) น้อยที่สุด ซึ่งในที่นี้จะวัดความคลาดเคลื่อนโดยการหาค่ากำลังสองของผลต่างของค่าที่ได้จากสมการเส้นตรงและข้อมูลจริง โดยจะเรียกว่า**ความคลาดเคลื่อนกำลังสอง** หรือ **squared error** และคำนวณหาผลรวมของ squared error ของข้อมูลทั้งหมด

ตัวอย่างเช่น ถ้าเราลองประมาณข้อมูลด้วยสมการ $W = 0.33L - 1.7$ จะได้ ค่า squared error ดังตารางต่อไปนี้



$$W = 0.33L - 1.7$$

ลำดับที่	ความยาว(L)	ความกว้าง (W)	ค่าที่ได้จากสมการ	Error	SquaredError
1	15.0	3.6	3.25	0.35	0.1225
2	13.0	2.9	2.59	0.31	0.0961
3	22.5	5.6	5.72	-0.12	0.0144
4	21.1	5.0	5.26	-0.26	0.0676
5	19.3	5.2	4.66	0.54	0.2916

นั่นคือ ผลรวมของ squared error ทั้งหมด จะเป็น 0.5922 ถ้าใช้สมการเส้นตรงอื่นค่าผลรวมของ squared error ก็จะแตกต่างกันออกไป สมการเส้นตรงที่ให้ค่าผลรวมของ squared error น้อยที่สุด คือสมการเส้นตรงที่ต้องการ

ข้อมูลที่เป็นปรากฏการณ์ธรรมชาติอีกตัวอย่างหนึ่ง คือ ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนสูงและน้ำหนักเด็กเล็กดังแสดงในตารางข้างล่าง ถ้าลงจุดในกราฟจะได้ความสัมพันธ์เป็นลักษณะคล้ายเส้นตรง

ตารางแสดงส่วนสูงและน้ำหนักเด็กเล็ก

ส่วนสูง(ซ.ม.)	น้ำหนัก(ก.ก.)
50.0	2.8
51.0	4.0
57.0	5.2
61.0	8.6
63.6	8.0
65.5	8.3
69.5	9.1
71.0	9.2
77.0	11.8
81.5	11.5
82.0	12.3
97.0	15.8

1.1 การประมาณข้อมูลด้วยสมการเส้นตรง

ตัวอย่าง 1.1

จงประมาณข้อมูลต่อไปนี้ด้วยสมการเส้นตรง

x	y
2	1
3	4
4	5

ให้ $z = mx + c$ เป็นสมการเส้นตรงประมาณค่าข้อมูลที่กำหนดให้
ต้องการหา m และ c ที่ทำให้ $y(x)$ และ $z(x)$ มีผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุด
ให้ SE^2 เป็นผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสองทั้งหมด

$$
\begin{aligned}
SE^2 &= \sum\left(y(x) - z(x)\right)^2 = \sum\left(y - (mx + c)\right)^2 \\
&= \sum\left(y^2 - 2y(mx + c) + (mx + c)^2\right) \\
&= \sum\left(y^2 - 2ymx - 2yc + m^2x^2 + 2mxc + c^2\right) \\
&= \sum y^2 - 2m\sum xy - 2c\sum y + m^2\sum x^2 + 2mc\sum x + c^2\sum 1 \qquad \cdots\cdots(*)
\end{aligned}
$$

ต่อไปแทนค่า $\sum y^2, \sum xy, \sum y, \sum x^2$ และ $\sum x$ ที่ได้จากตารางข้างล่างลงใน (*) จะได้ค่า SE^2 ในรูปของ m และ c

x	y	y^2	xy	x^2
2	1	1	2	4
3	4	16	12	9
4	5	25	20	16
$\sum x = 9$	$\sum y = 10$	$\sum y^2 = 42$	$\sum xy = 34$	$\sum x^2 = 29$

$$\begin{aligned}
SE^2 &= 42 - 2m(34) - 2c(10) + m^2(29) + 2mc(9) + 3c^2 \\
&= 29m^2 + (18c - 2\cdot 34)m + 3c^2 - 20c + 42 \\
&= \frac{1}{29}\left[29^2 m^2 + 29(18c - 2\cdot 34)m + 29\left(3c^2 - 20c + 42\right)\right] \\
&= \frac{1}{29}\left[(29m)^2 + 2(29m)(9c-34) + (9c-34)^2 - (9c-34)^2 + 87c^2 - 29\cdot 20c + 29\cdot 42\right] \\
&= \frac{1}{29}\left[(29m + 9c - 34)^2 - 81c^2 + 18\cdot 34c - 34^2 + 87c^2 - 29\cdot 20c + 29\cdot 42\right] \\
&= \frac{1}{29}\left[(29m + 9c - 34)^2 + 6c^2 + 32c + 62\right] \\
&= \frac{1}{29}\left[(29m + 9c - 34)^2 + \frac{1}{6}\left(6^2c^2 + 6\cdot 32c\right) + 62\right] \\
&= \frac{1}{29}\left[(29m + 9c - 34)^2 + \frac{1}{6}\left((6c)^2 + 2(6c)(16) + (16)^2 - (16)^2\right) + 62\right] \\
&= \frac{1}{29}\left[(29m + 9c - 34)^2 + \frac{1}{6}(6c+16)^2 - \frac{(16)^2}{6} + 62\right] \\
SE^2 &= \frac{1}{29}\left[(29m + 9c - 34)^2 + \frac{1}{6}(6c+16)^2 + \frac{116}{6}\right]
\end{aligned}$$

เมื่อ $29m + 9c - 34 = 0$ และ $6c + 16 = 0$ จะได้ค่า m และ c ที่ทำให้ SE^2 มีค่าน้อยที่สุด

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 6c + 16 &= 0 \\ 6c &= -16 \\ c &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$
และ
$$\begin{aligned} 29m + 9c - 34 &= 0 \\ 29m + 9\left(-\frac{8}{3}\right) - 34 &= 0 \\ 29m &= 34 + 24 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\boxed{z = 2x - \frac{8}{3}}$ เป็นเส้นตรงที่ใช้ประมาณข้อมูลที่กำหนดให้มีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

ในกรณีชุดของข้อมูลใดๆ เราสามารถหา m และ c โดยวิธีดังตัวอย่าง 1.1 ได้ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้

$$\sum x^2 = A, \quad \sum x = B, \quad \sum y = D, \quad \sum y^2 = E, \quad \sum xy = F$$

และสังเกตว่า $\sum 1 = n$ เมื่อ n คือ จำนวนข้อมูล ดังนั้น ค่า SE^2 สามารถเขียนได้ในรูปของ $m,\ c$ และ n ดังต่อไปนี้

แทนค่า $\sum x^2, \ \sum x, \ \sum y, \ \sum y^2, \ \sum xy$ และ $\sum 1 = n$ ใน (*) ข้างบน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
SE^2 &= E - 2Fm - 2Dc + Am^2 + 2Bcm + nc^2 \\
&= Am^2 + (2Bc - 2F)m + (nc^2 - 2Dc + E) \\
&= \frac{1}{A}\left[A^2m^2 + 2(Bc - F)Am + nAc^2 - 2ADc + AE\right] \\
&= \frac{1}{A}\left[(Am)^2 + 2(Am)(Bc - F) + (Bc - F)^2 - (Bc - F)^2 + nAc^2 - 2ADc + AE\right] \\
&= \frac{1}{A}\left[(Am + Bc - F)^2 - c^2B^2 + 2BFc - F^2 + nAc^2 - 2ADc + AE\right] \\
&= \frac{1}{A}\left[(Am + Bc - F)^2 + (nA - B^2)c^2 + (2BF - 2AD)c + AE - F^2\right] \\
&= \frac{1}{A}\left[\begin{array}{l}(Am + Bc - F)^2 \\ + \dfrac{1}{nA - B^2}\left[(nA - B^2)^2c^2 + 2(nA - B^2)c(BF - AD) + (BF - AD)^2\right] \\ - \dfrac{(BF - AD)^2}{nA - B^2} + AE - F^2\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{A}\left[\begin{array}{l}(Am + Bc - F)^2 \\ + \dfrac{1}{nA - B^2}\left((nA - B^2)c + BF - AD\right)^2 - \dfrac{(BF - AD)^2}{nA - B^2} + AE - F^2\end{array}\right]
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า เมื่อ $Am + Bc - F = 0$ และ $(nA - B^2)c + BF - AD = 0$ จะให้ค่า SE^2 น้อยสุด

จาก $(nA - B^2)c + BF - AD = 0$ ได้ว่า

$$c = \frac{AD - BF}{nA - B^2}$$

และจาก $Am + Bc - F = 0$ ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{F - Bc}{A} \\
&= \frac{1}{A}\left[F - B\left(\frac{AD - BF}{nA - B^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{A}\left[\frac{nAF - B^2F - ABD + B^2F}{nA - B^2}\right] \\
&= \frac{nF - BD}{nA - B^2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น เส้นตรงที่ใช้ประมาณข้อมูลซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุดคือ $z = mx + c$ เมื่อ

$$
\boxed{m = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \quad \text{และ} \quad c = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}}
$$

แบบฝึกหัด 1.1

จงหาสมการเส้นตรงเพื่อประมาณข้อมูลต่อไปนี้

x	y
2	1
4	2
5	3

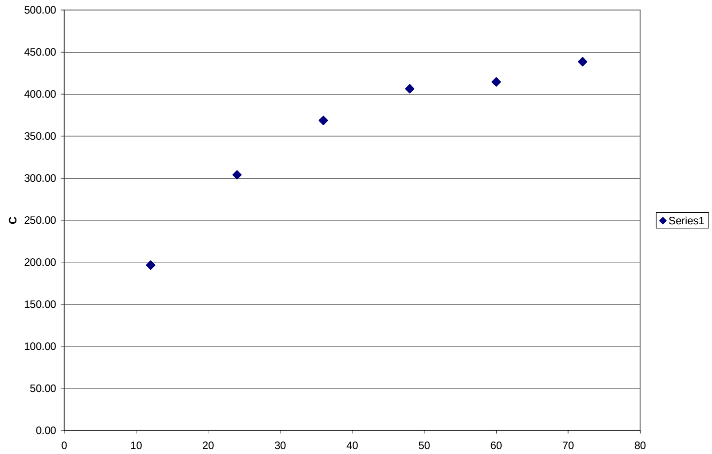
1.2 การประมาณข้อมูลด้วยสมการอื่น ๆ

ข้อมูลที่พบในธรรมชาติทั่วไปอาจมีความสัมพันธ์กันในรูปแบบอื่นที่ไม่ใช่เส้นตรง ดังข้อมูลในตารางข้างล่างได้จากการศึกษาความเข้มข้นของกรดไฮดรอกซีบิวไทริกในเซลล์ของแบคทีเรีย Baciilus sp. BA-019 ในห้องปฏิบัติการของภาควิชาจุลชีววิทยา คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ซึ่งแสดงความเข้มข้น C มิลลิกรัมต่อลิตร เมื่อเวลาผ่านไป T ชั่วโมง จะเห็นว่าลักษณะจุดของข้อมูลมีความสัมพันธ์ไม่เป็นเส้นตรง

ตารางที่ 1 ความเข้มข้นของกรดไฮดรอกซีบิวไทริก

ในเซลล์แบคทีเรีย Baciilus sp. BA-019 ที่อุณหภูมิ 37 องศาเซลเซียส ณ เวลาต่าง ๆ

เวลา(ชั่วโมง) T	ความเข้มข้น(มิลลิกรัมต่อลิตร) C
12	196.51
24	303.93
36	368.65
48	406.35
60	414.61
72	438.53

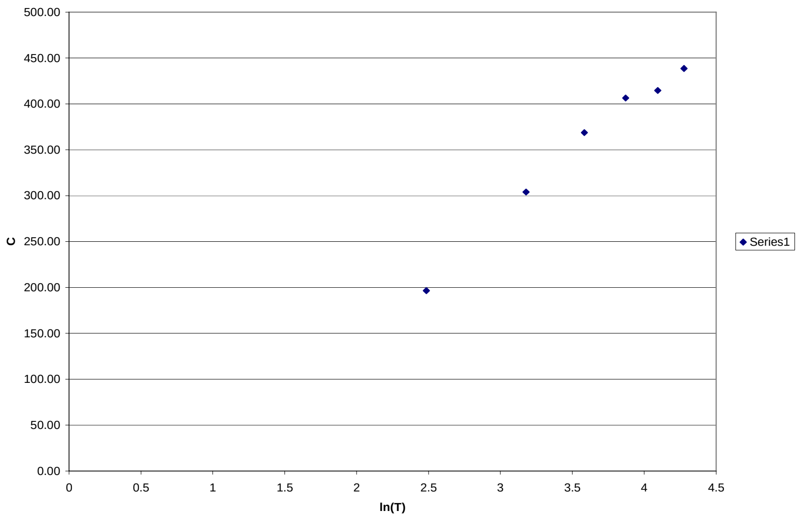


แต่ถ้าพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างค่า $\ln T$ และ C จากตารางที่ 1 แทนดังตารางที่ 2 จะเห็นว่าลักษณะจุดของข้อมูลที่ได้จะมีความสัมพันธ์กันเป็นเส้นตรงมากขึ้น

ตารางที่ 2 ความเข้มข้นของกรดไฮดรอกซีบิวไทริก

ในเซลล์แบคทีเรีย Baciilus sp. BA-019 ที่อุณหภูมิ 37 องศาเซลเซียส ณ ค่า ln ของเวลาต่าง ๆ

ln(T)	C
2.48	196.51
3.18	303.93
3.58	368.65
3.87	406.35
4.09	414.61
4.28	438.53



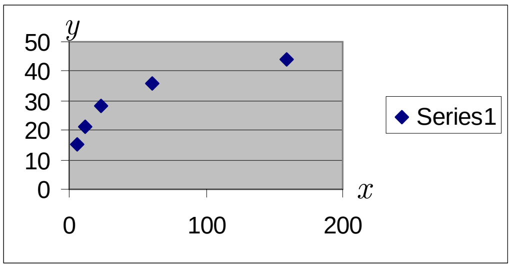
ข้อมูลที่ความสัมพันธ์ที่ไม่ใช่เส้นตรงบางชุดสามารถแปลงแล้วมีความสัมพันธ์เป็นลักษณะเส้นตรงได้ ซึ่งบ่อยครั้งอาจทำโดยพิจารณาค่า ln ของข้อมูลชุดแรก กับข้อมูลชุดที่สอง หรือพิจารณา ข้อมูลชุดแรกกับค่า ln ของข้อมูลชุดที่สอง หรือ ค่า ln ของข้อมูลทั้งสองชุดแทน ถ้า

ความสัมพันธ์ใหม่ที่ได้มีลักษณะเป็นเส้นตรง จะใช้วิธีในตอนที่ 1.1 หาเส้นตรงที่ประมาณค่าข้อมูลชุดที่แปลงแล้ว นำไปสู่ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลแรกดังตัวอย่างต่อไปนี้

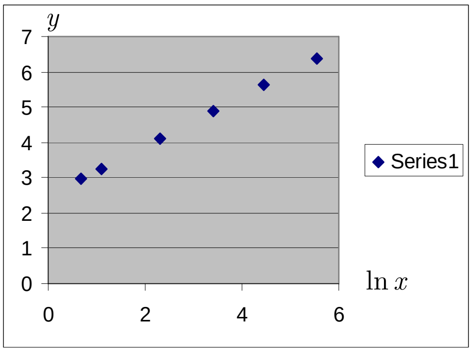
ตัวอย่าง 1.2

กราฟแสดงจุดของข้อมูลในตารางมีลักษณะไม่เป็นเส้นตรง

x	y
6	15
12	21
23	28
61	36
159	44



แต่กราฟของ $\ln x$ และ y มีลักษณะใกล้เคียงเส้นตรงมากกว่า



เราจึงประมาณความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล $\ln x$ และ y ด้วยเส้นตรง ซึ่งหาได้โดยวิธีในตอนที่แล้วดังต่อไปนี้

x	y	$\ln x$	$(\ln x)^2$	$y \ln x$
6	15	1.7918	3.2104	26.8764
12	21	2.4849	6.1748	52.1830
23	28	3.1355	9.8313	87.7938
61	36	4.1109	16.8993	147.9915
159	44	5.0689	25.6938	223.0318
	$\sum y = 144$	$\sum \ln x = 16.5919$	$\sum (\ln x)^2 = 61.8096$	$\sum (y \ln x) = 537.8765$

นั่นคือ

$$m = \frac{n\sum(y\ln x) - \sum\ln x\sum y}{n\sum(\ln x)^2 - (\sum\ln x)^2}$$
$$= \frac{5(537.8765) - (16.5919)(144)}{5(61.8096) - (16.5919)^2}$$
$$= 8.8917$$

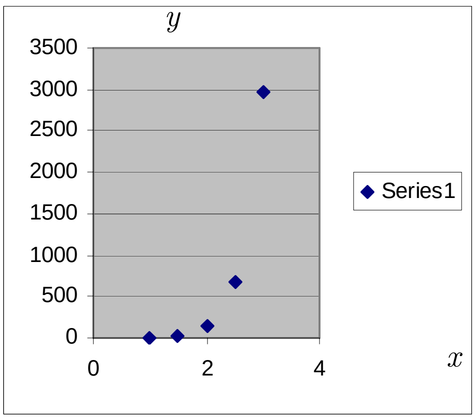
$$c = \frac{\sum(\ln x)^2\sum y - \sum\ln x\sum y\ln x}{n\sum(\ln x)^2 - (\sum\ln x)^2}$$
$$= \frac{(61.8096)(144) - (16.5919)(537.8765)}{5(61.8096) - (16.5919)^2} = -0.7062$$

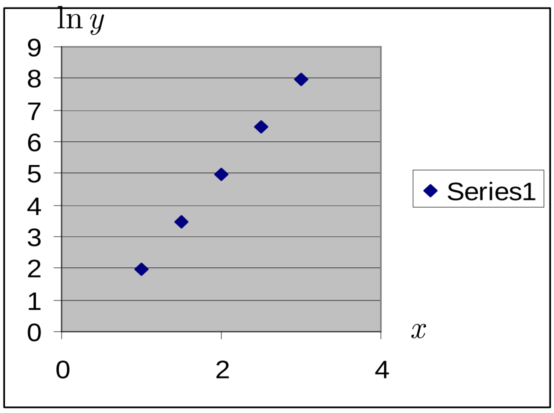
ฉะนั้น สมการประมาณค่าความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y คือ $\boxed{y = 8.8917\ln x - 0.7062}$

ตัวอย่าง 1.3

x	y
1	7.38
1.5	33.11
2	148.41
2.5	665.14
3	2980.95

จะเห็นว่ากราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ไม่เป็นเส้นตรง แต่ x และ $\ln y$ เป็นเส้นตรง





เพราะฉะนั้น เราจึงประมาณค่าระหว่าง x และ $\ln y$

x	y	$\ln y$	x^2	$x \ln y$
1	7.38	1.9988	1.0000	1.9988
1.5	33.11	3.4998	2.2500	5.2497
2	148.41	5.0000	4.0000	10.0000
2.5	665.14	6.5000	6.2500	16.2500
3	2980.95	8.0000	9.0000	24.0000
$\sum x = 10$		$\sum \ln y = 24.9986$	$\sum x^2 = 22.5000$	$\sum x \ln y = 57.4985$

ความสัมพันธ์ดังกล่าวคือ $\ln y = 3.0005x - 1.0013$ หรือ $\boxed{y = 0.3674\, e^{3.0005x}}$

แบบฝึกหัด 1.2

กำหนดข้อมูล

x	y
2	2.98
3	3.26
10	4.11
30	4.88
87	5.62
256	6.38

จงแปลงข้อมูลเป็นค่าที่เหมาะสมเพื่อประมาณค่าความสัมพันธ์นั้นด้วยสมการเส้นตรงและจงหาเส้นตรงนั้นด้วยการสร้างตารางเพื่อหาค่าของความชัน m และค่าคงที่ c

1.3 ฟังก์ชัน

การเขียนแสดงกฎด้วยภาษาคณิตศาสตร์ตามแนวทางที่กาลิเลโอเสนอแนะไว้นั้น อาจเขียนได้ในรูปต่างๆ หลายแบบ แบบที่มักจะพบเห็นบ่อย ๆ ก็คือ การเขียนในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณ ความสัมพันธ์เหล่านี้ ส่วนใหญ่จะมีลักษณะเป็นฟังก์ชัน การศึกษาเรื่องฟังก์ชันจึงเป็นเรื่องพื้นฐานที่สำคัญของการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในการศึกษาวิทยาศาสตร์

ต่อไปนี้เป็นความคิด(concepts) ต่างๆเกี่ยวกับฟังก์ชัน

บทนิยาม 1.1

เรากล่าวว่า f เป็น ฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง ถ้า f เป็นเซตของคู่ลำดับของจำนวนจริงที่คู่ลำดับต่างๆกันมีสมาชิกตัวแรกไม่ซ้ำกันเลย เราเรียกเซตของบรรดาสมาชิกตัวแรกในคู่ลำดับทั้งหลายว่า **โดเมน** (domain) ของ f และเรียกเซตของบรรดาสมาชิกตัวที่สองในคู่ลำดับต่าง ๆ ว่า **พิสัย** (range) ของ f

บทนิยาม 1.2

ถ้า (x,y) เป็นคู่ลำดับหนึ่งในฟังก์ชัน f เรากล่าวว่า y เป็น **ค่า** (value) ของ f ที่ x เรานิยมเขียนแทนค่าของ f ที่ x ด้วยสัญลักษณ์ $f(x)$ นอกจากนั้นการพรรณนาฟังก์ชันเราก็นิยมพรรณนาด้วยค่าของมัน เช่นเขียนพรรณนา f ว่า

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5,\ \ 0 < x < 2$$

คือบอกค่าของ f ที่จุดต่างๆ แทนที่จะเขียนพรรณนา f ในรูปของเซตว่า

$$f = \{(x, 3x^2 - 2x + 5) \mid \ 0 < x < 2\}$$

เป็นต้น

การบอกค่าฟังก์ชันนั้น เราอาจบอกด้วยสูตรหลาย ๆ สูตรก็ได้ เช่น

$$g(x) = \begin{cases} 7x^2 + 5x - 1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x^3 - 1 & , x > 0 \end{cases}$$

เป็นต้น

บทนิยาม 1.3

ให้ S เป็นเซตย่อยใดๆ ของโดเมนของฟังก์ชัน f เรากล่าวว่าจำนวนจริง u เป็น **ขอบเขตบน** (upper bound) ของ f บน S ถ้า $f(x) \leq u$ สำหรับทุกๆ x ใน S

บทนิยาม 1.4

ให้ S เป็นเซตย่อยใดๆ ของโดเมนของฟังก์ชัน f ถ้า u เป็นขอบเขตบนของฟังก์ชัน f บนเซต S ซึ่งไม่มีขอบเขตบนอื่นใดของฟังก์ชัน f บนเซต S ที่น้อยกว่า u เรากล่าวว่า u เป็น **ขอบเขตบนต่ำสุด** (least upper bound) ของ f บน S

บทนิยาม 1.5

(แบบฝึกหัด)

ขอบเขตล่าง (lower bound) ของ f บน S

บทนิยาม 1.6

(แบบฝึกหัด)

ขอบเขตล่างสูงสุด (greatest lower bound) ของ f บน S

บทนิยาม 1.7

ให้ S เป็นเซตย่อยใดๆของโดเมนของฟังก์ชัน f เรากล่าวว่าจำนวนจริง M เป็น **ค่าสูงสุด** (maximum) ของ f บน S ถ้า มี t ใน S ซึ่ง $f(t) = M$ และ $f(x) \leq M$ สำหรับทุกๆ x ใน S

บทนิยาม 1.8

(แบบฝึกหัด)

ค่าต่ำสุด (minimum) ของ f บน S

ข้อสังเกต

ค่าสูงสุดของฟังก์ชันบนเซต S ใดๆ (ถ้ามี) ย่อมเป็นขอบเขตบนต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นบนเซต S นั้น

ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันบนเซต S ใดๆ (ถ้ามี) ย่อมเป็นขอบเขตล่างสูงสุดของฟังก์ชันนั้นบนเซต S นั้น

บทนิยาม 1.9

เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing function) ถ้า $f(x) < f(y)$ สำหรับ x, y ใดๆ ซึ่ง $x < y$

บทนิยาม 1.10

เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันไม่ลด** (nondecreasing function) ถ้า $f(x) \leq f(y)$ สำหรับ x, y ใดๆ ซึ่ง $x \leq y$

บทนิยาม 1.11

เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันลด** (decreasing function) ถ้า $f(x) > f(y)$ สำหรับ x, y ใดๆซึ่ง $x < y$

บทนิยาม 1.12

เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันไม่เพิ่ม** (nonincreasing function) ถ้า $f(x) \geq f(y)$ สำหรับ x, y ใดๆซึ่ง $x \leq y$

บทนิยาม 1.13

เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันทางเดียว** (monotone function) ถ้า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มหรือเป็นฟังก์ชันไม่ลด

ข้อสังเกต

การพิจารณาหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด ขอบเขตบนต่ำสุด และขอบเขตล่างสูงสุดของฟังก์ชันทางเดียวบนช่วงใดๆ เราพิจารณาได้จากค่าฟังก์ชันที่บริเวณจุดปลายของช่วง

แบบฝึกหัด 1.3

กำหนดฟังก์ชันและช่วงดังต่อไปนี้ จงตอบคำถามข้อ a) ถึง f)

a) เซตของขอบเขตบน (upper bound)

b) ขอบเขตบนต่ำสุด (least upper bound)

c) เซตของขอบเขตล่าง (lower bound)

d) ขอบเขตล่างสูงสุด (greatest lower bound)

e) ค่าสูงสุด (maximum)

f) ค่าต่ำสุด (minimum)

1. ให้ $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ บนช่วงย่อยที่กำหนดให้
   - 1.1. $S = (0, +\infty)$
   - 1.2. $T = [1, +\infty)$
   - 1.3. $V = (-1, 0) \cup (0, \infty)$
   - 1.4. $W = (-\infty, -1)$
2. ให้ $f(x) = 2\sin x$ บนช่วงย่อยที่กำหนดให้
   - 2.1. $S = (0, \frac{\pi}{2})$
   - 2.2. $T = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
   - 2.3. $V = [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
   - 2.4. $W = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$
3. กำหนดให้ $f(x) = 4x^3 - 1$ เมื่อ $1 \leq x < 5$
4. กำหนดให้ $f(x) = x^4$ เมื่อ $x \in [-2, 3]$
5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x+1}$ เมื่อ $1 \leq x$
6. กำหนดให้ $f(x) = |x| - 1$ เมื่อ $x \leq -3$