บทที่ 10
สมการดิฟเฟอเรนเชียลและประยุกต์ใช้ในการสร้างแบบจำลอง

10.1 การสร้างแบบจำลอง

10.1.1 เส้นโค้งการเติบโต (growth curve)

การสร้างแบบจำลองการเจริญเติบโตของประชากรเป็นปัญหาหนึ่งของวิทยาศาสตร์ชีวภาพ เช่น ในการเพาะเลี้ยงสิ่งมีชีวิตบางอย่างในเนื้อที่จำกัดด้วยอาหารที่จำกัด เราก็คงต้องการทราบว่าสิ่งที่เราเพาะเลี้ยงนั้นเจริญเติบโตอย่างไร จะหาสูตรคณิตศาสตร์มาพรรณาการเจริญเติบโตนั้นได้อย่างไรหรือไม่ ได้มีการศึกษาเรื่องดังกล่าวนี้กันมาแล้วมากมาย ต่อไปนี้จะนำบางส่วนของการศึกษาในแนวนี้มาเป็นตัวอย่าง

ให้ $N(t)$ เป็นปริมาณของสิ่งที่เราเพาะเลี้ยง (หรือจะปล่อยไว้ตามธรรมชาติก็ตาม) ในขณะเวลา t

$N'(t)$ ก็คืออัตราการเปลี่ยนปริมาณของประชากรในขณะเวลา t

ตัวอย่างเช่น $N(t)$ อาจหมายถึงชีวมวลของเชื้อราในถังหมักเมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง หรืออาจเป็นน้ำหนักหรือจำนวนปลาในบ่อเลี้ยงเมื่อเวลาผ่านไป t วัน หรืออาจเป็นจำนวนประชากร (มนุษย์) ในเมืองหนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป t ปี เป็นต้น

ในการศึกษาจากของจริง เราจะมีข้อมูลที่ประกอบด้วยค่า $N(t)$ ที่ค่าต่างๆ ของ t เช่น

t (ค.ศ.)	$N(t)$ (ล้านคน)
1790	3.9
1800	5.3
1810	7.24
1820	9.60
...	...

ในทางปฏิบัติ เราประมาณ $N'(t)$ ด้วยสูตร

$$N'(t) \approx \frac{N(t+h) - N(t-h)}{2h}$$

เช่นใน ตัวอย่างข้างต้น เราจะได้ว่า

$$N'(1800) \approx \frac{7.24 - 3.9}{20} = 0.167$$

เราอาจคำนวณ $N'(t)$ สำหรับค่าทั้งหลายของ t แล้วศึกษาหาความสัมพันธ์ระหว่าง t $N(t)$ $N'(t)$ หรือค่า log ของมัน

การศึกษาในลักษณะดังกล่าวทำให้มีผู้กำหนด assumption ต่างๆ เกี่ยวกับการเจริญเติบโตของประชากร

แบบที่หนึ่ง

กำหนด assumption ว่า

$N'(t)$ แปรผันโดยตรงกับ $N(t)$ ซึ่งจะได้ว่า $N'(t) = rN(t)$

โดยที่ r เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

จากสมการ $N'(t) = rN(t)$ เราอาจเขียนเสียใหม่ได้ว่า

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$
$$\frac{dN(t)}{N(t)} = r\,dt$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\int \frac{dN}{N} = \int r\,dt$$

เมื่ออินทิเกรตแต่ละข้าง เราได้ว่า

$$\ln(N) = rt + C$$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} N(t) &= e^{rt+C} \\ &= e^{C}e^{rt} \\ &= Ke^{rt} \end{aligned}$$

เมื่อ $t = 0$ จะได้ว่า $N(0) = K \cdot 1 = K$

จึงได้สูตรสำหรับปริมาณของประชากรว่า

$$N(t) = N(0)\,e^{rt}$$

เราเรียกการเจริญเติบโตแบบนี้ว่า **การเจริญเติบโตแบบเอกซ์โพเนนเชียล** (exponential growth) ในที่นี้ $N(0)$ ก็คือปริมาณเริ่มต้น r เป็นอัตราการเติบโต เรา assume ว่า r เป็นบวก ตามสูตรนี้ จะเห็นว่า $N(t)$ เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด สูตรนี้จะใช้ได้เมื่อ t มีค่าไม่มากนักเท่านั้น

แบบที่สอง

แบบนี้ assume ว่ามีความจำกัดของสิ่งต่างๆ เช่น มีที่อยู่จำกัด มีอาหารจำกัด ฯลฯ ขนาดของประชากรจึงต้องมีความจำกัด ดังนั้นจึงต้องมีปริมาณสูงสุดที่อาจมีได้ของประชากรอยู่ค่าหนึ่ง ในที่นี้จะเรียกค่านี้ว่า M

แบบนี้ assume ว่า

$N'(t)$ แปรผันโดยตรงกับทั้ง $N(t)$ และ $M - N(t)$

จาก assumption ดังกล่าว เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$N'(t) = rN(t)(M - N(t))$$

ซึ่งเขียนเสียใหม่ได้เป็น

$$\frac{dN(t)}{N(t)(M - N(t))} = r\,dt$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\int \frac{dN}{N(M-N)} = \int r\,dt$$

เมื่ออินทิเกรตแต่ละข้าง (แสดงในห้องเรียน) เราได้ว่า

$$\frac{1}{M}\ln\left(\frac{N}{M-N}\right) = rt + C'$$

ซึ่ง เมื่อแก้สมการหา N (แสดงในห้องเรียน) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{MKe^{Mrt}}{1+Ke^{Mrt}} \\ &= \frac{M}{1+Ce^{-Mrt}} \end{aligned}$$

ในที่นี้ C เป็นค่าคงตัวที่เกิดจากค่าคงตัว C' ผ่าน K เราหาค่า C ได้โดยการกำหนดให้ $t = 0$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$C = \frac{M - N(0)}{N(0)}$$

เราเรียกการเจริญเติบโตแบบที่สองนี้ว่า **การเจริญเติบโตแบบโลจิสติก** (logistic growth) และเรียกกราฟของฟังก์ชันการเจริญเติบโตนี้ว่า logistic curve

ตัวอย่าง 10.1 (แสดงในห้องเรียน)
จงใช้วิธีร่างเส้นโค้งพิจารณาว่า logistic curve มีลักษณะความเว้าอย่างไรในช่วงใดบ้าง มีจุดเปลี่ยนความเว้าที่ใดบ้างหรือไม่ และจงพิจารณาว่าเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้นสู่อนันต์ ค่าของ $N(t)$ จะเข้าสู่ค่าลิมิตใดหรือไม่ ข้อมูลเกี่ยวกับกราฟข้างต้นนี้มีความหมายอย่างไรในความเป็นจริง (ใน physical world)

10.1.2 การเจริญเติบโตของ organisms

ให้ $m(t)$ เป็นมวลของ organ ในขณะเวลา t การเปลี่ยนมวลของ organ ขึ้นอยู่กับ ingestion ของอาหาร และ excretion

เรา assume ว่า

$$\boxed{m'(t) = a\,s(t) - b\,m(t)}$$

โดยที่ s เป็น surface area ส่วน a กับ b เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน (intake แปรผันตาม surface area excretion แปรผันตามมวล)

ในการหาสูตรสำหรับ $m(t)$ เราคิดดังนี้

มวล $m(t)$ ย่อมเป็นปฏิภาคกับปริมาตร ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับกำลังสามของความยาวของส่วนใดส่วนหนึ่งซึ่งจะแทนด้วย $l(t)$

$$m(t) = k_1\, l(t)^3$$

ส่วนพื้นที่ผิว $s(t)$ ย่อมขึ้นอยู่กับกำลังสองของ $l(t)$

$$s(t) = k_2\, l(t)^2$$

แทน $m(t)$ กับ $s(t)$ ในสมการ

$$m'(t) = a\,s(t) - b\,m(t)$$

ก็จะได้สมการใหม่ในพจน์ของ $l(t)$ ในรูป

$$l'(t) = k(c - l(t))$$

โดยการอินทิเกรตจะได้ (แสดงในห้องเรียน)

$$l(t) = c + Ae^{-kt}$$

ซึ่งเมื่อแทนค่ากลับไปในพจน์ของ $m(t)$ เราได้

$$m(t) = k_1(c + Ae^{-kt})^3$$

ให้ $m_0 = m(0)$ และ $m_\infty = \lim_{t \to +\infty} m(t)$ จะได้สูตรเป็น

$$\boxed{m(t) = \{m_\infty^{1/3} - (m_\infty^{1/3} - m_0^{1/3})e^{-kt}\}^3}$$

เราเรียกสูตร

$$m(t) = \{m_\infty^{1/3} - (m_\infty^{1/3} - m_0^{1/3})e^{-kt}\}^3$$

ว่า **von Bertalanffy Growth Curve** ตามชื่อผู้คิดค้น

อนึ่งหากเราต้องการความเติบโตด้านความยาว $l(t)$ เราจะได้ว่า

$$l(t) = l_\infty - (l_\infty - l_0)e^{-kt}$$

เราเรียกสูตรดังกล่าวนี้ว่าvon Bertalanffy Growth Curve เช่นกัน

10.1.3 Compartment Analysis

มีสารละลายอยู่ในสอง compartment A กับ B กั้นอยู่ด้วย membrane ที่เรา assume ว่าสารซึมผ่านได้ ให้ V_1, V_2, c_1, c_2 เป็นปริมาตรและความเข้มข้นของสารละลายใน compartment ทั้งสอง ปริมาตรมีค่าคงที่ แต่ความเข้มข้นจะแปรเปลี่ยนไปตามเวลา แต่ผลบวก $c_1V_1 + c_2V_2$ มีค่าคงตัว ปริมาณสารที่ลดลงจาก A ก็คือปริมาณที่เพิ่มขึ้น ใน B ปริมาณเหล่านี้เป็นปฏิภาคกับผลต่างของความเข้มข้นที่อยู่คนละฝั่งของ membrane จึงได้ว่า

$$-\frac{d(c_1V_1)}{dt} = k(c_1 - c_2)$$

$$\frac{d(c_2V_2)}{dt} = k(c_1 - c_2)$$

เราเขียนสมการทั้งสองเสียใหม่ได้เป็น

$$-V_1c_1' = k(c_1 - c_2)...........(1)$$

$$V_2c_2' = k(c_1 - c_2)...........(2)$$

เราขจัด c_2 ได้โดยการดิฟเฟอเรนชิเอตสมการ (1) แล้วแทน c_2' จาก (2) พร้อมกับแทน $k(c_1 - c_2)$ ที่เกิดขึ้นใหม่ด้วยซ้ายมือของ (1) เราก็จะได้

$$V_1V_2c_1'' + k(V_1 + V_2)c_1' = 0$$

จะเห็นว่าเขียนสมการนี้ได้เป็น

$$\frac{d}{dt}\{V_1V_2c_1' + k(V_1 + V_2)c_1\} = 0$$

จึงได้ว่า

$$V_1V_2c_1' + k(V_1 + V_2)c_1 = C^*$$

โดยที่ C^* เป็นตัวคงค่าของการอินทิเกรต

เราต้องอินทิเกรตกันต่อไปเพื่อหาสูตรสำหรับ $c_1(t)$ ซึ่งจะได้สูตรในรูป

$$c_1(t) = C + De^{-\frac{k(V_1+V_2)t}{V_1V_2}}$$

โดยที่ C, D เป็นตัวคงค่าของการอินทิเกรต

(แสดงในห้องเรียน)

เมื่อให้ t มีค่ามาก(เข้าสู่อนันต์) เราเห็นได้ว่า

$$\lim_{t\to\infty} c_1(t) = C \qquad \lim_{t\to\infty} c_1'(t) = 0$$

และเมื่อใช้สมการ (1) กับ (2) ด้วย เราจะได้ด้วยว่า

$$\lim_{t\to\infty} c_2(t) = C \qquad \lim_{t\to\infty} c_2'(t) = 0$$

จากค่าลิมิตเหล่านี้เห็นได้ว่าระบบจะเข้าสู่สมดุลย์

หากเราต้องการสูตรสำหรับ $c_2(t)$ ก็อาจหาได้จาก (1) และจากนั้นเราก็จะหา C, D ได้ในพจน์ของ $c_1(0)$, $c_2(0)$

10.2 สมการดิฟเฟอเรนเชียล

เราเรียกสมการที่ผูกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของมันว่า **สมการดิฟเฟอเรนเชียล** (differential equation) เราเรียกอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการว่า **อันดับ** (order) ของสมการ

หมายเหตุ

ราชบัณฑิตยสถานใช้คำว่า *สมการเชิงอนุพันธ์* เป็นคำแปลของ differential equation

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

(1) $N'(t) = rN(t)$

(2) $N'(t) = rN(t)(M - N(t))$

(3) $l'(t) = k(c - l(t))$

(4) $V_1V_2c_1'' + k(V_1 + V_2)c_1' = 0$

(1)-(3) เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับที่หนึ่ง ส่วน (4) เป็นสมการอันดับที่สอง (ในที่นี้ละไว้เป็นที่เข้าใจว่า"สมการ" หมายถึง"สมการดิฟเฟอเรนเชียล")

ในการเขียนสมการดิฟเฟอเรนเชียลนั้น โดยทั่วๆ ไป นิยมใช้ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรค่า x เช่น

(5) $(2x^3 + y^2)dx + (3x^2y^2 + 2xy)dy = 0$

(6) $x\dfrac{dy}{dx} + (x+1)y = 0$

(7) $xy' + y = e^x$

ในที่นี้ y เป็น unknown function ที่เราต้องการหาว่ามีสูตรว่าอย่างไร หรือต้องการประมาณค่าของมัน สำหรับค่าต่างๆ ของ x

การหา unknown function นั้นเราทำโดยการอินทิเกรต เช่น จากสมการ (7) ถ้าเขียนเสียใหม่เป็น

$$(7') \quad \frac{d(xy)}{dx} = e^x$$

แล้วอินทิเกรต (หาปฏิยานุพันธ์) จะได้

$$(7^*) \quad xy = e^x + C$$

ซึ่งในที่นี้ นิยาม y โดยปริยาย ผลที่ได้จากการอินทิเกรตนี้ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่ง หากแต่เป็น family หนึ่งของฟังก์ชัน แต่ละค่าของตัวคงค่า C ให้หนึ่งฟังก์ชัน เช่นถ้าให้ $C = 1$ เราได้

$$xy = e^x + 1$$

อีกนัยหนึ่ง

$$(7^{\#}) \quad y = \frac{e^x + 1}{x}$$

หากเรานำ y ใน $(7^{\#})$ ไปแทนใน (7) เราจะพบว่า y ดังกล่าวนี้สอดคล้อง (7) (แสดงในห้องเรียน)

หากนำ y ใน (7*) ไปแทนใน (7) เราจะพบว่า y เหล่านั้นก็สอดคล้อง (7) เช่นกัน

สำหรับสมการ

$$(4) \quad V_1V_2c_1'' + k(V_1 + V_2)c_1' = 0$$

นั้น เราได้เห็นมาแล้วว่าเราต้องอินทิเกรตถึงสองครั้ง จึงจะได้สูตรสำหรับ $c_1(t)$ ซึ่งทำให้สูตรมีตัวคงค่าที่เกิดจากการอินทิเกรตถึงสองตัว

โดยทั่วๆ ไป เมื่ออินทิเกรตสมการอันดับที่ n เพื่อหาฟังก์ชันที่สอดคล้องสมการนั้น เราจะได้ family ของฟังก์ชันที่ประกอบด้วยตัวคงค่า n ตัว เราเรียก family ของฟังก์ชันดังกล่าวนี้ว่า **ผลเฉลยทั่วไป** หรือ **general solution**

เมื่อกำหนดให้ตัวคงค่าต่างๆให้มีค่าเป็นจำนวนจริงต่างๆจนครบทุกตัว ก็จะได้ฟังก์ชันหนึ่งที่สอดคล้องสมการ เราเรียกฟังก์ชันใดๆที่ได้นี้ว่า**ผลเฉลยเฉพาะ** หรือ **particular solution**

ตัวอย่างเช่น

$$(7^*) \quad xy = e^x + C$$

เป็น ผลเฉลยทั่วไป ของ

$$(7) \quad xy' + y = e^x$$

และ

$$(7^{\#}) \quad y = \frac{e^x + 1}{x}$$

เป็น ผลเฉลยเฉพาะของ (7) เป็นต้น

10.2.4 สมการแบบแยกตัวแปรได้

เราได้พบเห็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ในเรื่อง growth และ compartment analysis ในการหาผลเฉลยของสมการต่างๆ เหล่านั้น สิ่งที่เราได้ทำไปก็คือ จัดสมการให้เป็นการเท่ากันของดิฟเฟอเรนเชียลของต่างตัวแปรกัน เช่นด้านซ้ายมือเป็น $...dN$ และด้านขวามือเป็น $...dt$ เป็นต้น

เรากล่าวว่า

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ถ้าเราสามารถจัดพจน์เสียใหม่ให้อยู่ในรูป

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

เราหาผลเฉลยของสมการแบบนี้ได้โดยการอินทิเกรตทีละเทอม

$$\int A(\mathrm{x})\,dx \;\;+\;\; \int B(\mathrm{y})\,dy \;=\; C$$

ตัวอย่าง 10.2 (แสดงในห้องเรียน)

สำหรับสมการต่อไปนี้ จงหาผลเฉลยทั่วไป และหาผลเฉลยเฉพาะที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

1. $xy' = 3y, \quad y(1) = 2$

2. $y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 1$

ตัวอย่าง 10.3 (แสดงในห้องเรียน)

สาร radioactive สลายตัวด้วยอัตราในขณะใดๆ เป็นปฏิภาคกับปริมาณที่มีอยู่ขณะนั้น
ให้ $y(t)$ เป็นปริมาณสาร radioactive อย่างหนึ่งในขณะเวลา t จงเขียนข้อความข้างบนเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียล แล้วแก้สมการดังกล่าวเพื่อหาสูตรของ $y(t)$
half-life ของสาร radioactive คือระยะเวลาที่สารนั้นสลายตัวจนเหลืออยู่เพียงครึ่งเดียว
จากสูตร $y(t)$ ที่ได้ไว้แล้วนั้น จงหาสูตรสำหรับคำนวณ half-life ถ้าสาร radioactive อย่างหนึ่งมี half-life 26.8 นาที สารนี้จะสลายตัว 1% ของปริมาณที่มีอยู่ในเวลาเท่าใด

ตัวอย่าง 10.4 (แสดงในห้องเรียน)
วัตถุพรุนจะสูญเสียความชื้นในอัตราที่เป็นปฏิภาคกับความชื้นที่มีอยู่ในแต่ละขณะ จงแปลความข้างบนนี้เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียล แล้วหาผลเฉลยทั่วไปของสมการดังกล่าว ทดลองตากผ้าในร่มที่ไม่มีลมพัดผ่าน และวัดความชื้นผ้าในขณะต่าง ๆ

เมื่อเริ่มต้น ความชื้น = 100 %

เมื่อสิ้น 1 ชั่วโมง ความชื้น = 50 %

อยากทราบว่าเมื่อใดจะคงเหลือความชื้น 10 %

10.2.5 สมการเชิงเส้น (อันดับที่หนึ่ง)

เรากล่าวว่า $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงเส้น ถ้าเราสามารถจัดพจน์เสียใหม่ให้อยู่ในรูป $y' + P(x)y = Q(x)$ ตัวอย่างเช่น

(1) $N'(t) = rN(t)$

(3) $l'(t) = k(c - l(t))$

(6) $x\dfrac{dy}{dx} + (x+1)y = 0$

(7) $xy' + y = e^x$

ในกรณีที่ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันศูนย์ เช่นในกรณี (1) กับ (6) เรากล่าวว่าสมการเป็น **สมการเอกพันธุ์**(homogeneous equation)

สมการเชิงเส้นเป็นชนิดของสมการที่มีประโยชน์ในหลาย ๆด้าน มีการศึกษากันมาก และมีสูตรสำหรับหาผลเฉลยอยู่แล้วเป็นอย่างดี สูตรดังกล่าวคือ

$$y = e^{-\int P(x)dx}\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\}$$

หรืออีกนัยหนึ่ง

$$y = e^{-h(x)}\{\int Q(x)e^{h(x)}\,dx + C\}$$

โดยที่

$$h(x) = \int P(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 10.5 (แสดงในห้องเรียน)
จงแสดงใช้สูตรผลเฉลยของสมการเชิงเส้น หาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้ แล้วหาผลเฉลยเฉพาะที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

1. $y' + xy = x,$ เมื่อ $y = 5$ $x = 0$

2. $xy' + y = \dfrac{\ln(x)}{x},$ เมื่อ $y = 3$ $x = 1$

ตัวอย่าง 10.6 (Michaelis-Menton equation)

การ process drug ของร่างกายเป็นไปตามสมการ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-Kx}{A+x}$$

โดยที่ x เป็นความเข้มข้นของ drug ในร่างกายในขณะเวลา t K กับ A เป็นค่าคงตัวที่ขึ้นอยู่กับชนิดของ drug สำหรับ drug บางอย่าง A มีค่ามากกว่า x มากๆ ในกรณีเช่นนี้เราประมาณสมการได้เป็น

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-Kx}{A}$$

สมมติว่ามีการให้ drug อย่างต่อเนื่องเป็นเวลา 12 ชั่วโมงในอัตรา 10 มิลลิกรัมต่อนาที แล้วหยุดอัตราการไหลเข้าของ drug จึงเป็น

$$\begin{aligned} D(t) &= 10 \quad 0 \le t \le 12, \\ &= 0 \quad\ \ t > 12 \end{aligned}$$

สมมติว่าการ process drug เป็นไปตามสมการเชิงเส้นข้างบนและเป็นไปตาม

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x$$

ให้ $y(t)$ เป็นความเข้มข้นของ drug ในผู้ที่ได้รับ drug ดังกล่าว ดังนั้น เราย่อมได้ว่า

$$\frac{dy}{dt} = D(t) - 0.1y$$

หรืออีกนัยหนึ่ง $\dfrac{dy}{dt} + 0.1y = D(t)$

เรา assume ว่าเมื่อเริ่มต้นนั้นยังไม่มี drug ในร่างกาย ดังนั้น $y(0) = 0$

จากนี้เราก็จะหาผลเฉลยของสมการได้ (แสดงวิธีทำในห้องเรียน)

ตัวอย่าง 10.7 (แสดงในห้องเรียน)
ถังใบหนึ่งมีน้ำเกลืออยู่ 100 ลิตร น้ำเกลือดังกล่าวนี้มีเกลือละลายอยู่ 0.3 กก.ต่อลิตร เติมน้ำจืดลงไปในถัง และขณะเดียวกันปล่อยน้ำเกลือออกจากถังด้วยอัตราเดียวกัน และคนให้น้ำเกลือในถังผสมกันดีตลอดเวลา จงเข้าสมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับความเข้มข้นของน้ำเกลือ แล้วแก้สมการหาสูตรของความเข้มข้นของน้ำเกลือในถังในขณะเวลาใด ๆ

ตัวอย่าง 10.8 (แสดงในห้องเรียน)
ถังใบหนึ่งมีน้ำจืดอยู่ 200 ลิตร เติมน้ำเกลือที่มีเกลือละลายอยู่ 0.25 กก.ต่อลิตรในอัตรา 4 ลิตรต่อนาที โดยคนให้ผสมกันดีตลอดเวลา เมื่อเวลาผ่านไป 30นาที จึงเปลี่ยนจากการเติมน้ำเกลือเป็นการเติมน้ำจืดในอัตราเดียวกัน จงเข้าสมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับความเข้มข้นของน้ำเกลือในถัง แล้วแก้สมการหาสูตรของความเข้มข้นของน้ำเกลือในถังในขณะเวลาใด ๆ

แบบฝึกหัด 10.1

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้ และหาผลเฉลยเฉพาะที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

1. $xy' = 3y, \quad y(1) = 2$
2. $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{1+\sqrt{r}}{1+\sqrt{u}}$
3. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}$
4. $y' = 2x\sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = 0$
5. $y' = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{ye^y}$