บทที่ 2
ความต่อเนื่องและลิมิต

ความคิดเรื่องลิมิต กับเรื่องความต่อเนื่องเป็นความคิดที่เกี่ยวข้องกัน เมื่อเข้าใจเรื่องใดเรื่องหนึ่งดีแล้วก็จะเข้าใจอีกเรื่องหนึ่งได้โดยง่าย โดยการใช้เรื่องที่เข้าใจดีแล้วอธิบายอีกเรื่องหนึ่ง ตำราส่วนมากนิยมอธิบายเรื่องลิมิตเสียก่อน แล้วจึงใช้เรื่องลิมิตอธิบายเรื่องความต่อเนื่อง ในที่นี้เราจะทำกลับกัน จะเริ่มด้วยการอธิบายเรื่องความต่อเนื่อง แล้วจึงใช้เรื่องความต่อเนื่องอธิบายเรื่องลิมิต การอธิบายเรื่องความต่อเนื่องและลิมิตของฟังก์ชันที่จะทำในที่นี้จะแบ่งเป็นสองตอน

ตอนที่ 1 จะเป็นการอธิบายคร่าว ๆ โดยใช้กราฟซึ่งย่อมใช้ได้กับฟังก์ชันที่เราเขียนกราฟได้เท่านั้น ซึ่งจะอธิบายในบทนี้

ตอนที่ 2 จะเป็นการอธิบายด้วยบทนิยามที่รัดกุมซึ่งย่อมใช้ได้โดยทั่วไป ซึ่งจะอธิบายในบทที่ 3

2.1 ความต่อเนื่องและลิมิต

แนวคิดคร่าว ๆ เรื่องความต่อเนื่องมีดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ฟังก์ชันหนึ่งซึ่งมีค่าที่จุด a ถ้ากราฟของ f บนช่วงหนึ่งจากจุด a ไปทางขวาของ a มีลักษณะเป็นเส้นต่อเนื่อง เรากล่าวว่า **f ต่อเนื่องที่ a จากทางขวา**

ถ้ากราฟของ f บนช่วงหนึ่งจากจุด a ไปทางซ้ายของ a มีลักษณะเป็นเส้นต่อเนื่อง เรากล่าวว่า **f ต่อเนื่องที่ a จากทางซ้าย**

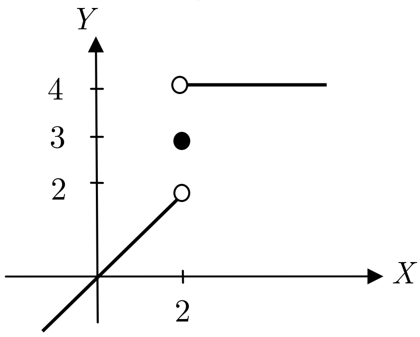
ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ a ทั้งจากทางขวาและจากทางซ้าย เรากล่าวว่า **f ต่อเนื่องที่ a**

ตัวอย่าง 2.1

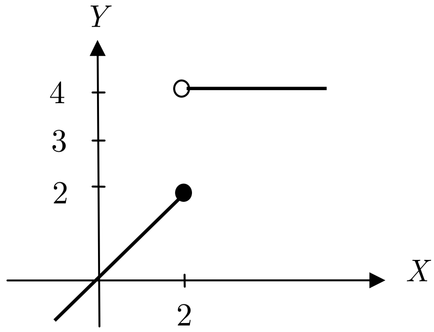
จงพิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งมีค่ากำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} x & ,x < 2 \\ c & ,x = 2 \\ 4 & ,x > 2 \end{cases}$$

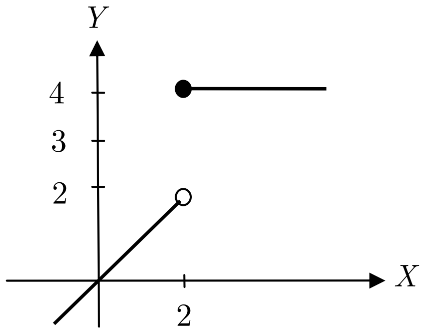
ในกรณีที่ c มีค่า 3, 2 และ 4



รูปที่ 1 กรณี $c = 3$



รูปที่ 2 กรณี $c = 2$



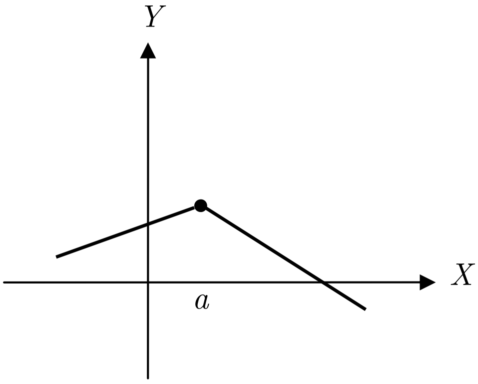
รูปที่ 3 กรณี $c = 4$

สังเกตว่า ถ้าเราเริ่มต้นจากจุด $(2, f(2))$ ลากไปตามเส้นกราฟทางขวามือของ 2 แล้วเราไม่ต้องยกมือได้ช่วงหนึ่ง แสดงว่า f **ต่อเนื่องที่ 2 จากทางขวา** ทำนองเดียวกัน ถ้าลากตามเส้นกราฟไปทางซ้ายมือของ 2 โดยที่ไม่ต้องยกมือได้ช่วงหนึ่ง แสดงว่า f **ต่อเนื่องที่ 2 จากทางซ้าย** และถ้าเราสามารถลากไปตามเส้นกราฟผ่านจุด 2 จากซ้ายไปขวาบนช่วงหนึ่งได้โดยไม่ต้องยกมือ แสดงว่า f **ต่อเนื่องที่ 2**

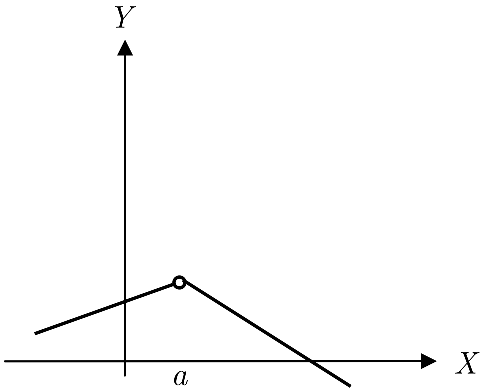
ดังนั้น ในรูปที่ 1 ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ 2 ทั้งจากทางซ้ายและทางขวา สำหรับรูปที่ 2 กรณี $c = 2$ เราได้ว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ 2 จากทางซ้าย แต่ไม่ต่อเนื่องที่ 2 จากทางขวา ส่วนในรูปที่ 3 กรณี $c = 4$ จะเห็นว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ 2 จากทางซ้าย แต่ต่อเนื่องที่ 2 จากทางขวา

ตัวอย่าง 2.2

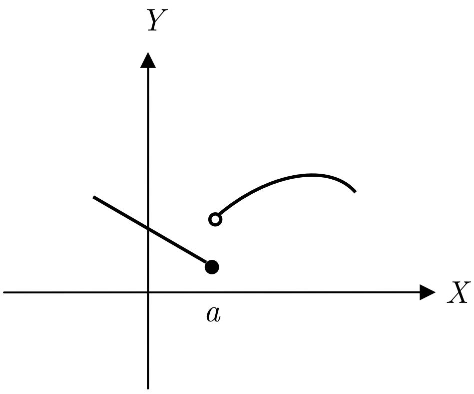
พิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันจากกราฟรูปแบบต่าง ๆ



รูปที่ 1 f ต่อเนื่องที่ a

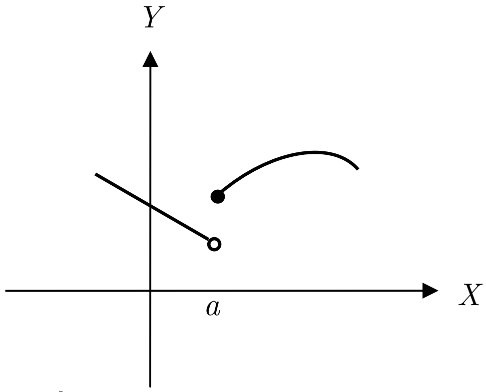


รูปที่ 2 f ไม่ต่อเนื่องที่ a



รูปที่ 3 f ไม่ต่อเนื่องที่ a

เพราะ f ไม่ต่อเนื่องที่ a จากทางขวา



รูปที่ 4 f ไม่ต่อเนื่องที่ a

เพราะ f ไม่ต่อเนื่องที่ a จากทางซ้าย

ข้อสังเกต

ฟังก์ชันจะต่อเนื่องที่จุดใดๆ ฟังก์ชันนั้นต้องมีค่าที่จุดนั้น หากฟังก์ชันไม่มีค่าที่จุดใดๆ ฟังก์ชันย่อมไม่ต่อเนื่องที่จุดนั้นๆ ตัวอย่างเช่น $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$

แนวคิดคร่าวๆ เรื่องลิมิตมีดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ฟังก์ชันหนึ่งซึ่งมีค่าที่จุด a หรือไม่ก็ได้ ถ้าการกำหนดให้ $f(a) = L$ ทำให้ f มีความต่อเนื่องที่ a เรากล่าวว่า L **เป็นลิมิตของ f ที่** a และเราเขียนแสดงด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

และถ้าไม่มีจำนวนจริง L ดังข้างต้น เรากล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ **ไม่มีค่า**

ถ้าการกำหนดให้ $f(a) = L$ ทำให้ f ต่อเนื่องที่ a จากทางขวา เรากล่าวว่า L **เป็นลิมิตทางขวาของ f ที่** a และเราเขียนแสดงด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

และถ้าไม่มีจำนวนจริง L ดังข้างต้น เรากล่าวว่า $\lim_{x\to a^+} f(x)$ **ไม่มีค่า**

ถ้าการกำหนดให้ $f(a) = L$ ทำให้ f ต่อเนื่องที่ a จากทางซ้าย เรากล่าวว่า L **เป็นลิมิตทางซ้ายของ f ที่** a และเราเขียนแสดงด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

และถ้าไม่มีจำนวนจริง L ดังข้างต้น เรากล่าวว่า $\lim_{x\to a^-} f(x)$ **ไม่มีค่า**

การพิจารณาความต่อเนื่องและลิมิตของฟังก์ชันนั้น เราอาจทำได้โดยการใช้ทฤษฎีบทต่างๆ ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1

ถ้า f กับ g ต่อเนื่องที่ a จะได้ว่า $f+g, f-g$ และ fg ต่อเนื่องที่ a ด้วย และถ้า $g(a) \neq 0$ จะได้ด้วยว่า f/g ก็ต่อเนื่องที่ a ด้วยเช่นกัน

ทฤษฎีบท 2.2

ให้ $h(x) = f(g(x))$ ถ้า g ต่อเนื่องที่ a และ f ต่อเนื่องที่ $g(a)$ จะได้ว่า h ก็ต่อเนื่องที่ a

โดยการใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวมานี้ ประกอบกับความรู้เกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน เราจะทราบได้ถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันอื่นๆ อีกมากมาย เช่น เราทราบว่า

$$f(x) = c, \text{ (} c \text{ เป็นค่าคงตัว)}$$

$$g(x) = x$$

ต่อเนื่องที่จุดใดๆ ก็ทราบได้ด้วยว่า

$$h(x) = 2x,$$

$$k(x) = 2x + 7$$

และโดยทั่วๆ ไป $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

ล้วนเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกๆ จุด

นั่นคือทราบได้ว่าบรรดา**ฟังก์ชันพหุนาม** (polynomial function) ล้วนเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกๆ จุด ดังนั้น **ฟังก์ชันตรรกยะ** (rational function) ซึ่งเขียนได้เป็นเศษส่วนของฟังก์ชันพหุนาม ก็ย่อมต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดที่ฟังก์ชันพหุนามที่เป็นส่วนไม่เป็น ศูนย์ เช่น

$$f(x) = \frac{3 - 2x}{x^2 - 4}$$

ต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดที่ไม่ใช่ 2 หรือ -2

ทฤษฎีบท 2.3

ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$$

และถ้า $B \neq 0$ จะได้ด้วยว่า

$$\lim_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$$

หมายเหตุ

ทฤษฎีบท 2.3 คงเป็นจริงหากเราแทน $\lim_{x\to a}$ ด้วย $\lim_{x\to a^+}$ หรือด้วย $\lim_{x\to a^-}$

ทฤษฎีบท 2.4

ให้ $h(x) = f(g(x))$ ถ้า $\lim_{x\to a} g(x) = B$ และ f ต่อเนื่องที่ B จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a} h(x) = f(B)$$

หรือ อีกนัยหนึ่งเราเขียนได้ว่า

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

ตัวอย่าง 2.3

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-7x+3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x-1)}{(x+1)}=\frac{5}{4} \qquad \square$$

สังเกตว่าเนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 3} x^2-2x-3=0$ เราจึงใช้ ทฤษฎีบท 2.4 กับตัวอย่างข้างบนไม่ได้

ข้อสังเกต

L เป็นลิมิตของ f ที่ a หมายถึง การกำหนดให้ $f(a)=L$ ทำให้ f ต่อเนื่องที่ a นั่นคือ f ต่อเนื่องที่ a จากทางซ้ายและจากทางขวา ดังนั้น

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x\to a^-} f(x)=L \text{ และ } \lim_{x\to a^+} f(x)=L}$$

ฉะนั้น ถ้า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ไม่มีค่า หรือ มีค่าแต่ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ จะไม่มีค่า

ตัวอย่าง 2.4

I.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+}\frac{\left|2x^2-7x+3\right|}{x^2-2x-3}&=\lim_{x\to 3^+}\frac{\left|(x-3)(2x-1)\right|}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{|x-3||2x-1|}{(x-3)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)|2x-1|}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{|2x-1|}{(x+1)}\\&=\lim_{x\to 3^+}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{5}{4}\end{aligned} \qquad \square$$

II.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-}\frac{\left|2x^2-7x+3\right|}{x^2-2x-3}&=\lim_{x\to 3^-}\frac{\left|(x-3)(2x-1)\right|}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3||2x-1|}{(x-3)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)|2x-1|}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-|2x-1|}{(x+1)}\\&=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(2x-1)}{x+1}=\frac{-5}{4}\end{aligned} \qquad \square$$

III. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left|2x^2-7x+3\right|}{x^2-2x-3}$ ไม่มีค่า เนื่องจาก

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\left|2x^2-7x+3\right|}{x^2-2x-3}\neq\lim_{x\to 3^+}\frac{\left|2x^2-7x+3\right|}{x^2-2x-3} \qquad \square$$

แบบฝึกหัด 2.1

จงพิจารณาหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} (x+2)$

2. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt[3]{x^4+2x+5}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{x-3}$

6. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{9-x}$

7. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x^2+5x-14}{3x^2-4x-4}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^3-8}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{x-1}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x-2\,|\,x\,|}{3x-|\,x\,|}$

11. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-} \dfrac{5+|\,2x-3\,|}{x^2-x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{|\,x\,|}{x}+1\right)^2$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+x\sqrt[3]{x+8}}{1-\sqrt{x^2+1}}$

15. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ,x<2 \\ 1 & ,x\geq 2 \end{cases}$

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

16. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & ; \quad x\leq 0 \\ (x+1)^2+2 & ; \quad 0<x\leq 3 \\ 10 & ; \quad x>3 \end{cases}$

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

17. กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x-3}{|\,x-3\,|}$ $\quad ,x\neq 3$

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

18. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2-4}$ $, x \neq \pm 2$

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

19. กำหนดให้ $f(x) = x + [x]$, $x \in [0,2)$ โดยที่ $[x]$ คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x จงพิจารณาว่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ มีค่าหรือไม่

เรากล่าวว่าฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่ง**ต่อเนื่องบนช่วง** (a,b) ถ้าฟังก์ชันนั้นต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด ภายในช่วงนั้น เรากล่าวว่าฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่ง**ต่อเนื่องบนช่วง** $[a,b]$ ถ้าฟังก์ชันนั้นต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดภายในช่วงนั้น และ ต่อเนื่องจากทางขวาที่ a และ ต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ b

ทฤษฎีบท 2.5

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ k เป็นค่าที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ กับ $f(b)$ ย่อมได้ว่ามี c ระหว่าง a กับ b ที่ทำให้ $f(c) = k$

ทฤษฎีบท 2.6

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ย่อมได้ว่า f มีทั้งค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในช่วง $[a,b]$ และ f มีค่าทุก ๆ ค่าที่อยู่ระหว่างค่าสูงสุดกับค่าต่ำสุด

บทนิยาม 2.1

ถ้า $f(x) > 0$ ทุก ๆ x ในช่วงเปิดจาก a ไปทางขวาของ a อย่างน้อยหนึ่งช่วงเปิดและ $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้วเรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

บทนิยาม 2.2

ถ้า $f(x) > 0$ ทุก ๆ x ในช่วงเปิดจาก a ไปทางซ้ายของ a อย่างน้อยหนึ่งช่วงเปิด และ $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ แล้วเรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

บทนิยาม 2.3

ถ้าทั้ง $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

ตัวอย่าง 2.5

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x \to 0^+$ ดังนั้นพิจารณากรณี $x > 0$ จะได้ว่า $\dfrac{1}{x} > 0$

และ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

ฉะนั้นจากบทนิยาม 2.1 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ □

ตัวอย่าง 2.6

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{5x+1}{x^2-2x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x \to 2^+$ ดังนั้นพิจารณากรณี $x > 2$ จะได้ว่า $x - 2 > 0$

เนื่องจาก $x > 2$ ดังนั้น $x > 0$ และ $x > -\dfrac{1}{5}$ หรือ $5x + 1 > 0$

ดังนั้น $f(x) := \dfrac{5x+1}{x^2-2x} = \dfrac{5x+1}{x(x-2)} > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{5x+1}{x^2-2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-2x}{5x+1} = \frac{0}{11} = 0$$

เพราะฉะนั้นจากบทนิยาม 2.1 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{5x+1}{x^2-2x} = +\infty$ □

ตัวอย่าง 2.7

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $x \to 2^-$ ดังนั้นพิจารณากรณี $x < 2$ แต่ใกล้ๆ 2 จะได้ว่า $x + 1 > 0$ และ $(x-2)^2 > 0$ ดังนั้น $f(x) := \dfrac{x+1}{(x-2)^2} > 0$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\frac{x+1}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)^2}{x+1} = \frac{0}{3} = 0$$

เพราะฉะนั้นจากบทนิยาม 2.2 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = +\infty$ □

ตัวอย่าง 2.8

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

วิธีทำ จะแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{(x-2)^2}=+\infty$ ทำได้ดังนี้

เนื่องจาก $x\to 2^+$ ดังนั้นพิจารณากรณี $x>2$ จะได้ว่า $x+1>0$ และ $(x-2)^2>0$

ดังนั้น $f(x):=\dfrac{x+1}{(x-2)^2}>0$ และ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{(x-2)^2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)^2}{x+1}=0$

และจากตัวอย่าง 2.7 ได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{(x-2)^2}=+\infty$

จากบทนิยาม 2.3 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{(x-2)^2}=+\infty$ □

บทนิยาม 2.4

ถ้า $f(x)<0$ ทุกๆ x ในช่วงเปิดจาก a ไปทางขวาของ a อย่างน้อยหนึ่งช่วงเปิดและ $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{f(x)}=0$ แล้วเรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$

บทนิยาม 2.5

ถ้า $f(x)<0$ ทุกๆ x ในช่วงเปิดจาก a ไปทางซ้ายของ a อย่างน้อยหนึ่งช่วงเปิดและ $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{f(x)}=0$ แล้วเรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$

บทนิยาม 2.6

ถ้าทั้ง $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$

เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$

ตัวอย่าง 2.9

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-4}{|x-3|}$

วิธีทำ เราต้องพิจารณาค่า I. $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-4}{|x-3|}$ และ II. $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-4}{|x-3|}$

I. เนื่องจาก $x \to 3^-$ ดังนั้นพิจารณากรณี $x < 3$ แต่ใกล้ๆ 3 จะได้ว่า $x - 4 < 0$ และ $|x-3| > 0$ ดังนั้น $f(x) := \dfrac{x-4}{|x-3|} < 0$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{\dfrac{x-4}{|x-3|}} = \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-4} = \frac{0}{-1} = 0$$

เพราะฉะนั้นจากบทนิยาม 2.5 สรุปได้ว่า $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x-4}{|x-3|} = -\infty$

II. เนื่องจาก $x \to 3^+$ ดังนั้นพิจารณากรณี $x > 3$ แต่ใกล้ๆ 3 จะได้ว่า $x - 4 < 0$ และ $|x-3| > 0$ ดังนั้น $f(x) := \dfrac{x-4}{|x-3|} < 0$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{\dfrac{x-4}{|x-3|}} = \lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-4} = \frac{0}{-1} = 0$$

เพราะฉะนั้นจากบทนิยาม 2.4 สรุปได้ว่า $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x-4}{|x-3|} = -\infty$

จาก I., II. และบทนิยาม 2.6 สรุปได้ว่า $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-4}{|x-3|} = -\infty$ □

แบบฝึกหัด 2.2

1. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{x-4}{x-5}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{x}+1}{x-2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x}+1}{x-2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x-4}{(x+3)^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x^2-1}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to -3^-} \frac{1}{\sqrt{-x-3}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3x+4}{x-1}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{10+\sqrt{1+x^2}}{x}$

บทนิยาม 2.7

ในกรณีที่โดเมนของ f ครอบคลุมช่วงในรูป $(a,+\infty)$ เรานิยาม

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to0^+} f(\frac{1}{t})$$

และในกรณีที่โดเมนของ f ครอบคลุมช่วงในรูป $(-\infty,a)$ เรานิยาม

$$\lim_{x\to\,-\infty} f(x) = \lim_{t\to0^-} f(\frac{1}{t})$$

ตัวอย่าง 2.10

จงพิจารณาหาค่าของ $\displaystyle\lim_{x\to\,+\infty} \frac{2x^3+5x-7}{4x^3-x^2+x-1}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to\,+\infty} \frac{2x^3+5x-7}{4x^3-x^2+x-1} = \lim_{t\to\,0^+} \frac{\frac{2}{t^3}+\frac{5}{t}-7}{\frac{4}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}-1}$$

$$= \lim_{t\to\,0^+} \frac{2+5t^2-7t^3}{4-t+t^2-t^3} = \frac{1}{2}$$ □

ตัวอย่าง 2.11

จงพิจารณาหาค่าของ $\displaystyle\lim_{x\to\,-\infty} \frac{2x^3+5x-7}{4x^3-x^2+x-1}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to\,-\infty} \frac{2x^3+5x-7}{4x^3-x^2+x-1} = \lim_{t\to\,0^-} \frac{\frac{2}{t^3}+\frac{5}{t}-7}{\frac{4}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}-1}$$

$$= \lim_{t\to\,0^-} \frac{2+5t^2-7t^3}{4-t+t^2-t^3} = \frac{1}{2}$$ □

ตัวอย่าง 2.12

จงพิจารณาหาค่าของ $\displaystyle\lim_{x\to\,+\infty} \frac{x}{1+|x|}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to\,+\infty} \frac{x}{1+|x|} = \lim_{t\to\,0^+} \frac{\frac{1}{t}}{1+\left|\frac{1}{t}\right|} = \lim_{t\to\,0^+} \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\,0^+} \frac{1}{t+1} = 1$$ □

ตัวอย่าง 2.13

จงพิจารณาหาค่าของ $\displaystyle\lim_{x\to\,-\infty}\frac{x}{1+|x|}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to\,-\infty}\frac{x}{1+|x|}=\lim_{t\to\,0^-}\frac{\frac{1}{t}}{1+\left|\frac{1}{t}\right|}=\lim_{t\to\,0^-}\frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\,0^-}\frac{1}{t-1}=-1$$ $\square$

บทนิยาม 2.8

ถ้า $f(x)>0$ ทุกๆ x ในช่วงอนันต์จากจุดใดจุดหนึ่งไปทางขวาของจุดนั้น และ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ เรากล่าวว่า

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

บทนิยาม 2.9

ถ้า $f(x)>0$ ทุกๆ x ในช่วงอนันต์จากจุดใดจุดหนึ่งไปทางซ้ายของจุดนั้น และ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ เรากล่าวว่า

$$\lim_{x\to\,-\infty}f(x)=+\infty$$

บทนิยาม 2.10

ถ้า $f(x)<0$ ทุกๆ x ในช่วงอนันต์จากจุดใดจุดหนึ่งไปทางขวาของจุดนั้น และ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ เรากล่าวว่า

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

บทนิยาม 2.11

ถ้า $f(x)<0$ ทุกๆ x ในช่วงอนันต์จากจุดใดจุดหนึ่งไปทางขวาของจุดนั้น และ $\displaystyle\lim_{x\to\,-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ เรากล่าวว่า

$$\lim_{x\to\,-\infty}f(x)=-\infty$$

ตัวอย่าง 2.14

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-x^2}{x-4}$

วิธีที่ 1 จากบทนิยาม 2.7 ได้ว่า $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-x^2}{x-4} = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{\left(\dfrac{1}{t}\right)-\left(\dfrac{1}{t}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{t}\right)-4} = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{t-1}{t-4t^2}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{t-1}{t-4t^2} = -\infty$

เนื่องจาก $t \to 0^+$ ดังนั้นพิจารณากรณี $t > 0$ แต่ใกล้ๆ 0 ซึ่งจะได้ว่า $t-1 < 0$ และ $1-4t > 0$ ดังนั้น $f(t) \coloneqq \dfrac{t-1}{t-4t^2} = \dfrac{t-1}{t(1-4t)} < 0$

และ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{f(t)} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\dfrac{t-1}{t-4t^2}} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{t-4t^2}{t-1} = \dfrac{0}{-1} = 0$

จากบทนิยาม 2.5 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{t-1}{t-4t^2} = -\infty$ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-x^2}{x-4} = -\infty$ □

วิธีที่ 2 ให้ $f(x) \coloneqq \dfrac{x-x^2}{x-4} = \dfrac{x(1-x)}{x-4} < 0$ เมื่อ $x \to \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-4}{x-x^2} = \lim_{t\to0^+} \frac{\left(\dfrac{1}{t}\right)-4}{\left(\dfrac{1}{t}\right)-\left(\dfrac{1}{t}\right)^2} = \lim_{t\to0^+} \frac{t-4t^2}{t-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

ดังนั้นจากบทนิยาม 2.10 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-x^2}{x-4} = -\infty$ □

ตัวอย่าง 2.15

จงพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{x-1}$

วิธีทำ ให้ $f(x) \coloneqq \dfrac{x^3+1}{x-1} > 0$ เมื่อ $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^3+1} = \lim_{t\to0^-} \frac{\left(\dfrac{1}{t}\right)-1}{\left(\dfrac{1}{t}\right)^3+1} = \lim_{t\to0^-} \frac{t^2-t^3}{1+t^3} = \frac{0}{1} = 0$$

ดังนั้นจากบทนิยาม 2.9 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{x-1} = +\infty$ □

แบบฝึกหัด 2.3

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-2x}{x^2+3x-5}$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{3-x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-4}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{2+x}$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3+x^2-2x}{5x-x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3+x^2-2x}{5x-x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7-x^2}{\sqrt{2x^2-x-2}}$

9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+x+1}{3x^3+x^2+4}$

10. $\lim\limits_{z\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{z^3+1}}{3z-5}$

11. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2+x-x^2}{\sqrt{1-4x-x^3}}$

12. $\lim\limits_{x\to \infty} x(x-\sqrt{x^2+4})$

13. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x+4}$

14. $\lim\limits_{v\to \infty} \dfrac{\sqrt{v^2+1}}{v+4}$

15. $\lim\limits_{v\to -\infty} \dfrac{\sqrt{v^2+1}}{v+4}$

16. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$

17. $\lim\limits_{x\to \infty} (\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4})$

18. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{10+\sqrt{1+x^2}}{x}$

19. $\lim\limits_{z\to -\infty} \dfrac{z^2+1}{3z^{\frac{1}{3}}-1}$

20. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1})$

21. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^6-x^4}}{x^2+x-12}$

22. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-|x|}{|x^3-2x^2-x+2|}$

2.2 ลิมิตของลำดับของจำนวนจริง

ความคิดที่เกี่ยวข้องกับความคิดเรื่องความต่อเนื่องและลิมิตของฟังก์ชันอย่างหนึ่งคือความคิดเรื่องลิมิตของลำดับของจำนวนจริง

คำว่า**ลำดับ**(sequence) โดยทั่วๆ ไป หมายถึง ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ ดังนั้น **ลำดับของจำนวนจริง** ก็คือฟังก์ชันค่าจริงที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ ตัวอย่างเช่น

$$a = \left\{\left(n, (-1)^n \frac{n}{n+1}\right) \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

ต่อไปนี้เราจะเรียกลำดับของจำนวนจริงแต่เพียงย่อๆว่า "ลำดับ"

สำหรับลำดับ s ใดๆ เราเรียกค่า $s(n)$ ว่า**พจน์ที่ n** ของ s และนิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ s_n ลำดับ $a = \left\{\left(n, (-1)^n \frac{n}{n+1}\right) \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$ จึงมีพจน์ที่ n เป็น $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

นอกจากนั้นเราไม่นิยมเขียนพรรณนาลำดับเป็นเซตของคู่อันดับในรูป

$$\left\{\left(n, (-1)^n \frac{n}{n+1}\right) \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

แต่นิยมเขียนพรรณนาโดยการบอกพจน์ที่ n ไว้ในวงเล็บปีกกา เช่นเขียนลำดับข้างบนด้วยสัญลักษณ์

$$\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\right\}$$

ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า L เป็นจำนวนจริงซึ่งทุกช่วงเปิดที่ล้อม L มีพจน์ของลำดับอยู่ด้วยเป็นจำนวนอนันต์ หรืออีกนัยคือ มีพจน์ของลำดับ $\{s_n\}$ เป็นจำนวนอนันต์พจน์ลู่เข้าสู่ L เรากล่าวว่า L เป็น **จุดลิมิต** (limit point) ของลำดับ $\{s_n\}$

ตัวอย่าง 2.16

จงพิจารณาหาจุดลิมิตของลำดับ $\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\right\}$

วิธีทำ ให้ $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

จาก

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} & a_2 &= \frac{2}{3} \\ a_3 &= -\frac{3}{4} & a_4 &= \frac{4}{5} \\ a_5 &= -\frac{5}{6} & a_6 &= \frac{6}{7} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

สังเกตเห็นว่า ลำดับทางซ้ายมือลู่เข้า -1 และลำดับทางขวามือลู่เข้า 1 ซึ่งแสดงได้ดังนี้
กรณี n เป็นจำนวนคู่ เขียน $n = 2k$ จะได้ว่า

$$a_n = a_{2k} = (-1)^{2k}\frac{2k}{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \text{ และ } \lim_{k\to\infty}\frac{2k}{2k+1} = 1$$

นั่นคือ มีพจน์ของลำดับ $\{a_n\}$ เป็นจำนวนอนันต์พจน์ลู่เข้าสู่ 1 ดังนั้น 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$
กรณี n เป็นจำนวนคี่ เขียน $n = 2k+1$ จะได้ว่า

$$a_n = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}\frac{2k+1}{(2k+1)+1} = -\frac{2k+1}{2k+2} \text{ และ } \lim_{k\to\infty} -\frac{2k+1}{2k+2} = -1$$

นั่นคือ มีพจน์ของลำดับเป็นจำนวนอนันต์พจน์ลู่เข้าสู่ -1 ดังนั้น -1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ □

ข้อสังเกต

ถ้า A และ B เป็นเซตของจุดลิมิตของลำดับย่อย $\{a_{2k}\}$ และ $\{a_{2k+1}\}$ ของลำดับ $\{a_n\}$ แล้ว $A \cup B$ คือ เซตของจุดลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$

สำหรับลำดับใดๆ เรากล่าวว่า $+\infty$ **เป็นจุดลิมิตของลำดับ** ถ้าทุกๆ ช่วงเปิดในรูป $(a, +\infty)$ มีพจน์ของลำดับนั้นอยู่ด้วยเป็นจำนวนอนันต์

สำหรับลำดับใดๆ เรากล่าวว่า $-\infty$ **เป็นจุดลิมิตของลำดับ** ถ้าทุกๆ ช่วงเปิดในรูป $(-\infty, b)$ มีพจน์ของลำดับนั้นอยู่ด้วยเป็นจำนวนอนันต์ ตัวอย่างเช่น $\{(-1)^n n\}$ มีทั้ง $+\infty$ และ $-\infty$ เป็นจุดลิมิต

ตัวอย่าง 2.17

จงแสดงว่า $+\infty$ และ $-\infty$ เป็นจุดลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ โดยที่ $a_n = (-1)^n n$

วิธีทำ กรณี n เป็นจำนวนคู่ เขียน $n = 2k$ จะได้ว่า

$$a_n = a_{2k} = (-1)^{2k}(2k) = 2k \text{ และ } \lim_{k\to\infty} 2k = +\infty$$

กรณี n เป็นจำนวนคี่ เขียน $n = 2k+1$ จะได้ว่า

$$a_n = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}(2k+1) = -(2k+1) \text{ และ } \lim_{k\to\infty} -(2k+1) = -\infty$$

ดังนั้น ได้ว่า $+\infty$ และ $-\infty$ เป็นจุดลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ □

ถ้าลำดับใดมีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว เรากล่าวว่า ลำดับนั้น **มีลิมิต** และเรียกจุดลิมิตเพียงค่าเดียวนั้นว่า **ลิมิต** ของลำดับนั้น ถ้า L เป็นลิมิตของ $\{s_n\}$ เราเขียนแสดงด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L$$

ถ้าลำดับใดมีลิมิตเป็นจำนวนจริง เรากล่าวว่าลำดับนั้นเป็น **ลำดับลู่เข้า** (convergent sequence) มิเช่นนั้นเรากล่าวว่าเป็น **ลำดับลู่ออก** (divergent sequence)

ดังนั้นถ้าลำดับใดมีลิมิตเป็นจำนวนจริง L เราก็กล่าวว่าลำดับนี้ลู่เข้าหา L แต่ถ้าลำดับมีลิมิตเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ เรากล่าวว่า ลำดับดังกล่าว**ลู่ออกแบบ** $+\infty$ **หรือ** $-\infty$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 2.18

จงพิจารณาว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก โดยที่ $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

วิธีทำ กรณี n เป็นจำนวนคู่ เขียน $n = 2k$ จะได้ว่า

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k} \text{ และ } \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k} = 0$$

กรณี n เป็นจำนวนคี่ เขียน $n = 2k+1$ จะได้ว่า

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \text{ และ } \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1} = 0$$

ดังนั้น ได้ว่า 0 เป็นจุดลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$

เนื่องจากลำดับ $\{a_n\}$ มีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว ดังนั้น ลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น 0

นั่นคือ ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ 0 $\square$

ตัวอย่าง 2.19

จงพิจารณาว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก โดยที่ $a_n = \left[\dfrac{n}{2}\right] n^{(-1)^n}$ เมื่อ $[x]$ คือจำนวนเต็มมากสุดที่มีค่าไม่เกิน x

วิธีทำ กรณี n เป็นจำนวนคู่ เขียน $n = 2k$ จะได้ว่า

$$a_n = a_{2k} = k \cdot 2k = 2k^2 \text{ และ } \lim_{k\to\infty} 2k^2 = +\infty$$

กรณี n เป็นจำนวนคี่ เขียน $n = 2k+1$ จะได้ว่า

$$a_n = a_{2k+1} = k\cdot(2k+1)^{-1} = \frac{k}{2k+1} \text{ และ } \lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ได้ว่า $+\infty$ และ $\dfrac{1}{2}$ เป็นจุดลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$

เนื่องจาก $\{a_n\}$ มีจุดลิมิตมากกว่าหนึ่งจุด ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก $\square$

ทฤษฎีบท 2.7

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$ โดยที่ $A,\ B$ เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$

3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{A}{B}$

ทั้งนี้ในข้อ 3) นั้น B ต้องไม่เป็นศูนย์

ทฤษฎีบท 2.8

ถ้า $a_n \le c_n \le b_n$ ทุกๆ n และถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$

แล้วได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

ทฤษฎีบท 2.9

ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ c และถ้า $\lim_{n\to\infty} x_n = c$

แล้วได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$$

ทฤษฎีบท 2.10

ถ้า $\lim_{x\to c} f(x) = L$ และถ้า $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ โดยที่ $x_n \ne c$ ทุกๆ n

แล้วได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

ตัวอย่าง 2.20

จงพิจารณาหาค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1}$

วิธีทำ สังเกตว่า จะใช้ทฤษฎีบท 2.7 (3) ไม่ได้ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} n$ และ $\lim_{n\to\infty} 3n-1$ ไม่เป็นจำนวนจริง ดังนั้น เราต้องจัดรูปซึ่งได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}}$$

และเนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} 3-\frac{1}{n}=3\neq 0$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 2.7 สรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}1}{\lim_{n\to\infty}3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 2.21

จงพิจารณาหาค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$

วิธีทำ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$ $\square$

ตัวอย่าง 2.22

จงพิจารณาหาค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(2n+1)}-\sqrt{n(2n-1)}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\sqrt{n(2n+1)}-\sqrt{n(2n-1)} &= \left(\sqrt{n(2n+1)}-\sqrt{n(2n-1)}\right)\frac{\sqrt{n(2n+1)}+\sqrt{n(2n-1)}}{\sqrt{n(2n+1)}+\sqrt{n(2n-1)}} \\
&= \frac{n(2n+1)-n(2n-1)}{\sqrt{n(2n+1)}+\sqrt{n(2n-1)}} \\
&= \frac{2n}{\sqrt{n(2n+1)}+\sqrt{n(2n-1)}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}2\pm\frac{1}{n}=2$ และ $f(x):=\sqrt{x}$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ ดังนั้น

โดยทฤษฎีบท 2.9 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pm\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}f\left(2\pm\frac{1}{n}\right)=f(2)=\sqrt{2}$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(2n+1)}-\sqrt{n(2n-1)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \qquad \square$$

แบบฝึกหัด 2.4

จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก กรณีที่ลำดับลู่เข้า จงหาว่า ลำดับนั้นลู่เข้าหาค่าใด กรณีที่ลำดับลู่ออก จงให้เหตุผลประกอบพร้อมทั้งระบุว่าเป็นลำดับลู่ออกแบบ $-\infty$, $+\infty$ หรือไม่ใช่ทั้งสอง

1. $\left\{\dfrac{n-2}{n+1}\right\}$
2. $\left\{(-1)^n\right\}$
3. $\left\{\dfrac{n^2}{2n+1}\right\}$
4. $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}$
5. $\left\{\dfrac{\sqrt{n^2+1}-3}{2n-1}\right\}$
6. $\left\{\sin(\dfrac{n\pi}{2})\right\}$
7. $\left\{\dfrac{(2n-1)^3+1}{8-n^3}\right\}$
8. $\left\{\dfrac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}\right\}$
9. $\left\{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+2}\right\}$
10. $\left\{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right\}$