บทที่ 3
อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์

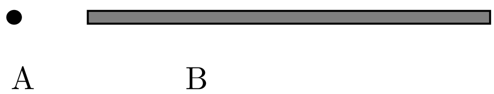
3.1 ความหมายของอินทิกรัล

Morris Kleine กล่าวไว้ในหนังสือชื่อ Mathematics and the Physical World ว่านิวตันต้องรอถึง 20 ปี กว่าจะพิมพ์เผยแพร่กฎข้อที่ 3 ของเขา เพราะต้องรอให้พิสูจน์ได้เสียก่อนว่าการคำนวณแรงดึงดูดระหว่างวัตถุรูปทรงกลมนั้นอาจคำนวณได้โดยคิดถือเอาว่ามวลของทรงกลมนั้นอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม การพิสูจน์ต้องใช้ความคิดเรื่องอินทิกรัล (integral) ซึ่งเป็นเรื่องหนึ่งของแคลคูลัส ก่อนอื่นเรามาพิจารณาดูกันว่าเหตุใดจึงน่าสงสัยว่าเราคิดเอาไม่ได้ว่ามวลของวัตถุต่างๆที่ดึงดูดกันนั้นต้องอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวัตถุนั้นๆ

ลองพิจารณาแรงดึงดูดระหว่างวัตถุ A กับ B ในสองกรณีต่อไปนี้เปรียบเทียบกัน

(ก)

(ข)



กรณีใดมากกว่ากัน ? กรณีใดควรจะมีแรงดึงดูดมากกว่า?

กรณี (ข) วัตถุ B ประกอบด้วย B ในกรณี (ก) รวมกับส่วนที่ยาวขึ้นกว่ากรณี (ก) ส่วนที่ยาวขึ้นนี้ย่อมทำให้ได้แรงดึงดูดเพิ่มขึ้น จึงตอบว่าแรงดึงดูดในกรณี (ข) มากกว่าในกรณี (ก)

แต่ถ้าเราใช้กฎของนิวตันคำนวณหาแรงดึงดูด โดยการถือเอาว่ามวลของ B อยู่ที่จุดศูนย์กลางของ B ได้ดังต่อไปนี้

ให้ A มีมวล m และ A อยู่ห่างจาก B เป็นระยะ L

กรณี (ก) สมมติ B ยาว $2L$ และมีมวล M

จะได้ว่ามวลของ A และ B อยู่ห่างกัน $L+L = 2L$

ดังนั้น แรงดึงดูดคือ $\dfrac{GmM}{(2L)^2} = \dfrac{GmM}{4L^2} = \dfrac{2}{8}\dfrac{GmM}{L^2}$

กรณี (ข) สมมติ B ยาว $4L$ ดังนั้นมีมวล $2M$

จะได้ว่ามวลของ A และ B อยู่ห่างกัน $L+2L = 3L$

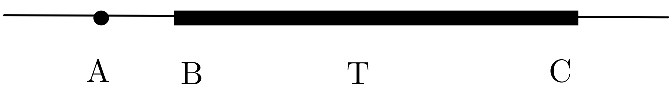
ดังนั้น แรงดึงดูดคือ $\dfrac{GmM}{(3L)^2} = \dfrac{Gm(2M)}{9L^2} = \dfrac{2}{9}\dfrac{GmM}{L^2}$

ซึ่งจะพบว่า การถือเอาว่ามวลของ B อยู่ที่จุดศูนย์กลางของ B คำนวณแรงดึงดูดในกรณี (ข) น้อยกว่าในกรณี (ก) ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่ควรเป็น

ตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นแสดงให้เห็นว่าการคำนวณแรงดึงดูดระหว่างวัตถุโดยทั่วๆไป ด้วยกฎของนิวตันนั้น เราไม่อาจที่จะถือเอาว่ามวลของวัตถุอยู่ที่จุดศูนย์กลางของมันเสมอไป ต่อไปนี้เป็นแนวทางในการคำนวณแรงดึงดูดระหว่างวัตถุในตัวอย่างที่กล่าวมา การคำนวณดังกล่าวนี้จะเป็นการประมาณค่า เพื่อหาว่าแรงดึงดูดที่แท้จริงนั้นมีค่าอยู่ระหว่างสองค่าใด

สมมติว่าวัตถุชิ้นที่หนึ่งเป็นจุด A มีมวล m วัตถุชิ้นที่สองเป็นส่วนของเส้นตรง BC ซึ่งมีความยาว L และมีมวล M วัตถุทั้งสองวางเรียงกันอยู่ดังรูป

ในที่นี้จะสมมติว่า A อยู่ที่จุดกำเนิด B อยู่ห่างจาก A ด้วยระยะทาง d และ BC มีความยาว L และจะถือเอาว่ามวลของ BC อยู่ระหว่าง B กับ C สมมติว่ามวลของ BC อยู่ที่จุด T ห่างจาก A เป็นระยะทาง t หน่วย



ดังนั้นแรงดึงดูด = $\dfrac{GmM}{t^2}$ แต่ t มีค่าอยู่ระหว่าง d กับ $d+L$ จึงได้ว่า

$$\frac{GmM}{(d+L)^2} \le \frac{GmM}{t^2} \le \frac{GmM}{d^2}$$

นั่นคือ เราได้ว่า แรงดึงดูดมีค่าอยู่ระหว่างค่าสองค่า

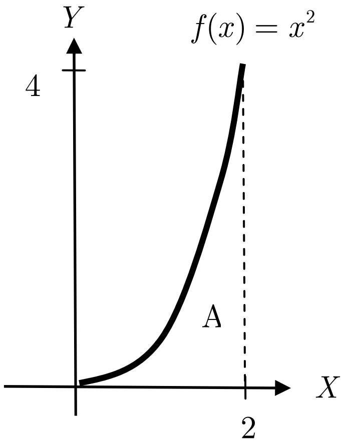
คราวนี้เราจะคิดเอาว่า BC ประกอบด้วยวัตถุสองชิ้น คือ BD กับ DC

แล้วประมาณค่าแรงดึงดูดของวัตถุแต่ละชิ้นว่าอยู่ระหว่างสองค่าใด เมื่อนำมารวมกันเราก็จะได้ค่าประมาณของแรงดึงดูดที่อยู่ในช่วงที่แคบเข้ามา หากเราแบ่ง BC ออกเป็นชิ้นที่ยิ่งเล็กลง แต่มีมากชิ้นขึ้น การประมาณก็จะยิ่งดีขึ้น

มีการคำนวณปริมาณต่าง ๆหลายอย่างที่ทำได้ด้วยวิธีการหาค่าประมาณเป็นช่วง โดยทำให้ช่วงที่ใช้ในการประมาณนั้นแคบเข้าเท่าใดก็ได้ ในทำนองเดียวกันกับที่เราทำกับการคำนวณแรงดึงดูด เราจะหยุดพักเรื่องแรงดึงดูดไว้ชั่วคราว จะไปดูการคำนวณอย่างอื่นในลักษณะเดียวกันที่เห็นได้ง่ายกว่ากันเสียก่อน แล้วจึงกลับมาพิจารณาการคำนวณแรงดึงดูดระหว่างวัตถุ อย่างอื่นที่ว่านี้ก็คือ *พื้นที่ใต้เส้นโค้ง*

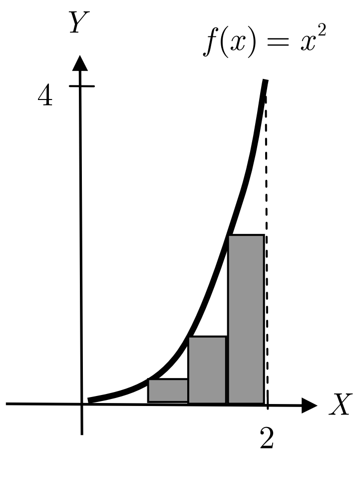
ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างการคำนวณหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างกราฟของฟังก์ชันกับช่วงปิดบนแกน X ฟังก์ชันที่จะนำมาเป็นตัวอย่างในที่นี้ คือ $f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 2$

ซึ่งมีกราฟในช่วงดังกล่าวดังนี้

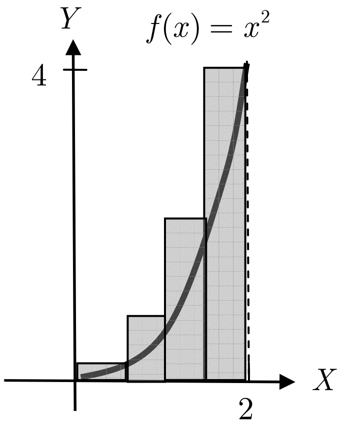


เราจะพิจารณาว่าพื้นที่ A ระหว่างกราฟกับช่วง $[0,2]$ มีค่าเท่าใด

โดยจะประมาณว่า A มีค่าอยู่ระหว่างสองค่าใด

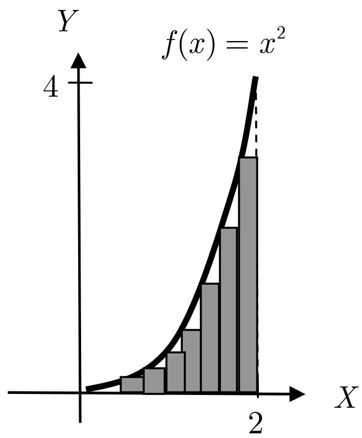


เราจะหาค่าที่น้อยกว่าพื้นที่ A โดยการแบ่งช่วง $[0,2]$ ออกเป็นส่วนย่อย ๆ แล้วสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนช่วงย่อย บรรจุลงในพื้นที่ดังกล่าวให้สูงมากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเหล่า นี้ย่อมน้อยกว่าพื้นที่ A



เราจะหาค่าที่มากกว่าพื้นที่ A โดยการแบ่งช่วง $[0,2]$ ออกเป็นส่วนย่อยๆ แล้วสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนช่วงย่อย ให้คลุมพื้นที่ดังกล่าว แต่ให้ต่ำที่สุดเท่าที่จะทำได้

ผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเหล่านี้ย่อมมากกว่าพื้นที่ A



สำหรับการแบ่งที่ใช้หาค่าที่น้อยกว่าพื้นที่ A นั้น ถ้าเราแบ่งช่วงให้เป็นส่วนย่อยยิ่งขึ้น ผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีค่ามากขึ้น จึงใกล้ค่าพื้นที่ A ยิ่งขึ้น

สำหรับการแบ่งที่ใช้หาค่าที่มากกว่าพื้นที่ A นั้น ถ้าเราแบ่งช่วงให้เป็นส่วนย่อยยิ่งขึ้น ผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีค่าน้อยลง และใกล้เคียงค่าพื้นที่ A ยิ่งขึ้นเช่นกัน

เราจะแบ่งช่วง $[0,2]$ ออกเป็น n ส่วนเท่าๆ กัน แล้วคำนวณหาผลบวกพื้นที่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองแบบในพจน์ของ n เราจะแทนผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน และผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใช้ปกคลุมด้วยสัญลักษณ์ L_n และ U_n ตามลำดับ

เราจะพบว่า (แสดงในห้องเรียน)

$$L_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{8(i-1)^2}{n^3} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{8}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$U_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 = \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

เมื่อพิจารณาหาค่าลิมิต เราจะพบว่า

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

แต่เนื่องจาก $L_n \le A \le U_n$ จึงได้ว่า $A = \dfrac{2^3}{3} = \dfrac{8}{3}$

ในที่นี้ เราได้ **ค่าแม่นตรง** (exact value) ของ A

การได้ค่าแม่นตรงของ A นั้นไม่ใช่เรื่องบังเอิญ เฉพาะกรณีของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ บนช่วง $[0,2]$ เท่านั้น เราอาจใช้วิธีการคำนวณแบบที่กล่าวมากับฟังก์ชันใดๆ บนช่วงปิดที่มีขอบเขตใดๆ ก็ได้ ถ้าฟังก์ชันนั้นๆ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงดังกล่าว เราจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

เสมอ

ฟังก์ชันที่เรานำมาคำนวณหาพื้นที่ระหว่างกราฟของมันกับช่วงบนแกน X นั้นต้องเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีค่าเป็นลบในช่วงนั้น เพื่อว่าเส้นกราฟจะได้อยู่เหนือแกน X ตลอดช่วง อย่างไรก็ตาม**วิธีการคำนวณ**ที่ใช้คำนวณหาพื้นที่ดังที่กล่าวมานั้น หากจะนำมาใช้กับฟังก์ชันโดยทั่วไปที่มีค่าเป็นลบบ้างก็ย่อมทำได้ แต่จะใช้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นพื้นที่ย่อมทำไม่ได้ เพราะพจน์ต่างๆ ที่บวกกันเป็น L_n กับ U_n นั้นอาจมีบางพจน์เป็นลบตัดกันไปบ้าง

วิธีการคำนวณดังกล่าวนี้ นอกจากจะใช้คำนวณหาพื้นที่แล้ว ยังใช้คำนวณหาปริมาณอย่างอื่นๆ ได้อีกมากมาย เช่น งาน แรง นักคณิตศาสตร์จึงศึกษาวิธีการคำนวณนี้สำหรับฟังก์ชันโดยทั่วๆ ไป โดยเรียกวิธีคำนวณแบบนี้ว่า **การอินทิเกรต** (integration) และเรียกผลลัพธ์ของการคำนวณว่า **อินทิกรัล** (integral) คำว่า **integral** นี้ ราชบัณฑิตยสถาน ให้ใช้คำไทยว่า **ปริพันธ์** หรือ **อินทิกรัล** *ต่อไปนี้จะใช้คำว่า อินทิกรัล*

อินทิกรัลที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็น **อินทิกรัลจำกัดเขต** (definite integral) มีบทนิยามของอินทิกรัลต่างๆ กันหลายแบบ ในที่นี้จะนำมากล่าวเพียงสองแบบ คือ **แบบของดาร์บู** (Darboux) กับ **แบบของรีมันน์** (Riemann) บทนิยามสองแบบนี้อธิบายไม่เหมือนกัน แต่พิสูจน์ได้ว่าให้ความหมายเดียวกัน กล่าวคือเป็นบทนิยามที่สมมูลกัน

ต่อไปนี้เป็นบทนิยามแบบของดาร์บู

บทนิยาม 3.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมช่วง $[a,b]$ และมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ ให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ และให้

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

เป็นการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ n ช่วง คือ

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ให้

$$m_i = \text{glb ของ } f \text{ บน } [x_{i-1},x_i]$$
$$M_i = \text{lub ของ } f \text{ บน } [x_{i-1},x_i]$$

ในที่นี้ glb กับ lub หมายถึงค่าขอบเขตล่างสูงสุด กับค่าขอบเขตบนต่ำสุดของ f ในช่วง $[x_{i-1},x_i]$ ตามลำดับ

เราเรียกผลบวก $L = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ ว่า **ผลบวกล่างแบบดาร์บู** และเรียกผลบวก $U = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ ว่า **ผลบวกบนแบบดาร์บู**

เราเรียก ขอบเขตบนต่ำสุด ของเซตของบรรดาค่า L ทั้งหลายทั้งหลายว่า **อินทิกรัลล่าง** (lower integral) ของ f บนช่วง $[a,b]$ และเรียก ขอบเขตล่างสูงสุด ของเซตของบรรดาค่า U ทั้งหลายทั้งหลายว่า**อินทิกรัลบน** (upper integral) ของ f บนช่วง $[a,b]$

ถ้า อินทิกรัลล่าง กับ อินทิกรัลบน ของ f บนช่วง $[a,b]$ มีค่าเท่ากัน เรากล่าวว่า f **เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง** $[a,b]$ (f is integrable over the interval $[a,b]$) และเรียกค่าที่เท่ากันของอินทิกรัลล่างกับอินทิกรัลบนนั้นว่า **อินทิกรัล** (integral) ของ f บนช่วง $[a,b]$

ตัวอย่าง 3.1

กำหนดให้ $f(x) = x$ จงหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,2]$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[0,2]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\dfrac{2}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i = 1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1},x_i] = [(i-1)\dfrac{2}{n},\dfrac{2i}{n}]$

ซึ่งได้ว่า $m_i = \dfrac{(i-1)2}{n}$ และ $M_i = \dfrac{2i}{n}$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,2]$ คือ

$$
\begin{aligned}
L_n &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)2^2}{n^2} \\
&= \frac{2^2}{n^2}(0+1+\cdots+(n-1)) = \frac{2^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

และผลบวกบนแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,2]$ คือ

$$
\begin{aligned}
U_n &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(2)^2}{n^2} \\
&= \frac{2^2}{n^2}(1+2+\cdots+n) = \frac{2^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

□

หมายเหตุ

เนื่องจากบทนิยามกำหนดไว้ว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต จึงต้องมีค่า M ค่าหนึ่ง ซึ่ง $f(x) \le M$ ทุกๆ x ในช่วง $[a,b]$ ดังนั้น $m_i \le M, \quad i = 1,2,\dots,n$
จึงได้ว่า

$$
L = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le M(b-a)
$$

คือเราได้ว่า

เซตของบรรดาค่า L ทั้งหลายเป็นเซตที่มีขอบเขตบน จึงย่อมมีขอบเขตบนต่ำสุด

ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

เซตของบรรดาค่า U ทั้งหลายเป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง จึงย่อมมีขอบเขตล่างสูงสุด

ข้อสังเกต

1. สำหรับวิธีแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ แล้วนำมาคำนวณ ผลบวกล่าง L กับผลบวกบน U ย่อมได้ว่า $L \le U$ เสมอไป

2. ถ้า L' เป็นผลบวกล่าง ที่คำนวณโดยใช้การแบ่งที่แบ่งย่อยกว่าการแบ่งที่ใช้ในการคำนวณผลบวกล่าง L ย่อมได้ว่า $L \le L'$ ส่วนผลบวกบน U' กับ U ที่คำนวณจากการแบ่งดังกล่าว เราจะได้ว่า $U' \le U$

3. สำหรับการแบ่งช่วง $[a,b]$ สองแบบใดๆ

$$
P' = \{x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_{n'}\}, \quad P'' = \{x''_0, x''_1, x''_2, \dots, x''_{n''}\}
$$

ถ้าเราให้ P เป็นการแบ่งที่ใช้จุดแบ่งทั้งของ P' และ ของ P'' รวมกัน (union กัน) เราย่อมได้ว่า $L' \le L \le U \le U''$ เมื่อ L' และ L เป็นผลบวกล่างที่สอดคล้องกับเซต P' และ P ตามลำดับ และ U และ U'' เป็นผลบวกบนที่สอดคล้องกับเซต P และ P'' ตามลำดับ

แสดงว่าบรรดาผลบวกล่างทั้งหลายมีผลบวกบนทั้งหลายเป็นขอบเขตบน และผลบวกล่างต่างก็เป็นขอบเขตล่างของบรรดาขอบเขตบน

อินทิกรัลล่าง $\leq$ บรรดาผลบวกบน

บรรดาผลบวกล่าง $\leq$ อินทิกรัลบน

อินทิกรัลล่าง $\leq$ อินทิกรัลบน

4. ถ้า $\{L_n\}$ เป็นลำดับใดๆของผลบวกล่างเราย่อมได้ว่า $L_n \leq$ อินทิกรัลล่าง

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} L_n \leq$ อินทิกรัลล่าง

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\{U_n\}$ เป็นลำดับใดๆของผลบวกบน เราจะได้ว่า

อินทิกรัลบน $\leq \lim\limits_{n\to\infty} U_n$

อสมการทั้งสองนี้ประกอบกับที่กล่าวมาก่อน ได้ว่า

$\lim\limits_{n\to\infty} L_n \leq$ อินทิกรัลล่าง $\leq$ อินทิกรัลบน $\leq \lim\limits_{n\to\infty} U_n$

ดังนั้น ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$ เราย่อมได้ว่า

อินทิกรัลล่าง = อินทิกรัลบน

แสดงว่าฟังก์ชันอินทิเกรตได้ และมีค่าเท่ากับค่าที่เท่ากันของค่าลิมิตทั้งสองนั้น

ตัวอย่าง 3.2

ย้อนกลับไปพิจารณาตัวอย่าง 3.1 แสดงการคำนวณหาพื้นที่ระหว่างกราฟของ $f(x) = x$ กับช่วง $[0,2]$ ในการพิจารณานั้น เราพบว่า

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n = 2$$

ตัวอย่างดังกล่าวจึงเป็นตัวอย่างที่แสดงว่า $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[0,2]$ และมีค่าอินทิกรัลเท่ากับ 2 □

ตัวอย่าง 3.3

จงแสดงว่า $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[0,c]$ สำหรับจำนวนบวก c ใดๆ และมีค่าของอินทิกรัลเท่ากับ $\dfrac{c^2}{2}$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[0,c]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\dfrac{c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i = 1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1}, x_i] = [(i-1)\dfrac{c}{n}, \dfrac{ic}{n}]$

ซึ่งได้ว่า $m_i = \dfrac{(i-1)c}{n}$ และ $M_i = \dfrac{ic}{n}$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,c]$ คือ

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)c^2}{n^2} = \frac{c^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

และผลบวกบนแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,c]$ คือ

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{ic^2}{n^2} = \frac{c^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \dfrac{c^2}{2}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \dfrac{c^2}{2}$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\dfrac{c^2}{2}$ □

ตัวอย่าง 3.4

จงแสดงว่า $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[c,0]$ สำหรับ c ที่เป็นจำนวนลบใดๆ และมีค่าของอินทิกรัลเท่ากับ $-\dfrac{c^2}{2}$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[c,0]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\dfrac{-c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i = 1,\dots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1}, x_i] = [\dfrac{c(n-i+1)}{n}, \dfrac{c(n-i)}{n}]$

ซึ่งได้ว่า $m_i = \dfrac{c(n-i+1)}{n}$ และ $M_i = \dfrac{c(n-i)}{n}$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[c,0]$ คือ

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-(n-i+1)c^2}{n^2} = \frac{-c^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

และผลบวกบนแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[c,0]$ คือ

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-(n-i)c^2}{n^2} = \frac{-c^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \dfrac{-c^2}{2}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \dfrac{-c^2}{2}$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\dfrac{-c^2}{2}$ □

ตัวอย่าง 3.5

จงหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บูของ $f(x)=x^2$ บนช่วง $[0,c]$ สำหรับจำนวนบวก c ใดๆ และจงแสดงว่า f อินทิเกรตได้บนช่วงนี้ พร้อมทั้งหาค่าอินทิกรัล

วิธีทำ แบ่งช่วง $[0,c]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i=1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1},x_i]=[(i-1)\frac{c}{n},\frac{ic}{n}]$

ซึ่งได้ว่า $m_i=\frac{(i-1)^2c^2}{n^2}$ และ $M_i=\frac{i^2c^2}{n^2}$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,c]$ คือ

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\{\frac{(i-1)^2c^3}{n^3}\}=\frac{c^3}{n^3}\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

และผลบวกบนแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,c]$ คือ

$$U_n=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(\frac{i^2c^3}{n^3})=\frac{c^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}L_n=\frac{c^3}{3}$ และ $\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{c^3}{3}$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{c^3}{3}$ □

ต่อไปนี้เป็น**บทนิยามแบบของรีมันน์**

บทนิยาม 3.2

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมช่วง $[a,b]$ และมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ ให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ และให้

$$a=x_0<x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

เป็นการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ n ช่วง คือ

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

ให้ $t^*{}_1,t^*{}_2,\ldots t^*{}_n$ เป็นจุดใดๆ จากช่วงย่อย

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

ตามลำดับ เราเรียกผลบวก $S_n=\sum_{i=1}^{n}f(t^*{}_i)(x_i-x_{i-1})$ ว่า **ผลบวกรีมันน์ของ f**

ถ้าสำหรับทุกๆ วิธีแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยที่ขนาดของช่วงกว้างที่สุดมีลิมิตเป็นศูนย์ เราได้ว่า $\lim_{n\to\infty}S_n$ มีค่าเดียวกันเสมอ เรากล่าวว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และเรียกค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty}S_n$ ว่า **อินทิกรัลของ f** บนช่วง $[a,b]$

จะสังเกตเห็นได้โดยง่ายว่า $L_n \le S_n \le U_n$ เสมอไป ดังนั้น ถ้า $\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n$

เราย่อมได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

แสดงว่าถ้าฟังก์ชันใดอินทิเกรตได้แบบดาร์บู ฟังก์ชันนั้นก็อินทิเกรตได้แบบรีมันน์ด้วย และ อินทิกรัลทั้งสองแบบมีค่าเดียวกัน กลับกันก็เป็นจริง คือ ถ้าฟังก์ชันใดอินทิเกรตได้แบบรีมันน์ ฟังก์ชันนั้นก็อินทิเกรตได้แบบดาร์บู แต่เราเห็นความจริงข้อนี้ได้ไม่ง่ายเหมือนข้อแรก ***อินทิกรัลทั้งสองแบบจึงสมมูลกัน***

แบบฝึกหัด 3.1

1. กำหนดให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^2 + 1$ บนช่วงต่อไปนี้ จงคำนวณหาผลบวกบนและผลบวกล่างของ f และ g บนช่วงนั้น (ในนิยามของอินทิกรัลจำกัดเขตแบบดาร์บู)
   1.1. $[0,c]$ เมื่อ $c > 0$
   1.2. $[c,0]$ เมื่อ $c < 0$
   1.3. $[-c,c]$ เมื่อ $c > 0$
2. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$ บนช่วง $[0,5]$
   จงบอกสูตรผลบวกรีมันน์ เมื่อแบ่ง $[0,5]$ ออกเป็น n ช่วงเท่าๆ กัน และใช้ t_i^* เป็นจุดทางขวาสุดของแต่ละช่วงย่อย (ไม่ต้องคำนวณค่า)
3. ผลบวก $\sum_{i=1}^{n} (7 + (1 + \frac{2i}{n})^3)(\frac{2}{n})$ เป็นผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชันใดบนช่วงใด และผลบวกนี้มีลิมิตเป็นอินทิกรัลใด (ไม่ต้องอินทิเกรต)

การคำนวณหาค่าอินทิกรัลจะทำได้ง่ายขึ้นโดยการใช้สูตรและกฎต่างๆ เกี่ยวกับการอินทิเกรต ซึ่งจะได้กล่าวถึงในรูปของทฤษฎีบทต่างๆ การแถลงทฤษฎีบทต่างๆ เหล่านี้จะทำได้สะดวก และชัดเจนดีโดยการใช้สัญลักษณ์ ดังนั้นเรามาทำความรู้จัก และเข้าใจสัญลักษณ์สำหรับอินทิกรัลกันเสียก่อน

เราเขียนแสดงอินทิกรัลของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a,b]$ ด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$

เครื่องหมาย $\int$ คือ**เครื่องหมายอินทิเกรต** สัญลักษณ์ข้างบนหมายถึงค่าที่ได้จากการอินทิเกรตฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงปิดจาก a ถึง b

เครื่องหมายอินทิเกรตนั้นได้มาจากการนำอักษรตัวหน้าของคำว่า SUM มาดัดแปลงโดยการยืดออกจนกลายเป็นดังนี้

$$S \qquad \int \qquad \int \qquad \int \qquad \int$$

ในบางกรณีเราต้องการระบุสูตรบอกค่าฟังก์ชันไว้ในสัญลักษณ์ของอินทิกรัล เช่นต้องการแสดง $\int_0^2 \{(x,x^2) \mid 0 \le x \le 2\}$ สัญลักษณ์สำหรับใช้ในการนี้คือ

$$\int_0^2 x^2 dx$$

บอกให้ทราบว่า x เป็นตัวแปรค่าของฟังก์ชันที่เราทำการอินทิเกรต

ในตัวอย่างที่กล่าวมานั้น สูตรบอกค่าฟังก์ชันมีตัวแปรค่า x ปรากฏอยู่เพียงตัวเดียว เราจึงอาจไม่เห็นความจำเป็นของการที่ต้องบอกว่าอะไรเป็นตัวแปรค่าของฟังก์ชันที่เราทำการอินทิเกรต แต่ในอินทิกรัลต่อไปนี้ $\int_a^b (1+xy^2)dx$ และ $\int_0^c (1+t^x)dt$ เห็นได้ว่าสัญลักษณ์ dx กับ dt เป็นสิ่งจำเป็น

เราเรียกตัวแปรค่าของฟังก์ชันที่เราทำการอินทิเกรตว่า **ตัวแปรของการอินทิเกรต** เราดูได้ว่าอะไรเป็นตัวแปรของการอินทิเกรตได้โดยดูว่าตัวแปรใดตามหลังตัว d เช่นในอินทิกรัล $\int_a^b (1+xy^2)dy$ ตัวแปรของการอินทิเกรตคือ y

เนื่องจากในการบอกสูตรของฟังก์ชันหนึ่งๆนั้นเราอาจใช้ตัวแปรได้ต่างๆ นานา เช่น

$$\{(x,x^2) \mid 0 \le x \le 2\} \text{ กับ } \{(t,t^2) \mid 0 \le t \le 2\}$$

หมายถึงฟังก์ชันเดียวกัน (เพราะเป็นเซตเดียวกัน) ดังนั้น $\int_0^2 x^2 dx$ กับ $\int_0^2 t^2 dt$ จึงหมายถึงอินทิกรัลเดียวกัน

บทนิยาม 3.3

ถ้าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ เรานิยามอินทิกรัลของ f จาก b ถึง a ว่าคือ

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

หมายเหตุ

บทนิยามนี้จะช่วยให้เราสามารถนำอินทิกรัลไปประยุกต์ใช้กับปริมาณที่ขึ้นอยู่กับทิศทางได้ด้วย เราอาจให้ความหมายของการอินทิเกรตในทิศทางกลับกันได้โดยการพิจารณาว่า ในนิยามของอินทิกรัลจาก b ถึง a นั้น การแบ่งช่วงเป็นดังนี้

$$b = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = a$$

ให้สังเกตว่า ในที่นี้ $x_0 = b$ และ $x_n = a$ ค่า x ต่างๆ เรียงจากมากไปน้อย ดังนั้น ผลต่าง $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2, \ldots,\ x_n - x_{n-1}$ ล้วนมีค่าเป็นลบ เป็นผลให้อินทิกรัลจาก b ถึง a มีค่าเป็นลบของอินทิกรัลจาก a ไปยัง b

ทฤษฎีบท 3.1

1) ถ้าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้ทั้งบนช่วง $[a,b]$ และ $[b,c]$ f ย่อมอินทิเกรตได้บน $[a,c]$ และได้ด้วยว่า $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

2) ถ้าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้ทั้งบนช่วง $[a,c]$ และ b อยู่ระหว่าง a กับ c แล้ว f ย่อมอินทิเกรตได้ทั้งบน $[a,b]$ และ $[b,c]$ และ สูตรข้างบนก็เป็นจริงด้วยเช่นกัน

หมายเหตุ

ทฤษฎีบทที่ 3.1 กล่าวถึงเฉพาะกรณีของการอินทิเกรตในทิศทางที่เป็นบวก (คือจากซ้ายไปขวา) แต่เมื่อเราใช้บทนิยาม 3.3 มาประกอบด้วย เราจะได้ว่าสูตรในทฤษฎีบทนี้ก็คงเป็นจริงสำหรับ a,b,c ใดๆ และเพื่อให้สูตรนี้ใช้การได้ดี เราจะกำหนดเป็นนิยามเพิ่มเติมของการอินทิเกรตจาก a ถึง a ว่า $\int_a^a f(x)dx = 0$

ทฤษฎีบท 3.2

ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ย่อมได้ว่า cf กับ $f+g$ ก็เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และได้ว่า

$$\int_a^b f(x)+g(x)\ dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

ทฤษฎีบท 3.3

1) $f(x) = c$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

2) สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ $f(x) = x^k$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

และได้ว่า $$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b^{k+1} - a^{k+1})}{k+1}$$

หมายเหตุ

เรานิยมเขียนสูตรในทฤษฎีบทที่ 3.3 ในรูป

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

กับ $$\int_a^b x^k\,dx = \frac{(b^{k+1} - a^{k+1})}{k+1}$$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.6

จงหาค่าของ $\displaystyle\int_1^2 (3x - 5x^3)dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3x-5x^3)dx &= 3\int_1^2 xdx - 5\int_1^2 x^3dx \\ &= \frac{3(2^2-1)}{2} - \frac{5(2^4-1)}{4} = \frac{9}{2} - \frac{75}{4} = -\frac{57}{4}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.7

จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\left|x^2-3x+2\right| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x < 1 \\ -(x^2-3x+2), & 1 \le x < 2 \\ x^2 - 3x + 2, & x \ge 2 \end{cases}$$

เราได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \left|x^2-3x+2\right|dx &= \int_0^1 \left|x^2-3x+2\right|dx + \int_1^2 \left|x^2-3x+2\right|dx \\
&= \int_0^1 (x^2-3x+2)dx + \int_1^2 -(x^2-3x+2)dx \\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(\left(\frac{2^3}{3}-\frac{3\cdot 2^2}{2}+2\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right)=1 \qquad \square
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 3.2

จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x-x^2)\,dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{2} (2x+1)^2\,dx$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} (y-1)(3y+2)\,dy$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{w}(w-1)dw$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{2} |\,x-3x^2|\,dx$
7. $\displaystyle\int_{-2}^{3} |\,x^2-x+2\,|dx$
8. $\displaystyle\int_{-2}^{2} y\,dt$ เมื่อ y เป็นค่าคงตัว
9. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2}{s^3}\,ds$
10. $\displaystyle\int_{0}^{2} |\,x-1\,|+|\,2x-1\,|\,dx$

3.2 การประมาณค่าของอินทิกรัล

สูตรที่กล่าวมาแล้วในทฤษฎีบทต่างๆ นั้นพอเพียงที่จะช่วยให้เราคำนวณหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามใดๆ สำหรับฟังก์ชันอื่นๆนั้น นิสิตจะได้เรียนรู้สูตรสำหรับคำนวณค่าอินทิกรัลที่แม่นตรงของมันในโอกาสต่อๆ ไป แต่ในที่นี้เราจะใช้วิธีคำนวณค่าประมาณของอินทิกรัลของมันโดยการประมาณฟังก์ชันเหล่านั้นด้วยฟังก์ชันพหุนาม

การประมาณฟังก์ชัน f ใดๆฟังก์ชันหนึ่งด้วยฟังก์ชันพหุนามเพื่อนำมาประมาณอินทิกรัลบนช่วง $[a,b]$ นั้น เราทำได้ดังนี้

1) เลือกว่าจะใช้ฟังก์ชันพหุนามดีกรีเท่าใด เช่นใช้พหุนามดีกรีสอง ซึ่งอยู่ในรูป

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

2) แบ่งช่วง $[a,b]$ ด้วยจุดแบ่ง $x_0, x_1, \ldots, x_n$

3) คำนวณค่าของฟังก์ชัน f ที่จุดเหล่านี้ สมมติว่า

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \ \ldots, \ y_n = f(x_n)$$

จุด (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... เป็นจุดที่อยู่บนกราฟของฟังก์ชันที่เราจะอินทิเกรต

โดยการใช้สามจุดแรก (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) เราจะสามารถหาฟังก์ชันในรูป

$p_1(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ที่กราฟของมันผ่านจุดทั้งสามได้ฟังก์ชันหนึ่ง กราฟของฟังก์ชัน p_1 นี้จะอยู่ใกล้เคียงกับกราฟของฟังก์ชัน f ที่เราต้องการอินทิเกรต เราจึงอาจประมาณฟังก์ชัน f บนช่วงย่อย $[x_0, x_2]$ ด้วย p_1

แล้วทำในทำนองเดียวกันกับอีกสามจุด (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) ซึ่งจะได้พหุนาม p_2 ที่ประมาณ f ในช่วง $[x_2, x_4]$ และทำต่อไปในทำนองเดียวกัน เราก็จะได้ฟังก์ชันพหุนามต่างๆที่ประมาณ f ในช่วง $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, $[x_4, x_6]$, ...

ให้สังเกตว่าการประมาณด้วยพหุนามดีกรีสองนี้จะทำได้เต็มช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคู่เท่านั้น

แต่ถ้าเราประมาณ f โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่ง $p(x) = c_0 + c_1x$ เราจะสามารถหาพหุนามเช่นนี้ได้สำหรับแต่ละช่วงย่อย $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ...

หากเราจะประมาณ f โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามดีกรีสาม $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$

เราจะต้องใช้จุดถัดๆ กันคราวละ 4 จุด ในกรณีนี้ n ต้องมีค่าที่ 3 หารได้ลงตัว

ที่กล่าวมานั้นเป็นหลักการทั่วๆ ไป การประมาณที่นิยมใช้กันได้แก่การประมาณโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่งหรือดีกรีสอง และใช้การแบ่งช่วงที่แบ่งออกเป็น n ช่วงเท่าๆ กัน

สำหรับกรณีที่ใช้พหุนามดีกรีหนึ่ง n อาจมีค่าใดก็ได้ กรณีนี้สูตรที่ได้คือ **เกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู** สำหรับกรณีที่ใช้พหุนามดีกรีสอง n ต้องมีค่าเป็นจำนวนคู่ กรณีนี้สูตรที่ได้คือ **เกณฑ์ของซิมป์สัน**

3.2.1 การพิจารณาหาสูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

ลำดับแรก เรามาพิจารณากันเสียก่อนว่าหากเราคำนวณอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่ง $p(x) = c_0 + c_1 x$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) กับ (x_1, y_1) บนช่วง $[x_0, x_1]$ ว่าจะได้ค่าเท่าใด เราจะพบว่า

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} p(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} (c_0 + c_1 x)dx = \int_{x_0}^{x_1} c_0 dx + \int_{x_0}^{x_1} c_1 x\,dx \\ &= c_0(x_1 - x_0) + c_1\left(\frac{{x_1}^2 - {x_0}^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)(x_1 - x_0)\end{aligned}$$

สังเกตว่าค่าอินทิกรัลที่ได้นี้เขียนได้ในพจน์ของ y_0, y_1 โดยเราไม่ต้องหาค่าของ c_0 กับ c_1 ให้ได้เสียก่อนว่าเป็นเท่าใด

การเป็นเช่นนี้ ทำให้เราทราบได้ว่า อินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่งที่ผ่านจุด (x_1, y_1) กับ (x_2, y_2) บนช่วง $[x_1, x_2]$ นั้นจะมีค่าเท่าใด และในทำนองเดียวกันสำหรับช่วงถัดๆ ไป นั่นคือ สำหรับ $i = 2, 3, \ldots, n$ จะได้

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)(x_i - x_{i-1})$$

เมื่อทราบค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามที่เราใช้ประมาณฟังก์ชัน f บนช่วงต่างๆ แล้ว ลำดับต่อไปเราก็นำค่าอินทิกรัลเหล่านี้มารวมกัน เป็นค่าประมาณของอินทิกรัลของ f ในกรณีของการประมาณด้วยฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่ง เราจะได้ว่า

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h \\ &= (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)\frac{h}{2}\end{aligned}}$$

โดยที่ $h = \dfrac{b-a}{n}$

ตัวอย่าง 3.8

จงแสดงการใช้เกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูประมาณค่า $\int_0^{1.2} \frac{x}{1+x^4}\,dx$ โดยแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออกเป็น 6 ช่วงย่อย

วิธีทำ ในที่นี้เราจะอินทิเกรต $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ บนช่วง $[0,1.2]$ เราจึงแบ่งช่วงนี้ออกเป็น 6 ช่วงย่อยด้วยจุดแบ่ง

$$0.0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0,\ 1.2$$

ในการนี้ เราต้องคำนวณหาค่า f ที่จุดเหล่านี้ซึ่งจะได้ดังนี้

x	$f(x)$	
	$1\times$	$2\times$
0.0	0.000000000	
0.2		0.199680511
0.4		0.390015600
0.6		0.531161473
0.8		0.567536889
1.0		0.500000000
1.2	0.390421655	
รวม	0.390421655	2.188394473

จึงได้คำตอบเท่ากับ $(0.390421655 + 2\times 2.189394473)\times\frac{0.2}{2} = 0.47672106$ $\square$

3.2.2 การพิจารณาหาสูตรของเกณฑ์ของซิมป์สัน

ในกรณีนี้ เราจะพิจารณากันเสียก่อนว่าหากเราคำนวณอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีสอง $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0), (x_1, y_1) กับ (x_2, y_2) บนช่วง $[x_0, x_2]$ ว่าจะได้ค่าเท่าใด เราจะพบว่า

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} p(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} \left(c_0 + c_1x + c_2x^2\right)dx \\
&= c_0(x_2 - x_0) + \frac{c_1}{2}(x_2^2 - x_0^2) + \frac{c_2}{3}(x_2^3 - x_0^3) \\
&= c_0((x_1 + h) - (x_1 - h)) + \frac{c_1}{2}((x_1 + h)^2 - (x_1 - h)^2) \\
&\quad + \frac{c_2}{3}((x_1 + h)^3 - (x_1 - h)^3) \\
&= 2hc_0 + \frac{c_1}{2}(4hx_1) + \frac{c_2}{3}(2h^3 + 6hx_1^2) \\
&= \frac{h}{3}\left[6c_0 + 6c_1x_1 + 6c_2x_1^2 + 2h^2c_2\right] \\
&= \frac{h}{3}\left[\begin{array}{l}\left(c_0 + c_1(x_1 - h) + c_2(x_1 - h)^2\right) + 4\left(c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2\right) \\ +\left(c_0 + c_1(x_1 + h) + c_2(x_1 + h)^2\right)\end{array}\right] \\
&= \frac{h}{3}\left[\left(c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2\right) + 4\left(c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2\right) + \left(c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2\right)\right] \\
&= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)
\end{aligned}
$$

สังเกตว่าค่าอินทิกรัลที่ได้นี้เขียนได้ในพจน์ของ y_0, y_1, y_2 โดยเราไม่ต้องหาค่าของ c_0, c_1 กับ c_2 ให้ได้เสียก่อนว่าเป็นเท่าใด การเป็นเช่นนี้ ทำให้เราทราบได้ว่า อินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีสองที่ผ่านจุด $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ กับ (x_4, y_4) บนช่วง $[x_2, x_4]$ นั้นจะมีค่าเท่าใด และ ในทำนองเดียวกันสำหรับสองช่วงถัดๆ ไป เมื่อทราบค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามที่เราใช้ ประมาณฟังก์ชัน f บนสองช่วงถัดๆกันคู่ต่างๆแล้ว ลำดับต่อไปเราก็นำค่าอินทิกรัลเหล่านี้มารวมกัน เป็นค่าประมาณของอินทิกรัลของ f

ในกรณีของการประมาณด้วยฟังก์ชันพหุนามดีกรีสอง เมื่อ $h = \dfrac{b-a}{n}$ เราจะได้ว่า

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\
&= (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)\frac{h}{3}
\end{aligned}
}
$$

ตัวอย่าง 3.9

จงแสดงการใช้เกณฑ์ของซิมป์สันประมาณค่า $\int_0^{1.2} \frac{x}{1+x^4}\,dx$ โดยแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออกเป็น 6 ช่วงย่อย

วิธีทำ ในที่นี้เราจะอินทิเกรตฟังก์ชันเดียวกันกับในตัวอย่างก่อน $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ และอินทิเกรตบนช่วงเดียวกัน โดยแบ่งออกเป็น 6 ช่วงย่อย เช่นกัน จุดแบ่งจึงใช้ชุดเดิมและใช้ค่าของ f ที่จุดเหล่านี้ ซึ่งเราคำนวณไว้แล้ว และได้ดังนี้

x	$f(x)$		
	$1\times$	$4\times$	$2\times$
0.0	0.000000000		
0.2		0.199680511	
0.4			0.390015600
0.6		0.531161473	
0.8			0.567536889
1.0		0.500000000	
1.2	0.390421655		
รวม	0.390421655	1.230841984	0.957552489

จึงได้คำตอบเท่ากับ $(0.390421655 + 4\times 1.230841984 + 2\times 0.957552489)\times\frac{0.2}{3}$

$$= (7.228894569)\times\frac{0.2}{3} = 0.481926304 \qquad \square$$

วิธีการคำนวณอินทิกรัลโดยการใช้เกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูหรือเกณฑ์ของซิมป์สันนั้นจะทำได้ง่ายหาก เราโปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำงานแทนเรา ปัจจุบันนี้ เครื่องคิดเลขก็มีโปรแกรมคำนวณเช่นนี้ไว้ให้ใช้

การประมาณอินทิกรัลด้วยวิธีเชิงตัวเลขตามที่กล่าวมานี้ นอกจากจะสามารถใช้ในการประมาณอินทิกรัลของฟังก์ชันที่เราทราบสูตรบอกค่าของมันแล้ว เรายังสามารถใช้คำนวณอินทิกรัลของฟังก์ชันที่เราได้ค่าของมันมาในรูปตารางอีกด้วย

ตัวอย่าง 3.10

กำหนดให้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่ากำหนดไว้ในตารางต่อไปนี้ จงประมาณค่าอินทิกรัลของ f บนช่วง $[0,3]$ โดยใช้เกณฑ์ของซิมป์สัน

x	$f(x)$
0.0	2.015
0.5	2.733
1.0	3.417
1.5	5.041
2.0	7.318
2.5	4.306
3.0	2.115

วิธีทำ แบ่งค่าของ f ออกเป็นสามพวกตามตัวคูณ 1, 4, 2

x	$f(x)$		
	$1\times$	$4\times$	$2\times$
0.0	2.015		
0.5		2.733	
1.0			3.417
1.5		5.041	
2.0			7.318
2.5		4.306	
3.0	2.115		
รวม	4.130	12.080	10.735
ผลคูณ (คูณด้วยตัวคูณ)	4.130	48.320	21.470

ดังนั้น ค่าอินทิกรัลของ f บนช่วง $[0,3] \approx (4.130+48.320+21.470)\times\dfrac{0.5}{3} = 12.32$ $\square$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงแสดงการใช้เกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูประมาณค่า $\int_0^{2.4} \frac{2x}{1+x^3}\,dx$ โดยแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออก เป็น 8 ช่วงย่อย
2. จงแสดงการใช้เกณฑ์ของซิมป์สันประมาณค่า $\int_0^{2.4} \frac{2x}{1+x^3}\,dx$ โดยแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออก เป็น 8 ช่วงย่อย
3. กำหนดให้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่ากำหนดไว้ในตารางต่อไปนี้

   จงประมาณค่าอินทิกรัลของ f บนช่วง $[0, 2.4]$ โดย

x	$f(x)$
0.0	1.153
0.4	2.037
0.8	2.510
1.2	4.032
1.6	6.781
2.0	5.836
2.4	2.911

3.3 การพิจารณาหาพื้นที่วงกลมโดยอินทิกรัล

นิสิตได้เคยเรียนรู้มาจากชั้นมัธยมศึกษาว่าวงกลมที่มีรัศมี R นั้น มีพื้นที่ = πR^2

ถ้าให้ $R = 1$ เราจะได้ว่าพื้นที่วงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย = π

เราจะใช้ความจริงข้อนี้เป็นบทนิยามของ π ก็ได้และในที่นี้ เราจะทำเช่นนั้น

บทนิยาม 3.4

π คือ พื้นที่วงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย

บทนิยามดั้งเดิมของ π กล่าวว่า

$$\pi = \frac{\text{ความยาวเส้นรอบวงของวงกลม}}{\text{ความยาวเส้นผ่านจุดศุนย์กลาง}}$$

แล้วใช้บทนิยามนี้พิสูจน์ได้สูตรสำหรับคำนวณหาพื้นที่และความยาวเส้นรอบวงของวงกลม

ในที่นี้เรานิยาม π ว่าเป็นพื้นที่ของวงกลมที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย ดังนั้นเราต้องพิสูจน์ให้ได้ว่าสูตรข้างบนก็เป็นจริง เราจะค่อยทำในโอกาสต่อไป ในที่นี้เราจะคำนวณค่าโดยประมาณของมัน

จากบทนิยาม 3.1 เราสามารถคำนวณหาค่า π ได้โดยการคำนวณหาพื้นที่วงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ซึ่งทำได้โดยการอินทิเกรต เราเห็นได้ว่า

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1 - x^2)^{1/2}\,dx$$

เราจะประมาณค่าอินทิกรัลนี้ได้โดยใช้เกณฑ์ของซิมป์สัน (ให้นิสิตทำเป็นแบบฝึกหัด)

โดยการใช้บทนิยาม 3.1 และความหมายของอินทิกรัลว่าเป็นลิมิตของผลบวกรีมันน์ เราสามารถพิจารณาหาสูตรพื้นที่ของวงรี(ellipse) ได้ดังนี้

วงรีมีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

เราเขียนสมการของส่วนที่อยู่ในจัตุภาคที่หนึ่งได้เป็น

$$y = b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

จึงได้ว่า หนึ่งในสี่ของพื้นที่วงรี $= \displaystyle\int_0^a b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} dx$

เนื่องจากเราอาจพิจารณาอินทิกรัลนี้เป็นลิมิตของผลบวกรีมันน์

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} b\left(1-\frac{t_i^{*\,2}}{a^2}\right)^{1/2}(x_i - x_{i-1})$$

โดยการเลือก $t_i^* = x_i = \dfrac{ia}{n}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} b\left(1-\frac{(ia/n)^2}{a^2}\right)^{1/2}\left(\frac{a}{n}\right) \\ &= ab\sum_{i=1}^{n}\left(1-(i/n)^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

จะสังเกตเห็นได้ว่าผลบวกสุดท้ายนั้นแท้จริงแล้วก็คือผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = (1-x^2)^{1/2}$$

บนช่วง [0,1] นั่นเอง จึงได้ลิมิตของ S_n เป็น

$$\lim_{n\to\infty} S_n = ab\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx = ab\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

เราจึงได้สูตรพื้นที่วงรีเป็น πab และในกรณีที่วงรีเป็นวงกลมที่มีรัศมี R คือ $a = b = R$ เราได้สูตรพื้นที่วงกลมเป็น πR^2

3.4 การประยุกต์ของอินทิกรัล

ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างวิธีการนำอินทิกรัลไปประยุกต์ใช้ในเรื่องต่างๆ ต่อไปนี้

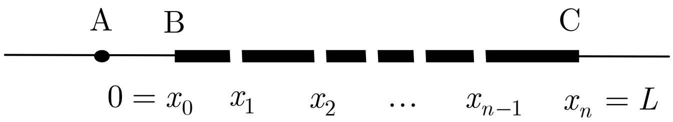
1. แรงดึงดูดระหว่างวัตถุ
2. พื้นที่ที่ปิดล้อมไว้โดยเส้นโค้ง(หรือเส้นตรง)
3. ปริมาตรของรูปทรงตันที่ทราบพื้นที่หน้าตัด
4. งาน
5. โมเมนต์และเซนทรอยด์

ในแต่ละเรื่องเหล่านี้ เราจะแบ่งปริมาณที่เราจะคำนวณออกเป็นส่วนย่อยๆ แล้วคำนวณค่าประมาณของปริมาณนั้นสำหรับแต่ละส่วนย่อยซึ่งเมื่อรวมเข้าด้วยกัน ก็จะเป็นค่าโดยประมาณของปริมาณดังกล่าว เมื่อให้จำนวนส่วนย่อยมากขึ้นก็จะได้ค่าลิมิตเป็นอินทิกรัล

3.4.1 การคำนวณแรงดึงดูด

พิจารณาวัตถุสองชิ้น A กับ BC

สมมติว่า A เป็นจุดมีมวล m BC เป็นเส้นตรงยาว L มีความหนาแน่นสม่ำเสมอ และมีมวลรวมเท่ากับ M สมมติว่าระยะ AB เท่ากับ D เราจะพิจารณาว่า AB ประกอบด้วยวัตถุชิ้นสั้นๆ หลายๆ ชิ้นต่อกันเป็นเส้นตรง BC หรืออีกนัยหนึ่ง เราแบ่ง BC ออกเป็นช่วงสั้นๆ จำนวน n ช่วง $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = L$



สมมติว่ามวลของชิ้นที่ i อยู่ที่จุด t_i^* ระหว่าง $x_{i-1},\ x_i$ แรงดึงดูดระหว่าง A กับชิ้นที่ i จึงเท่ากับ

$$\frac{GmM(x_i - x_{i-1})/L}{(D + t_i^*)^2}$$

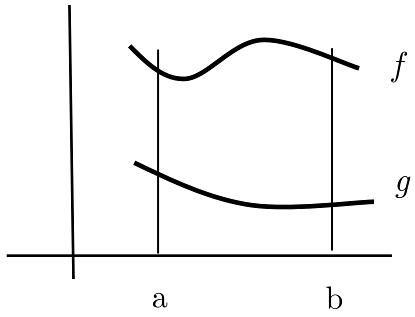
เราจึงได้แรงดึงดูดรวมเป็น

$$\frac{GmM}{L}\sum\frac{(x_i - x_{i-1})}{(D + t_i^*)^2} \quad \text{โดยที่ในที่นี้ } i = 1, \ldots, n$$

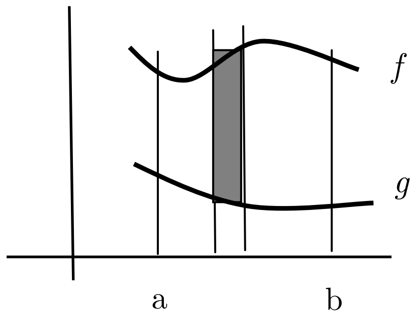
ผลบวกนี้เป็นผลบวกรีมันน์ของ $f(x) = \dfrac{1}{(D + x)^2}$ บนช่วง $[0, L]$ จึงได้ว่า

$$\boxed{\text{แรงดึงดูดรวม} = \frac{GmM}{L}\int_0^L \frac{1}{(D + x)^2}\,dx}$$

3.4.2 การคำนวณพื้นที่



เราจะคำนวณหาพื้นที่ระหว่างกราฟของ f กับ g ในรูปขวามือโดยการแบ่งช่วง $[a,b]$
ออกเป็น n ช่วงย่อยๆ พื้นที่ระหว่างกราฟของ f กับ g ก็จะถูกแบ่งเป็นส่วนย่อยๆ



รูปนี้แสดงส่วนย่อยที่ i ระหว่าง x_{i-1} กับ x_i ไว้เพียงรูปเดียว ให้ t_i^* อยู่ระหว่าง x_{i-1}, x_i
จะได้ว่าอาณาบริเวณระหว่างกราฟทั้งสองที่อยู่ในช่วงนี้มีพื้นที่ประมาณ

$$(f(t_i^*) - g(t_i^*))(x_i - x_{i-1})$$

เมื่อรวมกันทั้ง n ค่าก็จะได้ค่าประมาณของพื้นที่ที่ต้องการ
เราจะได้ว่าพื้นที่ระหว่างกราฟของ f กับ g ในช่วง $[a,b]$ มีค่าประมาณ

$$\sum_{i=1}^{n} (f(t_i^*) - g(t_i^*))(x_i - x_{i-1})$$

เมื่อเราให้จำนวนช่วงมากขึ้น ผลบวกนี้จะมีลิมิตเป็นอินทิกรัลของ $f-g$ บนช่วง $[a,b]$

ดังนั้น พื้นที่ระหว่างกราฟของ f กับ g ในช่วง $[a,b] = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

ในบางกรณี อาณาบริเวณที่เราต้องการคำนวณหาพื้นที่นั้นปิดล้อมอยู่โดยกราฟของความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน ในกรณีเช่นนี้เราต้องพิจารณาแบ่งอาณาบริเวณนั้นออกเป็นส่วนต่างๆที่เป็นอย่างใดอย่างหนึ่งดังต่อไปนี้

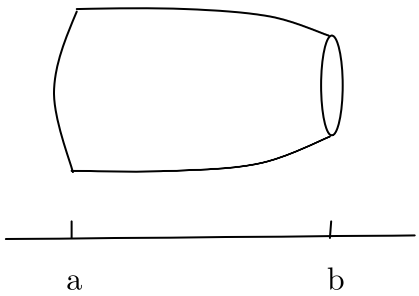
ก) อยู่ระหว่างกราฟของ $y = f(x)$ กับ $y = g(x)$

ข) อยู่ระหว่างกราฟของ $x = h(y)$ กับ $x = k(y)$

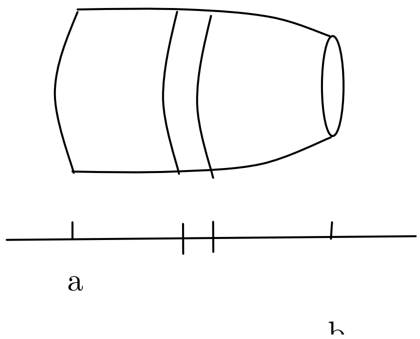
แล้วคำนวณหาพื้นที่ของส่วนต่างๆ รวมกันเป็นพื้นที่ที่ต้องการ

3.4.3 การคำนวณหาปริมาตร

ในการคำนวณปริมาตรรูปทรงตัน เช่นที่เห็นอยู่ทางขวามือ เรากำหนดแกนขึ้นเส้นหนึ่งไว้ใช้อ้างอิง สมมติว่าเมื่อเราฉายภาพรูปนี้ลงบนแกน แล้วได้ว่าได้เป็นช่วง $[a,b]$



เราแบ่งรูปที่ต้องการคำนวณหาปริมาตรออกเป็นส่วนย่อยๆ โดยการแบ่งด้วยระนาบตั้งฉากกับแกน ระนาบนี้ย่อมตัดแกนที่จุดต่างๆ ระหว่าง a กับ b ทำ

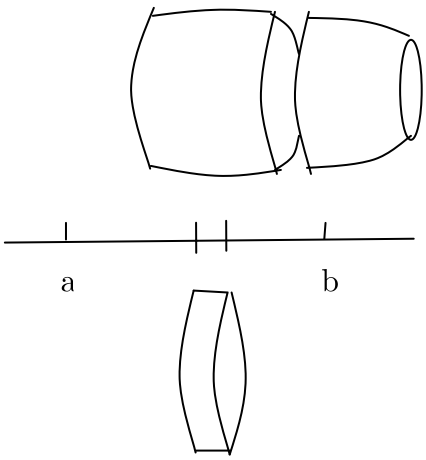


ให้เกิดการแบ่ง $[a,b]$ ด้วยจุดแบ่ง $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

ในรูปนี้ เราแสดงส่วยย่อยๆไว้เพียงส่วนเดียวซึ่งจะถือว่า คือ $[x_{i-1}, x_i]$

เราจะคำนวณหาปริมาตรของส่วนย่อยส่วนนี้

ในที่นี้จะสมมติว่าเราทราบพื้นที่ภาคตัดขวางของรูปที่จุด x ใดๆ บนแกนว่าเท่ากับ $A(x)$



ดังนั้นเราประมาณปริมาตรของส่วนย่อยที่ i นี้ได้ด้วย $A(t_i^*)(x_i - x_{i-1})$

โดยที่ในนี้ t_i^* เป็นจุดๆหนึ่งระหว่าง x_{i-1} กับ x_i

ดังนั้นปริมาตรรวมมีค่าประมาณ

$$\sum_{i=1}^{n} A(t_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

เมื่อใช้การแบ่งที่จำนวนช่วงย่อยมากขึ้น ผลบวกนี้ย่อมเข้าสู่ลิมิตที่เป็นค่าที่แม่นตรงของ

$$\boxed{\text{ปริมาตรของรูป คือ } = \int_a^b A(x)dx}$$

3.4.4 การคำนวณหางาน

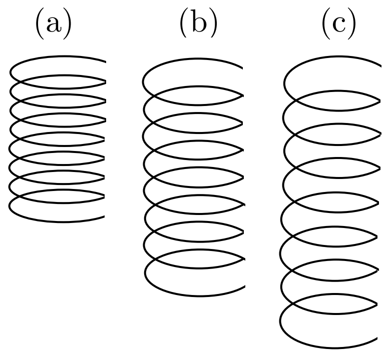
นิสิตคงเคยได้เรียนมาแล้วว่าในการออกแรงย้ายวัตถุไปในแนวเส้นตรงด้วยแรงที่คงที่นั้นจะคำนวณหางานได้ด้วยสูตร

งาน = แรง $\times$ ระยะทาง

สูตรนี้ใช้ได้เฉพาะกรณีที่แรงที่ใช้ในการเคลื่อนย้ายวัตถุนั้นมีค่าคงที่โดยตลอด

แต่ในกรณีที่แรงที่ใช้ไม่คงที่ เราใช้สูตรข้างบนนี้ไม่ได้ เช่น ในการออกแรงดึงสปริง

ในการดึงปลายข้างหนึ่งของสปริงให้ยืดออกโดยปลายอีกข้างหนึ่งถูกตรึงไว้ให้อยู่กับที่นั้น แรงที่ต้องใช้จะไม่คงที่ สปริงที่ยิ่งยืดออก ยิ่งต้องใช้แรงมากในการดึงไว้ให้อยู่ที่ความยาวนั้นๆ เช่นถ้าจะดึงสปริงจากรูป (a) ให้อยู่ในรูป (b) ก็ใช้แรงระดับหนึ่ง แต่ถ้าจะดึงให้อยู่ในรูป (c) ก็ต้องออกแรงมากกว่า



กฎของฮุค (Hook's law) กล่าวว่า
แรงที่ใช้ในการยืดสปริง เป็นปฏิภาคกับความยาวของส่วนที่ยืดออกของสปริง

ถ้า $F(x)$ เป็นแรงที่ทำให้สปริงยืดออก x หน่วยจะได้ว่า

$$F(x) = kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวที่ขึ้นอยู่กับสปริงที่ใช้สปริงต่างๆกันก็อาจมีค่า k ต่างๆกัน

ในการคำนวณหางานที่เกิดจากการดึงสปริงให้ยืดออก D หน่วย เราทำได้โดยการแบ่งระยะจาก 0 ถึง D ออกเป็นส่วนย่อยๆ ด้วยจุดแบ่ง

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = D$$

แล้วพิจารณาประมาณงานที่เกิดจากการยืดสปริงในแต่ละส่วนย่อย แล้วนำงานที่ได้เหล่านี้รวมกันเป็นงานที่เกิดจากการยืดสปริง D หน่วย ต่อไปนี้จะพิจารณาประมาณงานที่เกิดจากการยืดสปริงจากที่ยืดอยู่แล้ว x_{i-1} ไปเป็น x_i

เนื่องจากการยืดสปริงออกไป x หน่วยต้องออกแรงเท่ากับ $F(x)$ การยืดสปริงออกไปจาก x_{i-1} ถึง x_i จึงต้องออกแรงระหว่าง $F(x_{i-1})$ กับ $F(x_i)$ ดังนั้น $= F(t_i^*)$ โดยที่ t_i^* เป็นค่าระหว่าง x_{i-1} กับ x_i จึงได้ว่า

งานในการยืดสปริงออกไปจาก x_{i-1} ถึง x_i จึง $= \; F(t_i^*)(x_i - x_{i-1})$

$$\text{ดังนั้น งานรวม} \;=\; \sum_{i=1}^{n} F(t_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

เมื่อใช้จำนวนช่วงย่อยให้มากขึ้น ผลบวกนี้ย่อมมีลิมิตเป็นค่าที่แม่นตรงของงาน แต่ค่าลิมิตนี้ก็คืออินทิกรัล เราจึงได้ว่า

$$\boxed{\text{งานในการยืดสปริง } D \text{ หน่วย} = \int_0^D F(x)dx}$$

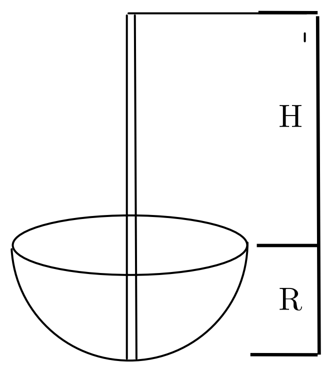
ในสูตรที่ได้มานั้น เมื่อเราแทน $F(x)$ ด้วย kx แล้วอินทิเกรต ก็จะได้คำตอบเป็น

$$\boxed{\text{งาน} \;=\; \frac{kD^2}{2}}$$

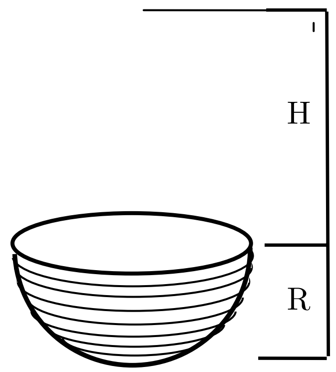
มีการคำนวณหางานอีกรูปแบบหนึ่งที่แตกต่างไปจากเรื่องสปริง แต่ก็ต้องมีการแบ่งงานที่จะคำนวณออกเป็นส่วนย่อยๆ ประมาณงานแต่ละส่วนย่อย แล้วคำนวณหาผลรวมเป็นค่าประมาณของงานรวม ซึ่งเมื่อพิจารณาหาลิมิตก็จะได้ค่าลิมิตเป็นค่าที่แม่นตรงของงานที่เราต้องการคำนวณเช่นกัน

เราจะพิจารณาวิธีการคำนวณแบบดังกล่าวจากตัวอย่างต่อไปนี้

ถังน้ำรูปครึ่งทรงกลมมีรัศมี R อยู่ในลักษณะหงาย มีน้ำเต็ม ต้องการสูบน้ำขึ้นไปใช้ที่ระดับสูงกว่าปากถัง H ถ้าต้องใช้น้ำทั้งหมดที่มีอยู่ในถัง จะต้องทำงานทั้งหมดเท่าใด?

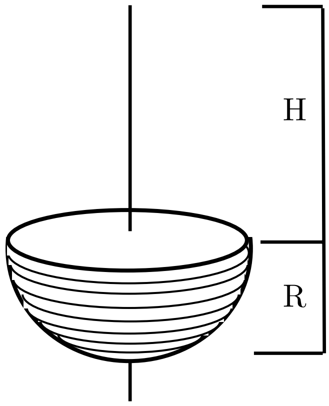


เราแบ่งน้ำในถังเป็นชั้นบางๆ แล้วประมาณงานในการยก(สูบ) น้ำแต่ละชั้นขึ้นไปที่ระดับที่สูงกว่าปากถัง H แรงที่ใช้ในการยกชั้นต่างๆ ก็คือน้ำหนักของน้ำในชั้นนั้นๆ ระยะทางก็คือระยะจากชั้นนั้นไปถึงระดับส่วนสูง H จากปากถัง



ในการคำนวณแรงที่ใช้ เราต้องคำนวณน้ำหนักของน้ำในแต่ละชั้นว่าหนักเท่าใด ซึ่งทำได้โดยการหาว่าน้ำชั้นต่างๆ นั้นมีปริมาตรเท่าใด

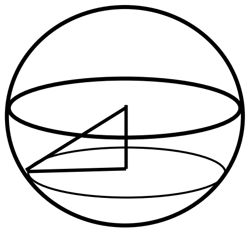
เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจะตั้งแกนพิกัดผ่านจุดศูนย์กลางของครึ่งทรงกลมตั้งฉากกับชั้นต่าง ๆของน้ำและใช้จุดศูนย์กลางของครึ่งทรงกลมเป็น origin



จะเห็นได้ว่า ชั้นต่าง ๆ ของน้ำอยู่ในช่วง $[0,R]$ ถือได้ว่าชั้นต่าง ๆ เหล่านี้เกิดจากการแบ่งช่วงนี้ออกเป็นช่วงย่อย ๆ

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = R$$

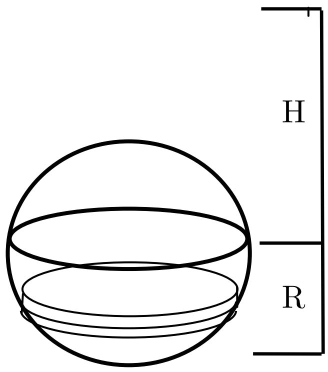
ปริมาตรของชั้นที่ i ซึ่งอยู่ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ มีค่าประมาณ $A(t_i^*)(x_i - x_{i-1})$ โดยที่ $A(t_i^*)$ เป็นพื้นที่ภาคตัดของครึ่งทรงกลมที่ระยะ t_i^* ซึ่งอยู่ระหว่าง x_{i-1} กับ x_i



ในที่นี้ พื้นที่ภาคตัดเป็นวงกลมที่มีรัศมี $\sqrt{R^2 - t_i^{*2}}$

จึงได้ว่าพื้นที่ $A(t_i^*) = \pi(R^2 - t_i^{*2})$

ต่อไป เราจะพิจารณาว่าจะต้องยกน้ำชั้นที่ i ขึ้นไปเป็นระยะทางเท่าใด



ค่ากลาง ๆของระยะทางจากชั้นที่ i ไปถึงปากถังก็คือ t_i^* ดังนั้นระยะจากชั้นที่ i ถึงระดับที่สูง H จากปากถังก็คือ $H + t_i^*$ จึงได้ว่างานในการยกชั้นที่ i ขึ้นไปก็คือ $(H + t_i^*)\rho A(t_i^*)(x_i - x_{i-1})$ โดยที่ ρ คือน้ำหนักของน้ำต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร เมื่อรวมค่าประมาณของงานทั้งหมดเข้าด้วยกันจะได้ว่า

$$\boxed{\text{งานรวม} = \sum_{i=1}^{n}(H + t_i^*)\rho A(t_i^*)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{ซึ่งมีลิมิตเป็น} = \int_0^R (H + x)\rho A(x)dx}$$

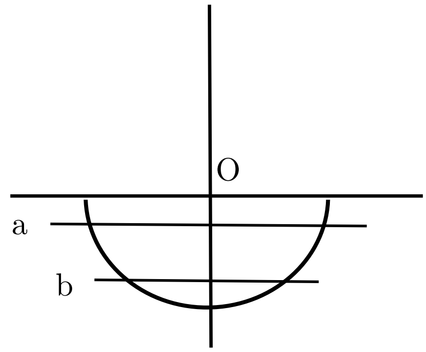
เมื่อแทนค่า $A(x)$ แล้วอินทิเกรต จะได้ค่าที่แม่นตรงของงานที่เราต้องการคำนวณเท่ากับ

$$\int_0^R (H + x)\rho\pi(R^2 - x^2)dx = \ldots$$

(ให้นิสิตทำต่อเป็นแบบฝึกหัด)

ในกรณีทั่วๆไป การคำนวณหางานที่ใช้ในการสูบน้ำหรือของเหลวอื่นๆ ก็จะทำได้ในทำนองเดียวกัน คือจะได้เป็นสูตร

$$\text{งาน} = \int_a^b (H+x)\rho A(x)dx$$

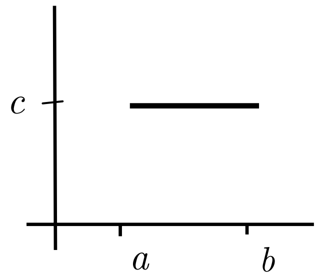


โดยที่ H เป็นระยะทางเหนือ origin ขึ้นไป $A(x)$ เป็นพื้นที่หน้าตัดของภาชนะที่ระดับ x ใต้ origin ลงมา a เป็นระดับผิวน้ำเมื่อเริ่มต้น b เป็นระดับผิวน้ำเมื่อสูบเสร็จ

3.4.5 การคำนวณหาโมเมนต์และเซนทรอยด์

นิสิตได้เคยเรียนรู้เรื่องโมเมนต์มาแล้ว และคงได้เคยคำนวณหาโมเมนต์มาบ้างแล้ว ในกรณีที่มวลที่เราจะหาโมเมนต์มีขนาดเล็กจนถือได้ว่าเป็นจุด โมเมนต์ของมันเทียบกับเส้นใดๆก็คือผลคูณของมวลนั้นกับระยะจากจุดนั้นถึงเส้น การหาโมเมนต์ของมวลที่มีขนาดใหญ่ก็ทำได้โดยการพิจารณาว่าประกอบขึ้นด้วยมวลขนาดเล็กหลายๆ ชิ้น จึงทำได้โดยการอินทิเกรต

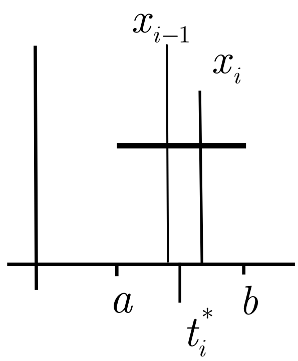
จะขอเริ่มด้วยตัวอย่างการคำนวณหาโมเมต์ของเส้นลวดตรงซึ่งวางอยู่ในตำแหน่งดังแสดงในรูปขวามือ



สมมติว่าเส้นลวดนี้มีปลายทั้งสองอยู่ที่ (a,c) กับ (b,c) จึงมีความยาว $L= b - a$ ในที่นี้จะถือว่าลวดนี้มีแต่ความยาว ไม่มีความกว้างหรือความหนา และจะสมมติว่าลวดนี้มีมวล ρ หน่วยต่อหน่วยความยาว

เราแบ่งเส้นลวดเป็นท่อนสั้นๆ ตามจุดแบ่ง

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$



ท่อนที่ i มีมวล $\rho(x_i - x_{i-1})$

โมเมนต์เทียบกับแกนทั้งสองของท่อนที่ i มีค่าดังนี้

$$\boxed{\begin{aligned} \text{เทียบกับแกน}\,x &= c\,\rho(x_i - x_{i-1}) \\ \text{เทียบกับแกน}\,y &= t_i^*\,\rho(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}}$$

เมื่อหาผลรวม และหาลิมิตของผลรวม จะสรุป ได้ว่า โมเมนต์ของเส้นลวดมีค่าดังนี้

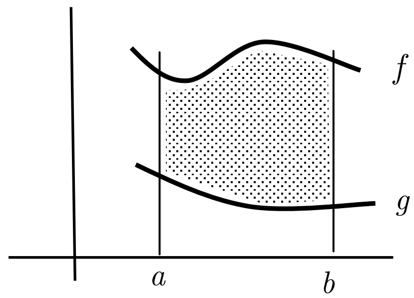
มีค่าเท่ากับมวล (ρL) คูณกับระยะจากแกน X

$$\text{เทียบกับแกน}\, x \;=\; \int_a^b c\,\rho\,dx = \rho L c$$

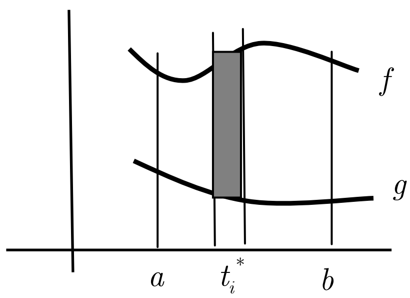
$$\text{เทียบกับแกน}\, y \;=\; \int_a^b x\,\rho\,dx = \rho L\frac{(a+b)}{2}$$

มีค่าเท่ากับมวล (ρL) คูณกับระยะจากจุดกึ่งกลางถึงแกน

จากที่กล่าวมา เห็นได้ว่าโมเมนต์ของวัตถุที่มีลักษณะเป็นท่อนตรงเทียบกับแกนที่ขนานกับวัตถุนั้น เท่ากับผลคูณของมวลของวัตถุกับระยะจากวัตถุถึงแกน โมเมนต์ของวัตถุที่มีลักษณะเป็นท่อนตรงเทียบกับแกนที่ตั้งฉากกับวัตถุนั้น เท่ากับผลคูณของมวลของวัตถุกับระยะจากจุดกึ่งกลางวัตถุถึงแกน



ลำดับต่อไป เราจะพิจารณาหาโมเมนต์ของวัตถุที่มี ความกว้างและความยาว แต่ไม่มีความหนา เช่น แผ่นบางๆที่ถูกปิดล้อมอยู่ระหว่างกราฟของ $y = f(x)$ กับ $y = g(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ดังแสดงในรูปขวามือ



เราแบ่งวัตถุเป็นแถบผอมๆ ตามแนวดิ่ง (ในที่นี้แสดงไว้เพียงแถบเดียว) เมื่อให้จำนวนแถบมากขึ้น แต่ละแถบก็เปรียบได้กับเส้นลวด เราจึงประมาณโมเมนต์ของแต่ละแถบได้โดยอาศัยความรู้ที่กล่าวมาข้างต้น

ลำดับแรกเราจะหาโมเมนต์เทียบกับแกน x สมมติให้ ρ เป็นมวลต่อหน่วยพื้นที่ของวัตถุ เราจะได้ว่ามวลของแถบที่ i มีค่าประมาณ

$$\rho\,(f(t_i^*) - g(t_i^*))(x_i - x_{i-1})$$

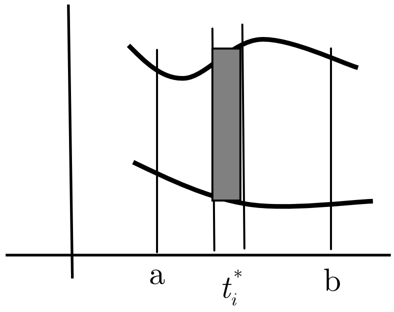
ระยะจากจุดกึ่งกลางของแถบนี้ไปยังแกน x คือ $\dfrac{(f(t_i^*) + g(t_i^*))}{2}$

ซึ่งเมื่อคูณกันก็จะได้โมเมนต์ของแถบดังกล่าว $= \dfrac{1}{2}\rho\,(f(t_i^*)^2 - g(t_i^*)^2)(x_i - x_{i-1})$

ค่าโมเมนต์ที่ต้องการก็คือลิมิตของผลบวกเหล่านี้จึงได้ว่า

$$M_x = \text{โมเมนต์เทียบกับแกน } x = \frac{1}{2}\rho\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)dx$$

การหาโมเมนต์เทียบกับแกน y เราก็คงใช้การแบ่งวัตถุออกเป็นแถบเช่นเดียวกัน การประมาณมวลของแถบก็เหมือนเดิม ต่างกันก็เฉพาะระยะจากแถบถึงแกน ในกรณีนี้เราต้องใช้ ระยะจากแถบถึงแกน y ซึ่งก็คือ t_i^* จึงได้ว่าโมเมนต์ของแถบที่ i



$$= t_i^*\rho(f(t_i^*) - g(t_i^*))(x_i - x_{i-1})$$

โดยการหาลิมิตของผลบวก เราจะได้ว่า

$$M_y = \text{โมเมนต์เทียบกับแกน } y = \rho\int_a^b x(f(x) - g(x))dx$$

เราเรียกจุดที่เสมือนว่ามวลของวัตถุทั้งชิ้นรวมกันอยู่ที่นั่นว่า **เซนทรอยด์** (centroid) ถ้า $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นเซนทรอยด์ของวัตถุที่มีมวล m และมีโมเมนต์เทียบกับแกน x และแกน y เป็น M_x และ M_y ตามลำดับ เราจะได้ว่า

$$m\overline{x} = M_x \quad \text{และ} \quad m\overline{y} = M_y$$

ซึ่งจากสมการทั้งสองนี้ เราจะหาเซนทรอยด์ได้

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = 2x$ และ $y = x^2$ บนช่วง $[0,3]$
2. จงเขียนอินทิกรัลแทนพื้นที่ระหว่าง $f(x) = e^x$ และ $g(x) = -(x-1)^2$ แล้วประมาณค่าอินทิกรัลด้วยเกณฑ์ของซิมป์สัน โดยแบ่งเป็น 8 ช่วงเท่าๆ กัน
3. จงหาปริมาตรของพีรามิดตรงที่มีความสูงตรง h หน่วย และมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีด้านยาว d หน่วย
4. จงหาปริมาตรของพีรามิดตรงที่มีความสูงตรง h หน่วย และมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $d \times k$ ตารางหน่วย
5. ตัดทรงกลมรัศมี R ด้วยระนาบตั้งฉากกับรัศมีสองครั้งซึ่งห่างจากจุดศูนย์กลาง M และ N ตามลำดับ โดยที่ $0 \le M \le N \le R$ ทำให้วงกลมถูกแบ่งเป็น 3 ส่วน จงเขียนอินทิกรัลแทนปริมาตรส่วนของทรงกลมดังกล่าวแต่ละส่วน และหาค่านั้น
6. ลวดสปริงอยู่ในตำแหน่งสมดุลมีความยาวธรรมชาติ 9 นิ้ว ถ้าใช้น้ำหนัก 3 ปอนด์ ลวดสปริงจะยืดออก 3 นิ้ว งานที่เกิดจากการทำให้ลวดสปริงมีความยาวเป็น 1.5 ฟุต มีค่าเป็นกี่ฟุต-ปอนด์

3.5 การอินทิเกรตได้ (Integrability)

นิสิตได้คุ้นเคยกับการนำอินทิกรัลไปประยุกต์ใช้กับการคำนวณหาปริมาณต่าง ๆมาแล้วพอสมควร และคงสังเกตเห็นว่า ที่เราสามารถนำอินทิกรัลไปประยุกต์ใช้ได้นั้น เป็นเพราะปริมาณที่เราต้องการคำนวณล้วนเป็นลิมิตของผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชัน f ฟังก์ชันหนึ่งบนช่วงปิดช่วงหนึ่ง เราทราบว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ผลบวกรีมันน์ของมัน ย่อมมีลิมิตเป็นอินทิกรัลบนช่วงดังกล่าว *เราทราบได้อย่างไรว่าฟังก์ชันนั้นอินทิเกรตได้? !*

เท่าที่นิสิตได้เรียนมาแล้ว การตรวจสอบว่าฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งอินทิเกรตได้หรือไม่นั้นมีอยู่สองวิธี

1) อินทิกรัลล่างกับอินทิกรัลบนเท่ากันหรือไม่
2) ทุกผลบวกรีมันน์มีลิมิตเดียวกันหรือไม่

ทั้งสองวิธีนี้เป็นวิธีที่ทำได้ยาก ไม่เหมาะกับการใช้งาน

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยให้เราพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับการอินทิเกรตได้ ได้ง่ายขึ้น

ทฤษฎีบท 3.4

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว f ย่อมเป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ทฤษฎีบท 3.5

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตในช่วง $[a,b]$ และมีจุดใน $[a,b]$ ที่ f ไม่ต่อเนื่องเพียงจำนวนจำกัดแล้ว f ย่อมเป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

ทฤษฎีบททั้งสองนี้เป็นเพียงเงื่อนไขพอเพียงของการอินทิเกรตได้ แต่ไม่จำเป็นว่าฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ทุกฟังก์ชันจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขในทฤษฎีบท ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุดต่าง ๆ ในช่วง $[a,b]$ เป็นจำนวนอนันต์แต่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ ได้ก็มี ฟังก์ชันที่เราได้นำมาอินทิเกรตกันแล้วนั้นล้วนเป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ทั้งสิ้น จากทฤษฎีบททั้งสองบทที่กล่าวมานั้น จะเห็นว่าฟังก์ชันที่อินทิเกรตไม่ได้นั้น ต้องมีจุดที่ไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนอนันต์ *เราจะเขียนกราฟดูไม่ได้ !*

ตัวอย่าง 3.11

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่า

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ}\\ 1, & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ}\end{cases}$$

จงคำนวณหา อินทิกรัลล่าง กับ อินทิกรัลบนของ f บนช่วง [0,1] และพิจารณาว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง [0,1] หรือไม่

วิธีทำ (แสดงในห้องเรียน ได้ผลการพิจารณา f อินทิเกรตบนช่วง [0,1] ไม่ได้)

3.6 บทนิยามที่รัดกุมของความต่อเนื่อง

ความคิดเรื่องความต่อเนื่องที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 นั้น เป็นเพียงความคิดคร่าวๆ ที่อธิบายด้วยกราฟ ซึ่งไม่อาจจะนำมาใช้ในการพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่เราเขียนกราฟไม่ได้ เช่นฟังก์ชันในตัวอย่าง 3.11 ดังนั้น ต่อไปนี้เราจะทำความเข้าใจกับบทนิยามของความต่อเนื่องที่กล่าวไว้อย่างรัดกุม และใช้ได้กับฟังก์ชันโดยทั่วไป

เพื่อให้เข้าใจบทนิยามที่รัดกุมของความต่อเนื่องได้ง่ายขึ้น เราจะพิจารณาคุณสมบัติบางประการของฟังก์ชันต่อเนื่องกันเสียก่อน

ให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆที่มีค่ากำหนดไว้ที่ทุกๆ จุดในช่วงเปิด (a,b) ให้ c เป็นจุดหนึ่งในช่วงนี้ เราจะพิจารณาดูค่าของ

$$E(x) = |\ f(x) - f(c)\ |$$

สำหรับค่าต่างๆของ x ที่อยู่ใกล้ๆ c เราจะวัดความใกล้ c ของ x ด้วย

$$D(x) = |\ x - c\ |$$

ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ c เราจะสามารถทำให้ $E(x)$ มีค่าน้อยเท่าใดก็ได้โดยการกำหนดให้ x อยู่ใกล้ c ให้พอ กล่าวคือ ไม่ว่าใครจะต้องการให้ $E(x)$ มีค่าน้อยกว่าจำนวนบวก e ใดๆ ที่เขากำหนดให้มา เราจะสามารถตีกรอบค่า x โดยการหาจำนวนบวก d มาสักจำนวนหนึ่งที่ทำให้ทุกๆ x ในกรอบ $D(x) < d$ ล้วนเป็น x ที่ $E(x) < e$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 2x + 7$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ทุกๆ จุด เราจะ ใช้ค่าใดๆ เป็นค่า c ที่กล่าวมาข้างต้นก็ได้ เพื่อให้ชัดเจน จะขอกำหนดให้ $c = 3$ เมื่อคำนวณค่า $E(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(x) &= |\, f(x) - f(3)\, | \\ &= |\, (2x+7) - (2\cdot 3 + 7)\, | \\ &= 2\,|\, x - 3\, | \end{aligned}$$

สำหรับกรณีตัวอย่าง $f(x) = 2x + 7$ กับ $c = 3$ เราได้

$$E(x) = 2\,|\, x - 3\, | \text{ และ } D(x) = |\, x - 3\, |$$

จะเห็นได้ว่าไม่ว่าใครจะให้จำนวนบวก e ใดๆ มา และต้องการให้เรากำหนดกรอบค่า $D(x)$ ในรูป $D(x) < d$ ที่ทำให้ $E(x) < e$ สำหรับทุกๆ x ที่ $D(x) < d$ เราจะทำได้โดย

กำหนดให้ d มีค่าไม่เกินครึ่งหนึ่งของค่า e ที่ให้มา เช่นถ้าเขากำหนด $e = 5$ เราก็อาจใช้ $d = 2$ ก็ได้ เพราะ $D(x) < 2$ ก็คือ $|x-3| < 2$ ซึ่งจะได้ $2|x-3| < 4$ ซึ่งทำให้ได้ด้วยว่า $E(x) = 2|x-3| < 4 < 5$

ค่า d ที่เราเลือกมากำหนดกรอบ $D(x) < d$ นั้น อาจเลือกได้ต่างๆ นานา สำหรับ $e = 5$ นั้น เราจะใช้ $d = 2.5$ ก็ได้

เพื่อให้เห็นจริงว่าไม่ว่าใครจะกำหนดจำนวนบวก e ใดๆให้ เราจะเลือกจำนวนบวก d ที่ทำให้ $E(x) < e$ สำหรับทุกๆ x ที่ $D(x) < d$ เสมอไป เราทำได้โดยให้ค่า d โดยบอกเป็นสูตรที่ เขียนในพจน์ของ e เช่นเลือก $d = \frac{e}{2}$ เป็นต้น

แต่ทั้งนี้เราต้องให้เหตุผลสนับสนุนให้ได้ว่าการเลือกค่า d ตามสูตรที่ให้นั้นใช้การได้เสมอ สำหรับกรณีตัวอย่างนี้ เราให้เหตุผลสนับสนุนการเลือกค่า $d = \frac{e}{2}$ ดังนี้

ให้ x เป็นจำนวนใดๆซึ่ง $D(x) < d$ ดังนั้น $|x-3| < \frac{e}{2}$ แต่ $E(x) = 2|x-3|$ จึงย่อมได้ว่า $E(x) < 2 \cdot \frac{e}{2} = e$ นั่นคือ เราได้ว่า $E(x) < e$ สำหรับทุกๆ x ซึ่ง $D(x) < d$

คำถาม: ได้สูตร $d = \frac{e}{2}$ มาอย่างไร?

คำตอบ: ได้มาจากการวิเคราะห์ ซึ่งมีดังนี้

ต้องการ $E(x) < e$ แต่

$$E(x) = |(2x+7) - ((2)(3)+7)| = |2x - (2)(3)| = 2|x-3|$$

จึงต้องการ $2|x-3| < e$ ซึ่งสมมูลกับ $|x-3| < \frac{e}{2}$ เห็นได้ว่า ถ้า $|x-3| < \frac{e}{2}$ ก็จะได้ $E(x) = 2|x-3| < e$ ตามที่ต้องการ

จากกรณีตัวอย่าง เห็นได้ว่า สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีความต่อเนื่องที่จุด c นั้น ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

สำหรับจำนวนบวก e ใดๆ ย่อมมีจำนวนบวก d ซึ่ง $|f(x) - f(c)| < e$ สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $|x-c| < d$

และ สำหรับ f ที่ไม่ต่อเนื่องที่ c เราจะพบว่าข้อความนี้ไม่เป็นจริง ข้อความนี้จึงเป็นลักษณะเฉพาะ ของฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด c ใดๆ เราจึงอาจใช้ข้อความนี้เป็นบทนิยามของความต่อเนื่อง

ในการเขียนบทนิยามของความต่อเนื่องที่ทำกันเราไม่นิยมใช้สัญลักษณ์ e กับ d เป็นตัวแปร ตัวแปรที่นิยมใช้กันโดยทั่วไปคือ ε กับ δ ซึ่งเป็นอักษรกรีกในลำดับเดียวกันกับ e กับ d

อ่าน ε ว่า **เอปไซลอน** (epsilon)

อ่าน δ ว่า **เดลตา** (delta)

บทนิยามของความต่อเนื่อง และลิมิตจึงเป็นดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.5

เรากล่าวว่า f **มีความต่อเนื่องที่** c ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|\, f(x) - f(c)\,| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ x ซึ่ง $|\, x - c\,| < \delta$

เมื่อพิจารณาบทนิยามแบบคร่าว ๆของลิมิตที่กล่าวไว้ข้างต้น ประกอบกับบทนิยามของความต่อเนื่องข้างบน เราก็อาจเขียนบทนิยามของลิมิตเสียใหม่ให้รัดกุมและใช้ได้ทั่วไปได้ดังนี้

บทนิยาม 3.6

เรากล่าวว่า f **มีลิมิตที่** c **เป็น** $\boldsymbol{L}$ และเขียนว่า $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|\, f(x) - L\,| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ x ซึ่ง $0 < |\, x - c\,| < \delta$