บทที่ 3
อินทิกรัล

3.1 ที่มาของอินทิกรัล

Morris Kleine กล่าวไว้ในหนังสือชื่อ Mathematics and the Physical World ว่านิวตันต้องรอถึง 20 ปี กว่าจะพิมพ์เผยแพร่กฎข้อที่ 3 ของเขา เพราะต้องรอให้พิสูจน์ได้เสียก่อนว่าการคำนวณแรงดึงดูดระหว่างวัตถุรูปทรงกลมนั้นอาจคำนวณได้โดยคิดถือเอาว่ามวลของทรงกลมนั้นอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม การพิสูจน์ต้องใช้ความคิดเรื่องอินทิกรัล (integral) ซึ่งเป็นเรื่องหนึ่งของแคลคูลัส ก่อนอื่นเรามาพิจารณาดูกันว่าเหตุใดจึงน่าสงสัยว่าเราคิดเอาไม่ได้ว่ามวลของวัตถุต่าง ๆที่ดึงดูดกันนั้นต้องอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวัตถุนั้น ๆ

ลองพิจารณาแรงดึงดูดระหว่างวัตถุ A กับ B ในสองกรณีต่อไปนี้เปรียบเทียบกัน

(ก

(ข)

กรณีใดมากกว่ากัน ? กรณีใดควรจะมีแรงดึงดูดมากกว่า?

กรณี (ข) วัตถุ B ประกอบด้วย B ในกรณี (ก) รวมกับส่วนที่ยาวขึ้นกว่ากรณี (ก) ส่วนที่ยาวขึ้นนี้ย่อมทำให้ได้แรงดึงดูดเพิ่มขึ้น จึงตอบว่าแรงดึงดูดในกรณี (ข) มากกว่าในกรณี (ก)

แต่ถ้าเราใช้กฎของนิวตันคำนวณหาแรงดึงดูด โดยการถือเอาว่ามวลของ B อยู่ที่จุดศูนย์กลางของ B ได้ดังต่อไปนี้

ให้ A มีมวล m และ A อยู่ห่างจาก B เป็นระยะ L

กรณี (ก) สมมติ B ยาว $2L$ และมีมวล M

จะได้ว่ามวลของ A และ B อยู่ห่างกัน $L+L = 2L$

ดังนั้น แรงดึงดูดคือ $\dfrac{GmM}{(2L)^2} = \dfrac{GmM}{4L^2} = \dfrac{2}{8}\dfrac{GmM}{L^2}$

กรณี (ข) สมมติ B ยาว $4L$ ดังนั้นมีมวล $2M$

จะได้ว่ามวลของ A และ B อยู่ห่างกัน $L+2L = 3L$

ดังนั้น แรงดึงดูดคือ $\dfrac{GmM}{(3L)^2} = \dfrac{Gm(2M)}{9L^2} = \dfrac{2}{9}\dfrac{GmM}{L^2}$

ซึ่งจะพบว่า การถือเอาว่ามวลของ B อยู่ที่จุดศูนย์กลางของ B คำนวณแรงดึงดูดในกรณี (ข) น้อยกว่าในกรณี (ก) ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่ควรเป็น

ตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นแสดงให้เห็นว่าการคำนวณแรงดึงดูดระหว่างวัตถุโดยทั่วๆไป ด้วยกฎของนิวตันนั้น เราไม่อาจที่จะถือเอาว่ามวลของวัตถุอยู่ที่จุดศูนย์กลางของมันเสมอไป ต่อไปนี้เป็นแนวทางในการคำนวณแรงดึงดูดระหว่างวัตถุในตัวอย่างที่กล่าวมา การคำนวณดังกล่าวนี้จะเป็นการประมาณค่า เพื่อหาว่าแรงดึงดูดที่แท้จริงนั้นมีค่าอยู่จะหว่างสองค่าใด

สมมติว่าวัตถุชิ้นที่หนึ่งเป็นจุด A มีมวล m วัตถุชิ้นที่สองเป็นส่วนของเส้นตรง BC ซึ่งมีความยาว L และมีมวล M วัตถุทั้งสองวางเรียงกันอยู่ดังรูป

ในที่นี้จะสมมติว่า A อยู่ที่จุดกำเนิด B อยู่ห่างจาก A ด้วยระยะทาง d และ BC มีควายาว L และจะถือเอาว่ามวลของ BC อยู่ระหว่าง B กับ C สมมติว่ามวลของ BC อยู่ที่จุด T ห่างจาก A เป็นระยะทาง t หน่วย

ดังนั้นแรงดึงดูด = $\dfrac{GmM}{t^2}$ แต่ t มีค่าอยู่ระหว่าง d กับ $d+L$ จึงได้ว่า

$$\frac{GmM}{(d+L)^2} \leq \frac{GmM}{t^2} \leq \frac{GmM}{d^2}$$

นั่นคือ เราได้ว่า แรงดึงดูดมีค่าอยู่ระหว่างค่าสองค่า

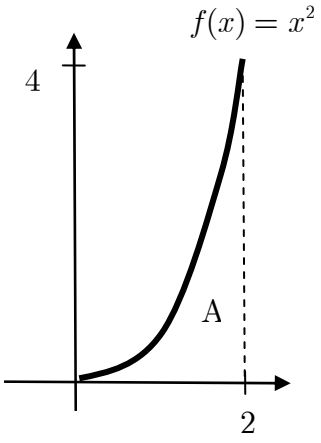
คราวนี้เราจะคิดเอาว่า BC ประกอบด้วยวัตถุสองชิ้น คือ BD กับ DC

แล้วประมาณค่าแรงดึงดูดของวัตถุแต่ละชิ้นว่าอยู่ระหว่างสองค่าใด เมื่อนำมารวมกันเราก็จะได้ค่าประมาณของแรงดึงดูดที่อยู่ในช่วงที่แคบเข้ามา หากเราแบ่ง BC ออกเป็นชิ้นที่ยิ่งเล็กลง แต่มีมากชิ้นขึ้น การประมาณก็จะยิ่งดีขึ้น

มีการคำนวณปริมาณต่างๆหลายอย่างที่ทำได้ด้วยวิธีการหาค่าประมาณเป็นช่วง โดยทำให้ช่วงที่ใช้ในการประมาณนั้นแคบเข้าเท่าใดก็ได้ ในทำนองเดียวกันกับที่เราทำกับการคำนวณแรงดึงดูด เราจะหยุดพักเรื่องแรงดึงดูดไว้ชั่วคราว จะไปดูการคำนวณอย่างอื่นในลักษณะเดียวกันที่เห็นได้ง่ายกว่ากันเสียก่อน แล้วจึงกลับมาพิจารณาการคำนวณแรงดึงดูดระหว่างวัตถุ อย่างอื่นที่ว่านี้ก็คือ *พื้นที่ใต้เส้นโค้ง*

ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างการคำนวณหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างกราฟของฟังก์ชันกับช่วงปิดบนแกน X ฟังก์ชันที่จะนำมาเป็นตัวอย่างในที่นี้ คือ $f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 2$

ซึ่งมีกราฟในช่วงดังกล่าวดังนี้

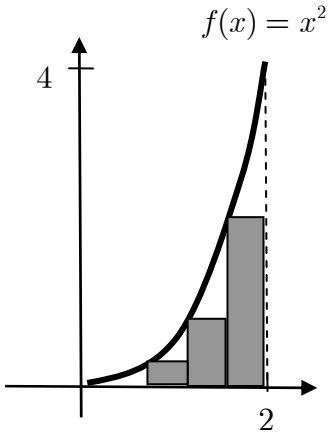


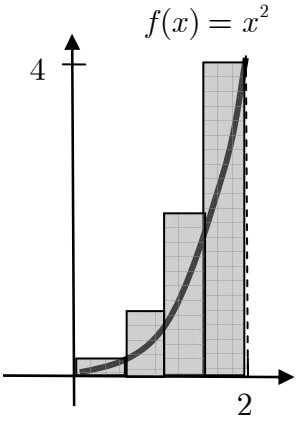
เราจะพิจารณาว่าพื้นที่ A ระหว่างกราฟกับช่วง $[0,2]$

มีค่าเท่าใด

โดยจะประมาณว่า A มีค่าอยู่ระหว่างสองค่าใด

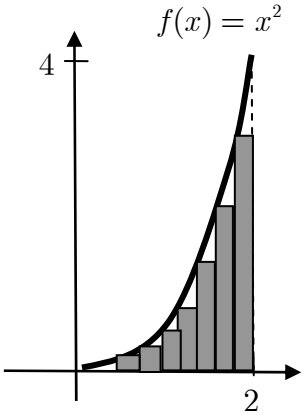
เราจะหาค่าที่น้อยกว่าพื้นที่ A โดยการแบ่งช่วง $[0,2]$ ออกเป็นส่วนย่อยๆ แล้วสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนช่วงย่อย บรรจุลงในพื้นที่ดังกล่าวให้สูงมากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเหล่า นี้ย่อมน้อยกว่าพื้นที่ A





เราจะหาค่าที่มากกว่าพื้นที่ A โดยการแบ่งช่วง $[0,2]$ ออกเป็นส่วนย่อยๆ แล้วสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนช่วงย่อย ให้คลุมพื้นที่ดังกล่าว แต่ให้ต่ำที่สุดเท่าที่จะทำได้

ผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเหล่านี้ย่อมมากกว่าพื้นที่ A



สำหรับการแบ่งที่ใช้หาค่าที่น้อยกว่าพื้นที่ A นั้น ถ้าเราแบ่งช่วงให้เป็นส่วนย่อยยิ่งขึ้น ผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีค่ามากขึ้น จึงใกล้ค่าพื้นที่ A ยิ่งขึ้น

สำหรับการแบ่งที่ใช้หาค่าที่มากกว่าพื้นที่ A นั้น ถ้าเราแบ่งช่วงให้เป็นส่วนย่อยยิ่งขึ้น ผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีค่าน้อยลง และใกล้เคียงค่าพื้นที่ A ยิ่งขึ้นเช่นกัน

เราจะแบ่งช่วง $[0,2]$ ออกเป็น n ส่วนเท่าๆ กัน แล้วคำนวณหาผลบวกพื้นที่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองแบบในพจน์ของ n เราจะแทนผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายใน และผลบวกพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใช้ปกคลุมด้วยสัญลักษณ์ L_n และ U_n ตามลำดับ

เราจะพบว่า (แสดงในห้องเรียน)

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{8(i-1)^2}{n^3}=\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\frac{8}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$U_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

เมื่อพิจารณาหาค่าลิมิต เราจะพบว่า

$$\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}$$

แต่เนื่องจาก $L_n\le A\le U_n$ จึงได้ว่า $A=\dfrac{2^3}{3}=\dfrac{8}{3}$

ในที่นี้ เราได้ **ค่าแม่นตรง** (exact value) ของ A

การได้ค่าแม่นตรงของ A นั้นไม่ใช่เรื่องบังเอิญ เฉพาะกรณีของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ บนช่วง $[0,2]$ เท่านั้น เราอาจใช้วิธีการคำนวณแบบที่กล่าวมากับฟังก์ชันใดๆ บนช่วงปิดที่มีขอบเขตใดๆ ก็ได้ ถ้าฟังก์ชันนั้นๆ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงดังกล่าว เราจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

เสมอ

ฟังก์ชันที่เรานำมาคำนวณหาพื้นที่ระหว่างกราฟของมันกับช่วงบนแกน X นั้นต้องเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีค่าเป็นลบในช่วงนั้น เพื่อว่าเส้นกราฟจะได้อยู่เหนือแกน X ตลอดช่วง อย่างไรก็ตาม**วิธีการคำนวณ**ที่ใช้คำนวณหาพื้นที่ดังที่กล่าวมานั้น หากจะนำมาใช้กับฟังก์ชันโดยทั่วไปที่มีค่าเป็นลบบ้างก็ย่อมทำได้ แต่จะใช้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นพื้นที่ย่อมทำไม่ได้ เพราะพจน์ต่างๆ ที่บวกกันเป็น L_n กับ U_n นั้นอาจมีบางพจน์เป็นลบตัดกันไปบ้าง

วิธีการคำนวณดังกล่าวนี้ นอกจากจะใช้คำนวณหาพื้นที่แล้ว ยังใช้คำนวณหาปริมาณอย่างอื่นๆ ได้อีกมากมาย เช่น งาน แรง นักคณิตศาสตร์จึงศึกษาวิธีการคำนวณนี้สำหรับฟังก์ชันโดยทั่วๆ ไป โดยเรียกวิธีคำนวณแบบนี้ว่า **การอินทิเกรต** (integration) และเรียกผลลัพธ์ของการคำนวณว่า **อินทิกรัล** (integral) คำว่า **integral** นี้ ราชบัณฑิตยสถาน ให้ใช้คำไทยว่า **ปริพันธ์** หรือ **อินทิกรัล** *ต่อไปนี้จะใช้คำว่า อินทิกรัล*

อินทิกรัลที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็น **อินทิกรัลจำกัดเขต** (definite integral) มีบทนิยามของอินทิกรัลต่างๆ กันหลายแบบ ในที่นี้จะนำมากล่าวเพียงสองแบบ คือ **แบบของดาร์บู** (Darboux) กับ **แบบของรีมันน์** (Riemann) บทนิยามสองแบบนี้อธิบายไม่เหมือนกัน แต่พิสูจน์ได้ว่าให้ความหมายเดียวกัน กล่าวคือเป็นบทนิยามที่สมมูลกัน

ต่อไปนี้เป็นบทนิยามแบบของดาร์บู

บทนิยาม 3.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมช่วง $[a,b]$ และมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$
ให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ และให้

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

เป็นการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ n ช่วง คือ

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ให้

$$m_i = \text{glb ของ } f \text{ บน } [x_{i-1},x_i]$$
$$M_i = \text{lub ของ } f \text{ บน } [x_{i-1},x_i]$$

ในที่นี้ glb กับ lub หมายถึงค่าขอบเขตล่างสูงสุด กับค่าขอบเขตบนต่ำสุดของ f ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ตามลำดับ

เราเรียกผลบวก $L = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ ว่า **ผลบวกล่างแบบดาร์บู** และเรียกผลบวก $U = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ ว่า **ผลบวกบนแบบดาร์บู**

เราเรียก ขอบเขตบนต่ำสุด ของเซตของบรรดาค่า L ทั้งหลายทั้งหลายว่า **อินทิกรัลล่าง** (lower integral) ของ f บนช่วง $[a,b]$ และเรียก ขอบเขตล่างสูงสุด ของเซตของบรรดาค่า U ทั้งหลายทั้งหลายว่า**อินทิกรัลบน** (upper integral) ของ f บนช่วง $[a,b]$

ถ้า อินทิกรัลล่าง กับ อินทิกรัลบน ของ f บนช่วง $[a,b]$ มีค่าเท่ากัน เรากล่าวว่า ***f* เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรดได้บนช่วง** $[a,b]$ (f is integrable over the interval $[a,b]$) และเรียกค่าที่เท่ากันของอินทิกรัลล่างกับอินทิกรัลบนนั้นว่า **อินทิกรัล** (integral) ของ f บนช่วง $[a,b]$

(จบบทนิยาม 3.1)

ตัวอย่าง 3.1

กำหนดให้ $f(x) = x$ จงหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,2]$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[0,2]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{2}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i = 1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1}, x_i] = [(i-1)\frac{2}{n}, \frac{2i}{n}]$

ซึ่งได้ว่า ค่าน้อยที่สุดของช่วงคือ $m_i = \frac{(i-1)2}{n}$ และ ค่ามากสุดของช่วงคือ $M_i = \frac{2i}{n}$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,2]$ คือ

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)2^2}{n^2} \\ &= \frac{2^2}{n^2}(0 + 1 + \cdots + (n-1)) = \frac{2^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

และผลบวกบนแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,2]$ คือ

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(2)^2}{n^2} \\ &= \frac{2^2}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{2^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

หมายเหตุ

เนื่องจากบทนิยามกำหนดไว้ว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต จึงต้องมีค่า m ค่าหนึ่ง ซึ่ง $f(x) \leq M$ ทุกๆ x ในช่วง $[a,b]$ ดังนั้น $m_i \leq M, \quad i = 1,2,\ldots,n$
จึงได้ว่า

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

คือเราได้ว่า

เซตของบรรดาค่า L ทั้งหลายเป็นเซตที่มีขอบเขตบน จึงย่อมมีขอบเขตบนต่ำสุด

ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

เซตของบรรดาค่า U ทั้งหลายเป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง จึงย่อมมีขอบเขตล่างสูงสุด

ข้อสังเกต

1. สำหรับวิธีแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ แล้วนำมาคำนวณ ผลบวกล่าง L กับผลบวกบน U ย่อมได้ว่า $L \leq U$ เสมอไป

2. ถ้า L' เป็นผลบวกล่าง ที่คำนวณโดยใช้การแบ่งที่แบ่งย่อยกว่าการแบ่งที่ใช้ในการคำนวณผลบวกล่าง L ย่อมได้ว่า $L \leq L'$ ส่วนผลบวกบน U' กับ U ที่คำนวณจากการแบ่งดังกล่าว เราจะได้ว่า $U' \leq U$

3. สำหรับการแบ่งช่วง $[a,b]$ สองแบบใดๆ

$$P' = \{x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'}\}, \quad P'' = \{x''_0, x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n''}\}$$

ถ้าเราให้ P เป็นการแบ่งที่ใช้จุดแบ่งทั้งของ P' และ ของ P'' รวมกัน (union กัน) เราย่อมได้ว่า $L' \leq L \leq U \leq U''$ แสดงว่าบรรดาผลบวกล่างทั้งหลายมีผลบวกบนทั้งหลายเป็นขอบเขตบน และผลบวกล่างต่างก็เป็นขอบเขตล่างของบรรดาขอบเขตบน

$$\text{อินทิกรัลล่าง} \quad \leq \quad \text{บรรดาผลบวกบน}$$

$$\text{บรรดาผลบวกล่าง} \quad \leq \quad \text{อินทิกรัลบน}$$

$$\text{อินทิกรัลล่าง} \quad \leq \quad \text{อินทิกรัลบน}$$

4. ถ้า $\{L_n\}$ เป็นลำดับใดๆของผลบวกล่างเราย่อมได้ว่า $L_n \leq$ อินทิกรัลล่าง

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{n\to\infty} L_n \leq \text{อินทิกรัลล่าง}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\{U_n\}$ เป็นลำดับใดๆของผลบวกบน เราจะได้ว่า

$$\text{อินทิกรัลบน} \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty} U_n$$

อสมการทั้งสองนี้ประกอบกับที่กล่าวมาก่อน ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} L_n \leq \text{ อินทิกรัลล่าง } \leq \text{ อินทิกรัลบน } \leq \lim_{n\to\infty} U_n$$

ดังนั้น ถ้า $\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n$ เราย่อมได้ว่า

อินทิกรัลล่าง = อินทิกรัลบน

แสดงว่าฟังก์ชันอินทิเกรตได้ และมีค่าเท่ากับค่าที่เท่ากันของค่าลิมิตทั้งสองนั้น

ตัวอย่าง 3.2

ย้อนกลับไปพิจารณาตัวอย่าง 3.1 แสดงการคำนวณหาพื้นที่ระหว่างกราฟของ $f(x) = x$ กับช่วง $[0,2]$ ในการพิจารณานั้น เราพบว่า

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n = 2$$

ตัวอย่างดังกล่าวจึงเป็นตัวอย่างที่แสดงว่า $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[0,2]$ และมีค่าอินทิกรัลเท่ากับ 2 □

ตัวอย่าง 3.3

จงแสดงว่า $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[0,c]$ สำหรับจำนวนบวก c ใดๆ และมีค่าของอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{c^2}{2}$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[0,c]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i = 1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1}, x_i] = [(i-1)\frac{c}{n}, \frac{ic}{n}]$

ซึ่งได้ว่า ค่าน้อยที่สุดของช่วงคือ $m_i = \frac{(i-1)c}{n}$ และ ค่ามากสุดของช่วงคือ $M_i = \frac{ic}{n}$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,c]$ คือ

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)c^2}{n^2} = \frac{c^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

และผลบวกบนแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,c]$ คือ

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{ic^2}{n^2} = \frac{c^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{c^2}{2}$ และ $\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{c^2}{2}$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{c^2}{2}$

□

ตัวอย่าง 3.4

จงแสดงว่า $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[c,0]$ สำหรับ c ที่เป็นจำนวนลบใดๆ และมีค่าของอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{c^2}{2}$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[c,0]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{-c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i = 1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1}, x_i] = [\frac{c(n-i+1)}{n}, \frac{c(n-i)}{n}]$

ซึ่งได้ว่าค่าน้อยที่สุดของช่วง คือ $m_i = \frac{c(n-i+1)}{n}$, ค่ามากสุดของช่วงคือ $M_i = \frac{c(n-i)}{n}$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[c,0]$ คือ

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-(n-i+1)c^2}{n^2} = \frac{-c^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

และผลบวกบนแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[c,0]$ คือ

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-(n-i)c^2}{n^2} = \frac{-c^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{-c^2}{2}$ และ $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{-c^2}{2}$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{-c^2}{2}$

□

ตัวอย่าง 3.5

จงหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บูของ $f(x) = x^2$ บนช่วง $[0,c]$ สำหรับจำนวนบวก c ใดๆ และจงแสดงว่า f อินทิเกรตได้บนช่วงนี้ พร้อมทั้งหาค่าอินทิกรัล

วิธีทำ แบ่งช่วง $[0,c]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i = 1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1}, x_i] = [(i-1)\frac{c}{n}, \frac{ic}{n}]$

ซึ่งได้ว่า ค่าน้อยที่สุดของช่วงคือ $m_i = \frac{(i-1)^2c^2}{n^2}$ และ ค่ามากสุดของช่วงคือ $M_i = \frac{i^2c^2}{n^2}$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,c]$ คือ

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \{\frac{(i-1)^2 c^3}{n^3}\} = \frac{c^3}{n^3}\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

และผลบวกบนแบบดาร์บูของ f บนช่วง $[0,c]$ คือ

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{i^2 c^3}{n^3}) = \frac{c^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{c^3}{3}$ และ $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{c^3}{3}$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{c^3}{3}$ □

ต่อไปนี้เป็น**บทนิยามแบบของรีมันน์**

บทนิยาม 3.2

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมช่วง $[a,b]$ และมีขอบเขตบนช่วง $[a,b]$ ให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ และให้

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

เป็นการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยๆ n ช่วง คือ

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

ให้ $t^*_1, t^*_2, \ldots t^*_n$ เป็นจุดใดๆ จากช่วงย่อย

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

ตามลำดับ เราเรียกผลบวก $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t^*_i)(x_i - x_{i-1})$ ว่า **ผลบวกรีมันน์ของ *f***

ถ้าสำหรับทุกๆ วิธีแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยที่ขนาดของช่วงกว้างที่สุดมีลิมิตเป็นศูนย์ เราได้ว่า $\lim_{n\to\infty} S_n$ มีค่าเดียวกันเสมอ เรากล่าวว่า f อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และเรียกค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty} S_n$ ว่า **อินทิกรัลของ *f* บนช่วง** $[a,b]$

จะสังเกตเห็นได้โดยง่ายว่า $L_n \le S_n \le U_n$ เสมอไป ดังนั้น ถ้า $\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n$

เราย่อมได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

แสดงว่าถ้าฟังก์ชันใดอินทิเกรตได้แบบดาร์บู ฟังก์ชันนั้นก็อินทิเกรตได้แบบรีมันน์ด้วย และ อินทิกรัลทั้งสองแบบมีค่าเดียวกัน กลับกันก็เป็นจริง คือ ถ้าฟังก์ชันใดอินทิเกรตได้แบบรีมันน์ ฟังก์ชันนั้นก็อินทิเกรตได้แบบดาร์บู แต่เราเห็นความจริงข้อนี้ได้ไม่ง่ายเหมือนข้อแรก

อินทิกรัลทั้งสองแบบจึงสมมูลกัน

แบบฝึกหัด 3.1

1. กำหนดให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^2 + 1$ บนช่วงต่อไปนี้ จงคำนวณหาผลบวกบนและผลบวกล่างของ f และ g บนช่วงนั้น (ในนิยามของอินทิกรัลจำกัดเขตแบบดาร์บู)
   1.1. $[0, c]$ เมื่อ $c > 0$
   1.2. $[c, 0]$ เมื่อ $c < 0$
   1.3. $[-c, c]$ เมื่อ $c > 0$
2. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$ บนช่วง $[0, 5]$
   จงบอกสูตรผลบวกรีมันน์ เมื่อแบ่ง $[0, 5]$ ออกเป็น n ช่วงเท่าๆ กัน และใช้ t_i^* เป็นจุดทางขวาสุดของแต่ละช่วงย่อย (ไม่ต้องคำนวณค่า)
3. ผลบวก $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (7 + (1 + \frac{2i}{n})^3)(\frac{2}{n})$ เป็นผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชันใดบนช่วงใด และผลบวกนี้มีลิมิตเป็นอินทิกรัลใด (ไม่ต้องอินทิเกรต)

การคำนวณหาค่าอินทิกรัลจะทำได้ง่ายขึ้นโดยการใช้สูตรและกฎต่างๆ เกี่ยวกับการอินทิเกรต ซึ่งจะได้กล่าวถึงในรูปของทฤษฎีบทต่างๆ การแถลงทฤษฎีบทต่างๆ เหล่านี้จะทำได้สะดวก และชัดเจนดีโดยการใช้สัญลักษณ์ ดังนั้นเรามาทำความรู้จัก และเข้าใจสัญลักษณ์สำหรับอินทิกรัลกันเสียก่อน

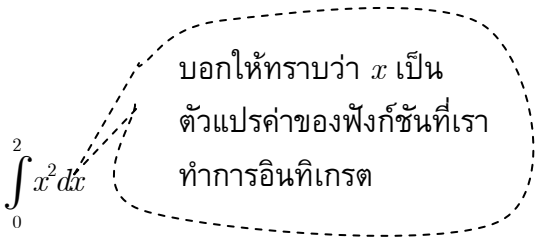
เราเขียนแสดงอินทิกรัลของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b]$ ด้วยสัญลักษณ์ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

เครื่องหมาย $\int$ คือ**เครื่องหมายอินทิเกรต** สัญลักษณ์ข้างบนหมายถึงค่าที่ได้จากการอินทิเกรตฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงปิดจาก a ถึง b

เครื่องหมายอินทิเกรตนั้นได้มาจากการนำอักษรตัวหน้าของคำว่า SUM มาดัดแปลงโดยการยืดออกจนกลายเป็นดังนี้

$$S \quad \int \quad \int \quad \int \quad \int$$

ในบางกรณีเราต้องการระบุสูตรบอกค่าฟังก์ชันไว้ในสัญลักษณ์ของอินทิกรัล เช่นต้องการแสดง $\displaystyle\int_0^2 \{(x, x^2) \mid 0 \le x \le 2\}$ สัญลักษณ์สำหรับใช้ในการนี้คือ



ในตัวอย่างที่กล่าวมานั้น สูตรบอกค่าฟังก์ชันมีตัวแปรค่า x ปรากฏอยู่เพียงตัวเดียว เราจึงอาจไม่เห็นความจำเป็นของการที่ต้องบอกว่าอะไรเป็นตัวแปรค่าของฟังก์ชันที่เราทำการอินทิเกรต แต่ในอินทิกรัลต่อไปนี้ $\int_a^b (1+xy^2)dx$ และ $\int_0^c (1+t^x)dt$ เห็นได้ว่าสัญลักษณ์ dx กับ dt เป็นสิ่งจำเป็น

เราเรียกตัวแปรค่าของฟังก์ชันที่เราทำการอินทิเกรตว่า **ตัวแปรของการอินทิเกรต** เราดูได้ว่าอะไรเป็นตัวแปรของการอินทิเกรตได้โดยดูว่าตัวแปรใดตามหลังตัว d เช่นใน อินทิกรัล $\int_a^b (1+xy^2)dy$ ตัวแปรของการอินทิเกรตคือ y

เนื่องจากในการบอกสูตรของฟังก์ชันหนึ่งๆนั้นเราอาจใช้ตัวแปรได้ต่างๆ นานา เช่น

$$\{(x,x^2) \mid 0 \le x \le 2\} \text{ กับ } \{(t,t^2) \mid 0 \le t \le 2\}$$

หมายถึงฟังก์ชันเดียวกัน (เพราะเป็นเซตเดียวกัน) ดังนั้น $\int_0^2 x^2 dx$ กับ $\int_0^2 t^2 dt$ จึงหมายถึงอินทิกรัลเดียวกัน

บทนิยาม 3.3

ถ้าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ เรานิยามอินทิกรัลของ f จาก b ถึง a ว่าคือ

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

หมายเหตุ

บทนิยามนี้จะช่วยให้เราสามารถนำอินทิกรัลไปประยุกต์ใช้กับปริมาณที่ขึ้นอยู่กับทิศทางได้ด้วย เราอาจให้ความหมายของการอินทิเกรตในทิศทางกลับกันได้โดยการพิจารณาว่า ในนิยามของอินทิกรัลจาก b ถึง a นั้น การแบ่งช่วงเป็นดังนี้

$$b = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = a$$

ให้สังเกตว่า ในที่นี้ $x_0 = b$ และ $x_n = a$ ค่า x ต่างๆ เรียงจากมากไปน้อย ดังนั้น ผลต่าง $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}$ ล้วนมีค่าเป็นลบ เป็นผลให้อินทิกรัลจาก b ถึง a มีค่าเป็นลบของอินทิกรัลจาก a ไปยัง b

ทฤษฎีบท 3.1

1) ถ้าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้ทั้งบนช่วง $[a,b]$ และ $[b,c]$ f ย่อมอินทิเกรตได้บน $[a,c]$ และได้ด้วยว่า $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

2) ถ้าฟังก์ชัน f อินทิเกรตได้ทั้งบนช่วง $[a,c]$ และ b อยู่ระหว่าง a กับ c แล้ว f ย่อมอินทิเกรตได้ทั้งบน $[a,b]$ และ $[b,c]$ และ สูตรข้างบนก็เป็นจริงด้วยเช่นกัน

หมายเหตุ

ทฤษฎีบทที่ 3.1 กล่าวถึงเฉพาะกรณีของการอินทิเกรตในทิศทางที่เป็นบวก (คือจากซ้ายไปขวา) แต่เมื่อเราใช้บทนิยาม 3.3 มาประกอบด้วย เราจะได้ว่าสูตรในทฤษฎีบทนี้ก็คงเป็นจริงสำหรับ a,b,c ใดๆ และเพื่อให้สูตรนี้ใช้การได้ดี เราจะกำหนดเป็นนิยามเพิ่มเติมของการอินทิเกรตจาก a ถึง a ว่า $\int_a^a f(x)dx = 0$

ทฤษฎีบท 3.2

ถ้า $f,\ g$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ย่อมได้ว่า cf กับ $f+g$ ก็เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และได้ว่า

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

ทฤษฎีบท 3.3

1) $f(x) = c$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ และได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

2) สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ $f(x) = x^k$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ และได้ว่า $\int_a^b f(x)dx = \frac{(b^{k+1} - a^{k+1})}{k+1}$

หมายเหตุ

เรานิยมเขียนสูตรในทฤษฎีบทที่ 3.3 ในรูป

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

กับ $\int_a^b x^k\,dx = \dfrac{(b^{k+1}-a^{k+1})}{k+1}$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.6

จงหาค่าของ $\int_1^2 (3x-5x^3)dx$

วิธีทำ

$$\int_1^2 (3x-5x^3)dx = 3\int_1^2 xdx - 5\int_1^2 x^3dx$$
$$= \frac{3(2^2-1)}{2} - \frac{5(2^4-1)}{4} = \frac{9}{2} - \frac{75}{4} = -\frac{57}{4}$$ □

ตัวอย่าง 3.7

จงหาค่าของ $\int_0^2 \left|x^2-3x+2\right| dx$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\left|x^2-3x+2\right| = \begin{cases} x^2-3x+2, & x<1 \\ -(x^2-3x+2), & 1\le x<2 \\ x^2-3x+2, & x\ge 2 \end{cases}$$

เราได้ว่า

$$\int_0^2 \left|x^2-3x+2\right| dx = \int_0^1 \left|x^2-3x+2\right| dx + \int_1^2 \left|x^2-3x+2\right| dx$$
$$= \int_0^1 (x^2-3x+2)dx + \int_1^2 -(x^2-3x+2)dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right) - \left(\left(\frac{2^3}{3}-\frac{3\cdot 2^2}{2}+2\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right) = 1$$ □

แบบฝึกหัด 3.2

จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int_{-1}^{1} (3x - x^2)\,dx$
2. $\int_{0}^{2} (2x+1)^2\,dx$
3. $\int_{0}^{1} (y-1)(3y+2)\,dy$
4. $\int_{1}^{2} \sqrt{x}\,dx$
5. $\int_{1}^{4} \sqrt{w}(w-1)dw$
6. $\int_{-1}^{2} |\, x - 3x^2|\,dx$
7. $\int_{-2}^{3} |\, x^2 - x + 2\,|dx$
8. $\int_{-2}^{2} y\,dt$ เมื่อ y เป็นค่าคงตัว
9. $\int_{1}^{2} \frac{2}{s^3}\,ds$
10. $\int_{0}^{2} |\, x-1\,| + |\, 2x-1\,|\,dx$

3.2 การประมาณค่าของอินทิกรัล

สูตรที่กล่าวมาแล้วในทฤษฎีบทต่างๆ นั้นพอเพียงที่จะช่วยให้เราคำนวณหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามใดๆ สำหรับฟังก์ชันอื่นๆนั้น นิสิตจะได้เรียนรู้สูตรสำหรับคำนวณค่าอินทิกรัลที่แม่นตรงของมันในโอกาสต่อๆ ไป แต่ในที่นี้เราจะใช้วิธีคำนวณค่าประมาณของอินทิกรัลของมันโดยการประมาณฟังก์ชันเหล่านั้นด้วยฟังก์ชันพหุนาม

การประมาณฟังก์ชัน f ใดๆฟังก์ชันหนึ่งด้วยฟังก์ชันพหุนามเพื่อนำมาประมาณอินทิกรัลบนช่วง $[a,b]$ นั้น เราทำได้ดังนี้

1) เลือกว่าจะใช้ฟังก์ชันพหุนามดีกรีเท่าใด เช่นใช้พหุนามดีกรีสอง ซึ่งอยู่ในรูป

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$$

2) แบ่งช่วง $[a,b]$ ด้วยจุดแบ่ง $x_0, x_1, \ldots, x_n$

3) คำนวณค่าของฟังก์ชัน f ที่จุดเหล่านี้ สมมติว่า

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \ \ldots, \ \ y_n = f(x_n)$$

จุด $(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,y_3), \ldots$ เป็นจุดที่อยู่บนกราฟของฟังก์ชันที่เราจะอินทิเกรต

โดยการใช้สามจุดแรก $(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_2)$ เราจะสามารถหาฟังก์ชันในรูป

$p_1(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ที่กราฟของมันผ่านจุดทั้งสามได้ฟังก์ชันหนึ่ง กราฟของฟังก์ชัน p_1 นี้จะอยู่ใกล้เคียงกับกราฟของฟังก์ชัน f ที่เราต้องการอินทิเกรต เราจึงอาจประมาณฟังก์ชัน f บนช่วงย่อย $[x_0,x_2]$ ด้วย p_1

แล้วทำในทำนองเดียวกันกับอีกสามจุด$(x_2,y_2),\ (x_3,y_3),\ (x_4,y_4)$ ซึ่งจะได้พหุนาม p_2 ที่ประมาณ f ในช่วง $[x_2,x_4]$ และทำต่อไปในทำนองเดียวกัน เราก็จะได้ฟังก์ชันพหุนามต่างๆ ที่ประมาณ f ในช่วง $[x_0,x_2], [x_2,x_4], [x_4,x_6], \ldots$

ให้สังเกตว่าการประมาณด้วยพหุนามดีกรีสองนี้จะทำได้เต็มช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคู่เท่านั้น

แต่ถ้าเราประมาณ f โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่ง $p(x) = c_0 + c_1x$ เราจะสามารถหาพหุนามเช่นนี้ได้สำหรับแต่ละช่วงย่อย $[x_0,x_1], [x_1,x_2], [x_2,x_3]$

หากเราจะประมาณ f โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามดีกรีสาม $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ เราจะต้องใช้จุดถัดๆ กันคราวละ 4 จุด ในกรณีนี้ n ต้องมีค่าที่ 3 หารได้ลงตัว

ที่กล่าวมานั้นเป็นหลักการทั่วๆ ไป การประมาณที่นิยมใช้กันได้แก่การประมาณโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่งหรือดีกรีสอง และใช้การแบ่งช่วงที่แบ่งออกเป็น n ช่วงเท่าๆ กัน

สำหรับกรณีที่ใช้พหุนามดีกรีหนึ่ง n อาจมีค่าใดก็ได้ กรณีนี้สูตรที่ได้คือ **หลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู** สำหรับกรณีที่ใช้พหุนามดีกรีสอง n ต้องมีค่าเป็นจำนวนคู่ กรณีนี้สูตรที่ได้คือ **หลักเกณฑ์ของซิมป์สัน**

3.2.1 การพิจารณาหาสูตรของเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

ลำดับแรก เรามาพิจารณากันเสียก่อนว่าหากเราคำนวณอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่ง $p(x) = c_0 + c_1x$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) กับ (x_1, y_1) บนช่วง $[x_0, x_1]$ ว่าจะได้ค่าเท่าใด เราจะพบว่า

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} p(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} (c_0 + c_1x)dx = \int_{x_0}^{x_1} c_0dx + \int_{x_0}^{x_1} c_1x\,dx \\ &= c_0(x_1 - x_0) + c_1\left(\frac{{x_1}^2 - {x_0}^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)(x_1 - x_0)\end{aligned}$$

สังเกตว่าค่าอินทิกรัลที่ได้นี้เขียนได้ในพจน์ของ y_0, y_1 โดยเราไม่ต้องหาค่าของ c_0 กับ c_1 ให้ได้เสียก่อนว่าเป็นเท่าใด

การเป็นเช่นนี้ ทำให้เราทราบได้ว่า อินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่งที่ผ่านจุด (x_1, y_1) กับ (x_2, y_2) บนช่วง $[x_1, x_2]$ นั้นจะมีค่าเท่าใด และในทำนองเดียวกันสำหรับช่วงถัดๆ ไป นั่นคือ สำหรับ $i = 2, 3, \ldots, n$ จะได้

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)(x_i - x_{i-1})$$

เมื่อทราบค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามที่เราใช้ประมาณฟังก์ชัน f บนช่วงต่างๆ แล้ว ลำดับต่อไปเราก็นำค่าอินทิกรัลเหล่านี้มารวมกัน เป็นค่าประมาณของอินทิกรัลของ f ในกรณีของการประมาณด้วยฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่ง เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h \\ &= (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)\frac{h}{2}\end{aligned}$$

โดยที่ $h = \dfrac{b-a}{n}$

ตัวอย่าง 3.8

จงแสดงการใช้เกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูประมาณค่า $\int_0^{1.2} \frac{x}{1+x^4}\,dx$ โดยแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออกเป็น 6 ช่วงย่อย

วิธีทำ ในที่นี้เราจะอินทิเกรต $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ บนช่วง $[0,1.2]$ เราจึงแบ่งช่วงนี้ออกเป็น 6 ช่วงย่อยด้วยจุดแบ่ง

$$0.0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0,\ 1.2$$

ในการนี้ เราต้องคำนวณหาค่า f ที่จุดเหล่านี้ซึ่งจะได้ดังนี้

x	$f(x)$	
	$1\times$	$2\times$
0.0	0.000000000	
0.2		0.199680511
0.4		0.390015600
0.6		0.531161473
0.8		0.567536889
1.0		0.500000000
1.2	0.390421655	
รวม	0.390421655	2.188394473

จึงได้คำตอบเท่ากับ $(0.390421655 + 2\times 2.189394473)\times\frac{0.2}{2} = 0.47672106$ □

3.2.2 การพิจารณาหาสูตรของเกณฑ์ของซิมสัน

ในกรณีนี้ เราจะพิจารณากันเสียก่อนว่าหากเราคำนวณอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีสอง $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ ที่ผ่านจุด$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1)$ กับ (x_2, y_2)บนช่วง $[x_0, x_2]$ ว่าจะได้ค่าเท่าใด เราจะพบว่า

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} p(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} \Big(c_0 + c_1x + c_2x^2\Big)dx \\
&= c_0(x_2 - x_0) + \frac{c_1}{2}(x_2^2 - x_0^2) + \frac{c_2}{3}(x_2^3 - x_0^3) \\
&= c_0((x_1 + h) - (x_1 - h)) + \frac{c_1}{2}((x_1 + h)^2 - (x_1 - h)^2) \\
&\quad + \frac{c_2}{3}((x_1 + h)^3 - (x_1 - h)^3) \\
&= 2hc_0 + \frac{c_1}{2}(4hx_1) + \frac{c_2}{3}(2h^3 + 6hx_1^2) \\
&= \frac{h}{3}\Big[6c_0 + 6c_1x_1 + 6c_2x_1^2 + 2h^2c_2\Big] \\
&= \frac{h}{3}\begin{bmatrix}\Big(c_0 + c_1(x_1 - h) + c_2(x_1 - h)^2\Big) + 4\Big(c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2\Big) \\ +\Big(c_0 + c_1(x_1 + h) + c_2(x_1 + h)^2\Big)\end{bmatrix} \\
&= \frac{h}{3}\Big[\Big(c_0 + c_1x_0 + c_2x_0^2\Big) + 4\Big(c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2\Big) + \Big(c_0 + c_1x_2 + c_2x_2^2\Big)\Big] \\
&= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)
\end{aligned}$$

สังเกตว่าค่าอินทิกรัลที่ได้นี้เขียนได้ในพจน์ของ $y_0,\ y_1, y_2$ โดยเราไม่ต้องหาค่าของ c_0, c_1 กับ c_2 ให้ได้เสียก่อนว่าเป็นเท่าใด การเป็นเช่นนี้ ทำให้เราทราบได้ว่า อินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามดีกรีสองที่ผ่านจุด $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ กับ (x_4, y_4) บนช่วง $[x_2, x_4]$ นั้นจะมีค่าเท่าใด และใน ทำนองเดียวกันสำหรับสองช่วงถัดๆ ไป เมื่อทราบค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันพหุนามที่เราใช้ ประมาณฟังก์ชัน f บนสองช่วงถัดๆกันคู่ต่างๆแล้ว ลำดับต่อไปเราก็นำค่าอินทิกรัลเหล่านี้มารวมกัน เป็นค่าประมาณของอินทิกรัลของ f

ในกรณีของการประมาณด้วยฟังก์ชันพหุนามดีกรีสอง เมื่อ $h = \dfrac{b-a}{n}$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\
&= (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)\frac{h}{3}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.9

จงแสดงการใช้เกณฑ์ของซิมป์สันประมาณค่า $\int_0^{1.2} \frac{x}{1+x^4}\,dx$ โดยแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออกเป็น 6 ช่วงย่อย

วิธีทำ ในที่นี้เราจะอินทิเกรตฟังก์ชันเดียวกันกับในตัวอย่างก่อน $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ และอินทิเกรตบนช่วงเดียวกัน โดยแบ่งออกเป็น 6 ช่วงย่อย เช่นกัน จุดแบ่งจึงใช้ชุดเดิมและใช้ค่าของ f ที่จุดเหล่านี้ ซึ่งเราคำนวณไว้แล้ว และได้ดังนี้

x	$f(x)$		
	$1\times$	$4\times$	$2\times$
0.0	0.000000000		
0.2		0.199680511	
0.4			0.390015600
0.6		0.531161473	
0.8			0.567536889
1.0		0.500000000	
1.2	0.390421655		
รวม	0.390421655	1.230841984	0.957552489

จึงได้คำตอบเท่ากับ $(0.390421655 + 4\times 1.230841984 + 2\times 0.957552489)\times\frac{0.2}{3}$

$= (7.228894569)\times\frac{0.2}{3} = 0.481926304$ □

วิธีการคำนวณอินทิกรัลโดยการใช้เกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูหรือเกณฑ์ของซิมป์สันนั้นจะทำได้ง่ายหาก เราโปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำงานแทนเรา ปัจจุบันนี้ เครื่องคิดเลขก็มีโปรแกรมคำนวณเช่นนี้ไว้ให้ใช้

การประมาณอินทิกรัลด้วยวิธีเชิงตัวเลขตามที่กล่าวมานี้ นอกจากจะสามารถใช้ในการประมาณอินทิกรัลของฟังก์ชันที่เราทราบสูตรบอกค่าของมันแล้ว เรายังสามารถใช้คำนวณอินทิกรัลของฟังก์ชันที่เราได้ค่าของมันมาในรูปตารางอีกด้วย

ตัวอย่าง 3.10

กำหนดให้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่ากำหนดไว้ในตารางต่อไปนี้ จงประมาณค่าอินทิกรัลของ f บนช่วง $[0,3]$ โดยใช้เกณฑ์ของซิมป์สัน

x	$f(x)$
0.0	2.015
0.5	2.733
1.0	3.417
1.5	5.041
2.0	7.318
2.5	4.306
3.0	2.115

วิธีทำ แบ่งค่าของ f ออกเป็นสามพวกตามตัวคูณ 1, 4, 2

x	$f(x)$		
	$1\times$	$4\times$	$2\times$
0.0	2.015		
0.5		2.733	
1.0			3.417
1.5		5.041	
2.0			7.318
2.5		4.306	
3.0	2.115		
รวม	4.130	12.080	10.735
ผลคูณ (คูณด้วยตัวคูณ)	4.130	48.320	21.470

ดังนั้น ค่าอินทิกรัลของ f บนช่วง $[0,3] \approx (4.130+48.320+21.470)\times\dfrac{0.5}{3} = 12.32$ $\square$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงแสดงการใช้เกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูประมาณค่า $\int_0^{2.4} \frac{2x}{1+x^3}\,dx$ โดยแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออก เป็น 8 ช่วงย่อย
2. จงแสดงการใช้เกณฑ์ของซิมป์สันประมาณค่า $\int_0^{2.4} \frac{2x}{1+x^3}\,dx$ โดยแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออก เป็น 8 ช่วงย่อย
3. กำหนดให้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่ากำหนดไว้ในตารางต่อไปนี้

   จงประมาณค่าอินทิกรัลของ f บนช่วง $[0,\ 2.4]$ โดย

x	$f(x)$
0.0	1.153
0.4	2.037
0.8	2.510
1.2	4.032
1.6	6.781
2.0	5.836
2.4	2.911