บทที่ 4
อนุพันธ์และปฏิยานุพันธ์

4.1 ความหมายของอนุพันธ์

ถ้าเราโยนวัตถุขึ้นไป วัตถุจะขึ้นไปถึงจุดหนึ่ง แล้วตกลงมา ทั้งนี้ก็เพราะความเร็วของวัตถุลดลงเรื่อยๆ จนเป็นศูนย์ แล้วก็ตกลงมา ขาลง ความเร็ว (ในทิศตรงข้าม) ก็เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ การเคลื่อนที่ที่กล่าวมานั้นมีความเร็วไม่คงที่ มีการเปลี่ยนความเร็วอยู่ทุกขณะ **ความเร็วชั่วขณะ** ก็คือความเร็ว ณ เวลาใดๆ นั่นเอง เราจะคำนวณหาความเร็วชั่วขณะได้อย่างไร?

สูตรที่ว่า

$$\text{ความเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}}$$

เป็นสูตรคำนวณ**ความเร็วเฉลี่ย**ของการเคลื่อนที่ในช่วงเวลาหนึ่ง ไม่ใช่ความเร็วในขณะใดขณะหนึ่ง

ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ความเร็วเฉลี่ยจะมีค่าเท่ากันในทุกๆ ช่วง ในกรณีนี้ความเร็วเฉลี่ยกับความเร็วชั่วขณะจะมีค่าเท่ากัน สูตรข้างบนจึงให้ค่าความเร็วชั่วขณะด้วย ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วไม่สม่ำเสมอ สูตรดังกล่าวให้เพียงความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาที่นำมาใช้ในการคำนวณ

ตัวอย่างการพิจารณาต่อไปนี้จะช่วยให้เราเห็นได้ว่าเราควรจะคำนวณความเร็วชั่วขณะอย่างไร เราจะใช้สมการการเคลื่อนที่ที่กาลิเลโอเป็นผู้ค้นพบไว้เป็นกรณีตัวอย่างในการพิจารณา กาลิเลโอค้นพบว่า เมื่อปล่อยให้วัตถุตกลงมาจากที่สูง ระยะทาง s ที่วัตถุเคลื่อนที่ได้มีความสัมพันธ์กับเวลา t ที่ใช้ในการเคลื่อนที่ด้วยสมการ

$$s = 16t^2$$

โดยที่ s มีหน่วยเป็นฟุต และ t มีหน่วยเป็นวินาที

เราจะพิจารณาว่าความเร็วใน**ขณะ** $t = 2$ เป็นเท่าใด โดยเปรียบเทียบความเร็วดังกล่าวนี้กับความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาก่อนและหลัง $t = 2$

เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงความเร็วในขณะ $t = 2$ เราจะแทนความเร็วนี้ด้วย v

สำหรับ $t < 2$ จะได้ว่า ความเร็วเฉลี่ยในช่วง $[t, 2] \;=\; \dfrac{16(2)^2 - 16t^2}{2-t}$

สำหรับ $t > 2$ จะได้ว่า ความเร็วเฉลี่ยในช่วง $[2, t] \;=\; \dfrac{16t^2 - 16(2)^2}{t-2}$

สังเกตว่าสูตรความเร็วเฉลี่ยทั้งสองสมมูลกัน

เมื่อใช้สูตรนี้คำนวณความเร็วเฉลี่ยในช่วง [1,2] กับ [2,3] คือให้ $t=1$ กับ $t=3$ จะได้ความเร็วเฉลี่ยในช่วง [1,2] เป็น 48 และความเร็วเฉลี่ยในช่วง [2,3] เป็น 80

เห็นได้ว่าในช่วงก่อน $t=2$ นั้นความเร็วเฉลี่ยมีค่าน้อยกว่าความเร็วเฉลี่ยในช่วงหลัง $t=2$ แสดงว่าความเร็วขณะ $t=2$ กล่าวคือ v ย่อมมีค่าอยู่ระหว่างค่าทั้งสองนี้ คือได้ว่า

$$48 \le v \le 80$$

หากเราใช้ช่วงที่แคบลง เช่น [1.5,2] กับ [2,2.5] เราจะได้ขอบเขตของ v เป็น

$$56 \le v \le 72$$

ซึ่งก็แคบเข้าเช่นกัน

เห็นได้ว่า เราควรพิจารณาหาความเร็วเฉลี่ยในช่วง $[t,2]$ กับ $[2,t]$ โดยใช้ค่า t ที่เข้าใกล้ 2 โดยที่ในกรณีแรก ให้ t เข้าใกล้ 2 จากทางซ้าย และในกรณีหลัง ให้ t เข้าใกล้ 2 จากทางขวา

สำหรับกรณีแรก เราได้

$$v \ \ge \ \frac{16(2)^2 - 16t^2}{2-t}$$

ดังนั้น

$$v \ \ge \ \lim_{t\to 2^-} \frac{16(2)^2 - 16t^2}{2-t} = 64$$

และ สำหรับกรณีหลัง เราได้

$$v \ \le \ \frac{16t^2 - 16(2)^2}{t-2}$$

ดังนั้น

$$v \ \le \ \lim_{t\to 2^+} \frac{16t^2 - 16(2)^2}{t-2} = 64$$

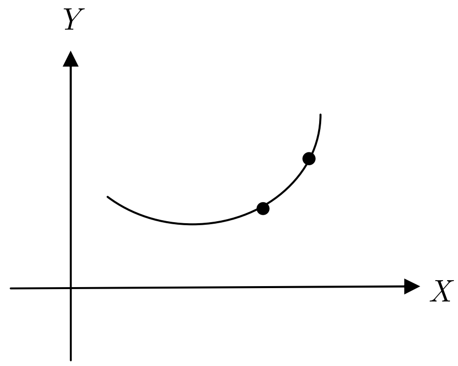
จากการพิจารณาที่กล่าวมานี้ จะเห็นได้ว่า $v=64$ เป็นค่าแม่นตรง และยังเห็นได้ด้วยว่า

$$v \ = \ \lim_{t\to 2} \frac{16t^2 - 16(2)^2}{t-2}$$

สำหรับการเคลื่อนที่โดยทั่วไป ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงได้ระยะทาง $s(t)$ ในขณะเวลา t แล้ว ความเร็วในขณะเวลา t_0 ก็คือ

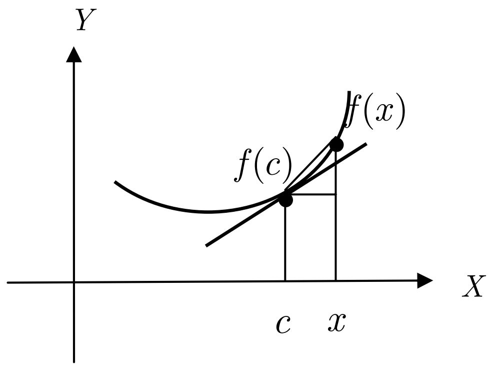
$$\lim_{t\to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

ความชันของเส้นโค้ง (slope of curve)



ความชันของเส้นโค้งคืออะไร?

พิจารณาเส้นโค้งทางขวามือ ที่จุดสองจุดที่ทำเครื่องหมายไว้ จะเห็นว่าที่จุดทางขวา เส้นโค้งชันกว่าที่จุดทางซ้าย เราจะวัดความชันของเส้นโค้งอย่างไร? คำตอบก็คือเราวัดความชันของเส้นโค้งที่จุดใด ๆ ด้วยความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นๆ



จากรูปขวามือ เห็นได้ว่า ความชันเส้นสัมผัสที่ $x = c$ ก็คือ

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

ในการคำนวณความเร็วชั่วขณะ เราพบกับ

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

และในการคำนวณความชันของเส้นโค้ง เราพบกับ

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

ในทั้งสองกรณีนี้ เราคำนวณสิ่งเดียวกัน กล่าวคือ เราคำนวณ ลิมิตของอัตราส่วน

$$\frac{\text{ค่าที่เปลี่ยนไปของฟังก์ชัน}}{\text{ค่าที่เปลี่ยนไปของตัวแปร}}$$

ลิมิตของอัตราส่วนในลักษณะดังกล่าวนี้ ก็คือ **อัตราการแปรค่าชั่วขณะของฟังก์ชัน**

ในการจำลองสถานการณ์ต่างๆ ในธรรมชาตินั้น เรามักจะต้องตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับอัตราการแปรค่าชั่วขณะของปริมาณที่เรานำมาศึกษา เช่น อัตราการเติบโต อัตราการซึม อัตราการทำปฏิกริยา เป็นต้น

ในวิชาคณิตศาสตร์เราเรียกอัตราการแปรค่าชั่วขณะว่า **อนุพันธ์** (derivative) และเรียกการหาอนุพันธ์ ว่า **การดิฟเฟอเรนชิเอต** (differentiation) เนื่องจากอนุพันธ์เป็นลิมิต และเราได้เห็นมาแล้วว่า ลิมิตมีค่าเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนอนันต์ (infinity) ก็ได้ ดังนั้นในบทนิยามของอนุพันธ์ที่จะกล่าวถึงในลำดับ ต่อไป อนุพันธ์อาจมีค่าเป็นจำนวนอนันต์ (infinity) ก็ได้ แต่เราจะจำแนกฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เป็นจำนวนจริงออกมา และเรียกว่าเป็นฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนชิเอตได้

บทนิยาม 4.1

ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ c เป็นจุดหนึ่งในโดเมนของ f

1) ถ้า $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ มีค่า เราเรียกค่าลิมิตว่า **อนุพันธ์ของ f ที่** c และเขียนแทนค่านี้ด้วยสัญลักษณ์ $f'(c)$

ถ้า $f'(c)$ มีค่าเป็นจำนวนจริง เรากล่าวว่า f **ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่** c

2) ถ้า $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ มีค่า เราเรียกค่าลิมิตว่า **อนุพันธ์จากทางขวาของ f ที่** c และเขียนแทนค่านี้ด้วยสัญลักษณ์ ${f'}_+(c)$

3) ถ้า $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ มีค่า เราเรียกค่าลิมิตว่า **อนุพันธ์จากทางซ้ายของ f ที่** c และเขียนแทนค่านี้ด้วยสัญลักษณ์ ${f'}_-(c)$

ตัวอย่าง 4.1

จงใช้บทนิยามพิจารณาว่า $f(x) = x^3$ ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ $c = 2$ หรือไม่

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12
\end{aligned}
$$

ดังนั้น f ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ 2 และมีค่า $f'(2) = 12$ $\square$

ตัวอย่าง 4.2

จงใช้บทนิยามพิจารณาว่า $f(x) = |\,x - 2\,|$ ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ $c = 2, 3$ หรือไม่

วิธีทำ

$$
{f'}_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2| - |2-2|}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)}{x-2} = 1
$$

$$
{f'}_-(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2| - |2-2|}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1
$$

จะเห็นว่า ${f'}_+(2) \neq {f'}_-(2)$ ดังนั้น $f(x) = |\,x - 2\,|$ ไม่ดิฟเฟอเรนชิเอตที่ $c = 2$

$$
{f'}_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{|x-2| - |3-2|}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-2) - 1}{x-3} = 1
$$

$$
{f'}_-(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{|x-2| - |3-2|}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x-2) - 1}{x-3} = 1
$$

จะเห็นว่า ${f'}_+(3) = {f'}_-(3)$ ดังนั้น f ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ 3 และมีค่า $f'(3) = 1$ $\square$

ข้อสังเกต

เมื่อแทน $h = x - c$ ใน $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ จะได้

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

หรือสามารถเขียนได้ในรูป $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ดังนั้น เราสามารถหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด x หรือ $f'(x)$ โดยใช้บทนิยามในรูป

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ ได้}$$

ตัวอย่าง 4.3

จงใช้บทนิยามหาสูตรอนุพันธ์ของ $f(x) = \sqrt[3]{x}$

วิธีทำ <u>วิธีที่ 1</u>

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{c}}{x - c} \\
&= \lim_{x \to c} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2})}{(x - c)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2})} \\
&= \lim_{x \to c} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{c})^3}{(x - c)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2})} \\
&= \lim_{x \to c} \frac{x - c}{(x - c)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2})} \\
&= \lim_{x \to c} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{c^2})} \\
&= \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

<u>วิธีที่ 2</u>

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h})^3-(\sqrt[3]{x})^3}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\square$

ทฤษฎีบท 4.1

ถ้า f ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ใด f ย่อมต้องมีความต่อเนื่องที่นั่น

ทฤษฎีบท 4.2

ถ้า f มีค่าคงตัวในช่วงเปิด (a,b) แล้ว f ย่อมดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ทุกๆ จุดใน (a,b) และ $f'(c)=0$ ที่ทุกๆ c ใน (a,b)

ทฤษฎีบท 4.3

ถ้า f ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และ k เป็นค่าคงที่ แล้ว ฟังก์ชัน kf ซึ่งมีค่า $(kf)(x)=kf(x)$ ย่อมดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และได้ว่า

$$(kf)'(c)=k\,f'(c)$$

ทฤษฎีบท 4.4

ถ้า f,g ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c แล้วฟังก์ชัน $f+g$ ซึ่งมีค่า $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ ย่อมดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และได้ว่า

$$(f+g)'(c)=\ f'(c)+g'(c)$$

ทฤษฎีบท 4.5

ถ้า f, g ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c แล้วฟังก์ชัน fg ซึ่งมีค่า $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ย่อมดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และได้ว่า

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

ทฤษฎีบท 4.6

ถ้า f, g ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และ $g(c) \neq 0$ แล้วฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ ซึ่งมีค่า $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ย่อมดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และได้ว่า

$$(\frac{f}{g})'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$

ทฤษฎีบท 4.7

ถ้า g ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และ f ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ $g(c)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ ย่อมดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และได้ว่า

$$(f \circ g)'(c) = f'(g(c))\, g'(c)$$

ทฤษฎีบท 4.8

ถ้า $f(x) = x^k$ โดยที่ k เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว f ย่อมดิฟเฟอเรนชิเอตได้ และได้ว่า $f'(c) = kc^{k-1}$ ที่ทุกๆ c ซึ่งสูตรมีความหมาย

สัญลักษณ์สำหรับอนุพันธ์

สัญลักษณ์ที่เราใช้เขียนแสดงอนุพันธ์มาแล้วนั้นเป็นสัญลักษณ์ที่ไม่ค่อยจะให้ความสะดวกในการทำการดิฟเฟอเรนชิเอต เพราะไม่สามารถระบุสูตรของฟังก์ชันลงไปในสูตรในทฤษฎีบทต่างๆ สัญลักษณ์ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้กันมานานมากแล้ว คือตั้งแต่ก่อนที่เราใช้นิยามของฟังก์ชันว่าเป็นเซตของคู่ลำดับ สมัยนั้นเขานิยามฟังก์ชันว่าอย่างไร?

เขากล่าวว่า

> "เมื่อตัวแปรค่า y กับ x มีความสัมพันธ์กันในลักษณะที่ สำหรับแต่ละค่าของ x เราหาค่า y ได้ค่าหนึ่ง เรากล่าวว่า y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งจะเขียนแสดงได้ด้วย $y = f(x)$ เราเรียก x ว่าตัวแปรอิสระ หรือ independent variable และเรียก y ว่าตัวแปรตามหรือ dependent variable"

ความคิดเรื่องฟังก์ชันในคำกล่าวข้างต้น ก็เป็นความคิดเดียวกันกับปัจจุบัน

ในการอธิบายเรื่องอนุพันธ์ เขาพิจารณาว่า เมื่อตัวแปร x แปรค่าไป y ก็แปรไปด้วย เขากำหนดสัญลักษณ์ Δx กับ Δy ขึ้นมาแทนส่วนที่เปลี่ยนไปของ x กับ y ตามลำดับ คือ

เดิมเรามี $y = f(x)$ และเมื่อ x เปลี่ยนไปเป็น $x + \Delta x$ y ก็เปลี่ยนไปเป็น $y + \Delta y$

ดังนั้น $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

นำสองสมการมาลบกัน จะได้ว่า $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

จึงได้อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงเป็น $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

เมื่อพิจารณาดูอัตราส่วน $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ เห็นได้ว่าลิมิตเมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์ของพจน์ทางขวามือก็คือ **อนุพันธ์ของ f ที่ x**

กำหนดสัญลักษณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ ขึ้นมาแทน $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

โดยให้ถือว่าสัญลักษณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ เป็นสัญลักษณ์เดียว ไม่ใช่เศษส่วนของ dy กับ dx

เราจึงมี $\dfrac{dy}{dx}$ ไว้ใช้เป็นสัญลักษณ์สำหรับเขียนแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$

นอกจาก $\dfrac{dy}{dx}$ แล้ว เรายังใช้ $\dfrac{df(x)}{dx}$ เป็นสัญลักษณ์อีกอย่างหนึ่งสำหรับเขียนแทนอนุพันธ์ สัญลักษณ์นี้เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้งานได้สะดวก เพราะเราอาจเขียนสูตรบอกค่าฟังก์ชันแทนที่ $f(x)$ เช่นในการดิฟเฟอเรนชิเอต $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ เราเขียนได้ดังนี้

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 7)$$

แล้วใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้นกับทางขวามือทีละขั้นจนได้คำตอบ

ตัวอย่าง 4.4

จงหาอนุพันธ์ $f(x) = 7x^2 - 4x\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = 7x^2 - 4x\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = 7x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{5}}$ ดังนั้น

$$f'(x) = 7(2)x^{2-1} - 4\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-1} + \left(-\frac{3}{5}\right)x^{-\frac{3}{5}-1} = 14x - 6\sqrt{x} - \frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 4.5

จงหาอนุพันธ์ $h(x)=\sqrt[3]{1+x-x^3}$

วิธีทำ ให้ $g(x)=1+x-x^3$ และ $f(y)=\sqrt[3]{y}$ ดังนั้น $h(x)=f(g(x))=f\circ g(x)$

เนื่องจาก $f'(y)=\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$ และ $g'(x)=1-3x^2$ โดยทฤษฎีบท 4.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \\ &= \frac{1}{3}(g(x))^{-\frac{2}{3}}(1-3x^2) = \frac{1}{3}(1+x-x^3)^{-\frac{2}{3}}(1-3x^2) \\ &= \frac{(1-3x^2)}{3\sqrt[3]{\left(1+x-x^3\right)^2}} \end{aligned}$$

$\square$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาสูตรอนุพันธ์ต่อไปนี้โดยใช้บทนิยาม

   1.1. $f(x)=2x^4$

   1.2. $f(x)=2x+1$

   1.3. $f(x)=\sqrt{x}$

   1.4. $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$

   1.5. $f(x)=x^2+3$

   1.6. $f(x)=x^3+3x-2$

2. จงเขียนสูตรในทฤษฎีบท 4.2 ถึง 4.8 โดยใช้สัญลักษณ์ $\dfrac{df(x)}{dx}$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1. $f(x)=4x^3+4-\dfrac{5}{x^2}$

   3.2. $f(x)=x^3-2x\sqrt{x}+7$

   3.3. $f(x)=5\sqrt{1+3x^2}$

   3.4. $f(x)=\dfrac{3-2x}{5-x^2}$

   3.5. $h(x)=\dfrac{2x^3-4x\sqrt{x}+7}{3x^3}$

   3.6. $f(x)=(1+x^3)\sqrt{1+x^2}$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1. $f(x) = (x^2 - \frac{x}{4} - 2x)^4$

4.2. $f(x) = \frac{3}{4-5x}$

4.3. $y = (\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{1}{\sqrt{x}})$

4.4. $y = (\frac{3x}{\sqrt{x}} - 2)^{5/2}$

4.5. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(6-2x^2)^3}}$

4.6. $f(x) = (3-x)^4(x^2+5x)^{1/2}$

4.7. $f(t) = (t^3 - 2t + 1)(\frac{1}{t} - t^2)$

4.8. $f(s) = \frac{\sqrt[3]{2s^5 - 4s}}{(4s^{-1} + \frac{2}{3s^5})^2}$

4.9. $g(x) = (x^3 - 2)(5 - 2x^2)\sqrt{x+1}$

4.10. $h(y) = \frac{3y^{-2} - 4\sqrt{y}}{y}$

4.11. $g(x) = \sqrt{2x} + \frac{1-6x}{\sqrt[3]{x}}$

4.12. $x + y(x) - 2 = 0$

4.2 ดิฟเฟอเรนเชียล (differentials)

ในหัวข้อนี้ เราจะใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นประมาณค่าฟังก์ชัน f ที่จุดใกล้ๆ x ฟังก์ชันเชิงเส้นได้แก่ฟังก์ชัน L ใดๆ ที่มีคุณสมบัติว่า

$$L(u+v) = L(u) + L(v) \quad \text{ทุกๆ} \quad u, v \text{ และ}$$

$$L(kv) = kL(v) \text{ ทุกๆ } k, v$$

โดยอาศัยคุณสมบัติสองข้อนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น L ใดๆ **ต้องมีสูตรในรูป**

$$L(v) = cv \text{ โดยที่ } c \text{ เป็นค่าคงที่}$$

เราจะหาฟังก์ชันเชิงเส้น L ฟังก์ชันหนึ่ง ซึ่งทำให้เราสามารถใช้ $f(x) + L(h)$ เป็นค่าประมาณของ $f(x+h)$ คือ

$$f(x+h) \approx f(x) + L(h)$$

ความคลาดเคลื่อนของการประมาณนี้ก็คือ

$$E(h) = |\, f(x+h) - (f(x) + L(h))\,|$$

เราต้องการให้ขนาดของ $E(h)$ น้อยกว่า h มากๆ เช่น ถ้า h เข้าใกล้ศูนย์ เราก็อยากให้ $E(h)$ เข้าใกล้ศูนย์ยิ่งกว่า คือ อยากให้ $E(h)$ เข้าใกล้ศูนย์เร็วกว่า h

เรามาทำความเข้าใจเรื่องการเข้าใกล้ศูนย์เร็วกว่ากันสักเล็กน้อย เนื่องจาก $E(h) = |\, h\,| \dfrac{E(h)}{|\, h\,|}$ จะเห็นว่า ถ้าให้ h เข้าใกล้ศูนย์ $|\, h\,|$ ย่อมเข้าใกล้ศูนย์เร็วเท่าๆ กันกับ h ดังนั้น ถ้าแฟคเตอร์หลัง คือ $\dfrac{E(h)}{|\, h\,|}$ เข้าใกล้ศูนย์ด้วย จะได้ว่าผลคูณของ $|\, h\,|$ และ $\dfrac{E(h)}{|\, h\,|}$ ซึ่งก็คือ $E(h)$ ก็เข้าใกล้ศูนย์เร็วกว่า h ดังนั้น เราต้องหาฟังก์ชันเชิงเส้น L ซึ่ง

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{|\, h\,|} = 0$$

นั่นคือ

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\, f(x+h) - f(x) - L(h)\,|}{|\, h\,|} = 0$$

และเนื่องจาก ค่าลิมิตเป็น 0 ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0} \frac{|\, f(x+h) - f(x) - L(h)\,|}{|\, h\,|} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{hL(1)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} L(1) \ = f'(x) - L(1) \end{aligned}$$

นั่นคือ $L(1) = f'(x)$ ดังนั้น $L(h) = hL(1) = hf'(x)$

ฉะนั้น เงื่อนไขนี้ทำให้เราได้ว่า $\boxed{L(h) = f'(x)h}$

บทนิยาม 4.2

ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้า L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\, f(x+h) - f(x) - L(h)\,|}{|\, h\,|} = 0$$

เราเรียก L ว่าเป็น **ดิฟเฟอเรนเชียล (differential) ของ f ที่ x** เราจะเขียนแทน L ด้วยสัญลักษณ์ $df(x)$

ดังนั้น $L(h)$ ก็จะถูกแทนด้วย $df(x)(h)$ เราต้องระลึกไว้ว่า $df(x)$ เป็นฟังก์ชัน [คือ L] นั่นคือ $df(x)(h)$ เป็นค่าของฟังก์ชัน $df(x)$ ที่ h [คือ $L(h)$]

จากที่ได้ไว้ข้างต้นว่า $L(h) = f'(x)h$ เราก็ได้สูตรบอกค่า $df(x)$ ว่า

$$\boxed{df(x)(h) = f'(x)h}$$

$f'(x)$ จึงมีชื่ออีกอย่างหนึ่งว่า **สัมประสิทธิ์ดิฟเฟอเรนเชียล** (differential coefficient)

เมื่อเริ่มต้น เราต้องการหาฟังก์ชันเชิงเส้น L ซึ่ง

$$f(x+h) \approx f(x) + L(h)$$

และบัดนี้ เราก็ได้แล้วว่า $L(h)$ ก็คือ $df(x)(h)$

ดังนั้น เราก็มีสูตรสำหรับประมาณค่าฟังก์ชัน f ว่า

$$\boxed{f(x+h) \approx f(x) + df(x)(h)}$$

นั่นคือ

$$\boxed{f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,h}$$

ตัวอย่าง 4.6

จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลหาสูตรสำหรับประมาณค่าของ $\dfrac{1}{x+h}$ แล้วจงแสดงการใช้สูตรที่ได้มาในการประมาณค่าของ $\dfrac{1}{1005}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ เนื่องจาก $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,h$ ดังนั้น

$$\frac{1}{x+h} \approx \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)h$$

จาก $\dfrac{1}{1005} = \dfrac{1}{1000+5} = \dfrac{1}{x+h}$ เราจึงให้ $x = 1000,\ h = 5$

ดังนั้น $\dfrac{1}{1005} = \dfrac{1}{1000+5} \approx \dfrac{1}{1000} + \left(-\dfrac{1}{1000^2}\right)5 = 0.001 - 0.000005 = 0.000995$ $\square$

ตัวอย่าง 4.7

สมศรีใช้ไม้บรรทัดวัดความยาวด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้เท่ากับ 10 นิ้ว ด้วยความคลาดเคลื่อนไม่เกิน $\dfrac{1}{32}$ นิ้ว จงหาความคลาดเคลื่อนของการคำนวณพื้นที่ของสี่เหลี่ยมรูปนี้ และจงประมาณพื้นที่ที่แท้จริง

วิธีทำ ให้ $f(x)$ เป็นพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านเท่ากับ x ดังนั้น จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์

$$f(x) = x^2$$

จาก $df = 2xdx$ เรากำหนดให้ $x = 10$ จึงได้ $df = 20dx$ แต่ $-\frac{1}{32} \le dx \le \frac{1}{32}$ ดังนั้น

$$-\frac{5}{8} \le df \le \frac{5}{8}$$

นั่นคือ ได้ความคลาดเคลื่อนของการคำนวณพื้นที่ไม่เกิน $\pm\frac{5}{8}$ ตารางนิ้ว

เมื่อวัดโดยไม้บรรทัด พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนี้คำนวณได้เท่ากับ 100 ตารางนิ้ว

ดังนั้น พื้นที่ที่แท้จริงของสี่เหลี่ยมรูปนี้จะไม่เกิน

$$(10 + \frac{1}{32})^2 \approx 100 + \frac{5}{8} = 100.625 \qquad \text{ตารางนิ้ว}$$

และไม่น้อยกว่า

$$(10 - \frac{1}{32})^2 \approx 100 - \frac{5}{8} = 99.375 \qquad \text{ตารางนิ้ว}$$

□

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลหาสูตรสำหรับประมาณค่าของ $\sqrt[5]{x+h}$ แล้วจงแสดงการใช้สูตรที่ได้มาในการประมาณค่าของ $\sqrt[5]{100015}$ กับ $\sqrt[5]{30}$

2. จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลประมาณค่าของ

   2.1. $(3.02)^4$

   2.2. $\sqrt[3]{7.9}$

   2.3. $(1.97)^3$

   2.4. $\sqrt{36.3} + (1.006)^2$

3. สายวัดเส้นหนึ่งมีความคลาดเคลื่อน $\pm 0.04\%$ ถ้านำไปวัดรัศมีของทรงกลม จะเกิดความคลาดเคลื่อนของการคำนวณปริมาตรของทรงกลมนั้นกี่เปอร์เซ็นต์ $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$

สัญลักษณ์ $df(x)$ สำหรับดิฟเฟอเรนเชียลของ f ที่ x จะช่วยให้การคำนวณต่างๆ ทำได้ง่ายขึ้น เราจะพิจารณาการคำนวณบางอย่างเกี่ยวกับดิฟเฟอเรนเชียลด้วยสัญลักษณ์นี้สักเล็กน้อย

$$\text{สำหรับ} \quad f(x) = x \quad \text{เราได้} \quad df(x)(h) = 1h$$

$$\text{สำหรับ } f(x) = x^2 \text{ เราได้ } df(x)(h) = 2xh$$

เราอาจเขียนผลลัพธ์เสียใหม่ได้เป็น $dx(h) = h$ และ $dx^2(h) = 2xh$

ในผลลัพธ์ทั้งสอง

$$dx(h) = h\,, \quad dx^2(h) = 2xh$$

ให้ระลึกไว้ว่า dx กับ dx^2 เป็นฟังก์ชันที่มี h เป็นตัวแปรค่า x ไม่ใช่ตัวแปรค่า x ที่อยู่ทางขวามือของผลลัพธ์ที่สอง คือ $2xh$ นั้น เราต้องถือว่าเป็นค่าคงที่ เมื่อเราเอาฟังก์ชันผลลัพธ์ทั้งสองหารกัน โดยหารกันแบบหาผลหารฟังก์ชัน

$$(\frac{L}{M})(h) = \frac{L(h)}{M(h)}$$

โดยใช้ผลลัพธ์แรก dx เป็นตัวหาร และ dx^2 เป็นตัวตั้ง เราได้ว่า

$$(\frac{dx^2}{dx})(h) = \frac{2xh}{h} = 2x$$

แสดงว่า $\dfrac{dx^2}{dx}$ เป็นฟังก์ชันที่ค่าของมันไม่ขึ้นอยู่กับ h คือเป็นค่าคงที่ $(= 2x)$ เราจึงเขียนได้ว่า

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

ในที่นี้ทางซ้ายมือเป็นเศษส่วนของดิฟเฟอเรนเชียล หากเราพิจารณาเศษส่วนของดิฟเฟอเรนเชียลของ $f(x)$ โดยทั่วๆ ไปกับดิฟเฟอเรนเชียลของ $f(x) = x$ เราก็จะได้

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

เห็นได้ว่าสัญลักษณ์ของดิฟเฟอเรนเชียล $df(x)$ นี้ช่วยให้เราสามารถพิจารณา $f'(x)$ ได้ว่าเป็นเศษส่วนของดิฟเฟอเรนเชียลของ f กับดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชันที่มีค่าที่ x ใดๆ เป็น x ดังนั้น ต่อไปนี้ เราสามารถถือได้ว่า อนุพันธ์เป็นเศษส่วนของดิฟเฟอเรนเชียลและสามารถนำดิฟเฟอเรนเชียลมาใช้ในการคำนวณหาอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น ถ้า $z = x^6$ และ $y = x^2$ เราจะเขียน $\dfrac{dz}{dy}$ ว่า $\dfrac{dx^6}{dx^2}$ ก็ได้

ในการดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันประกอบ(กฎลูกโซ่)

$$y = g(x), \quad z = f(y) = f(g(x))$$

เราก็เขียนได้ว่า

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

และถือว่า dy ตัดกันก็ได้ (ถ้า dy ไม่ใช่ 0)

จากสูตรสำหรับใช้ในการหาอนุพันธ์ เราจะได้สูตรต่อไปนี้สำหรับใช้หาดิฟเฟอเรนเชียล

$$\begin{aligned} dc &= 0 \\ d(cf(x)) &= cdf(x) \\ d(f(x)+g(x)) &= df(x)+dg(x) \\ d(f(x)g(x)) &= g(x)df(x)+f(x)dg(x) \\ d(\frac{f(x)}{g(x)}) &= \frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

4.3 อนุพันธ์อันดับสูง (higher derivatives)

ถ้า f ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ทุกๆ จุดในช่วง (a,b) เซตของคู่ลำดับ

$$\{(x,f'(x)) \mid a < x < b\}$$

ก็เป็นฟังก์ชันๆ หนึ่ง เราจะแทนฟังก์ชันนี้ด้วย f'

เช่น ถ้า

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 7$$

จะได้ว่า

$$f' = \{(x, 3x^2 + 10x - 4) \mid -\infty < x < +\infty\}$$

เราเรียกฟังก์ชัน f' ว่า **ฟังก์ชันอนุพันธ์ของ** f (derivative function of f)

ถ้า ฟังก์ชันอนุพันธ์ของ f กล่าวคือ f' เป็นฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่จุด c ใด ๆ เราเรียกอนุพันธ์ของ f' ที่ c นั้นว่า **อนุพันธ์อันดับที่สอง** (second order derivative หรือ second derivative) **ของ** f **ที่** c

เราแทน อนุพันธ์อันดับที่สองของ f ที่ c ด้วย $f''(c)$ ส่วนอนุพันธ์ของ f ที่ c คือ f' นั้น บางทีเราก็เรียกเพื่อความชัดเจน ว่า **อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง** (first order derivative หรือ first derivative)

ถ้า f' ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ทุกๆ จุดในช่วง (a,b) แล้วเซตของคู่ลำดับ

$$\{(x,f''(x)) \mid a < x < b\}$$

ก็เป็นฟังก์ชันๆ หนึ่ง เราจะแทนฟังก์ชันนี้ด้วย f'' เช่น $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 7$ ที่กล่าวไว้ข้างต้นนั้น เราได้ไว้แล้วว่า

$$f' = \{(x, 3x^2 + 10x - 4) \mid -\infty < x < +\infty\}$$

จะเห็นได้ว่า f' ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ทุกๆ จุด และได้

$$f'' = \{(x, 6x + 10) \mid -\infty < x < +\infty\}$$

เรานิยาม f''', f'''', f''''', ... ในทำนองเดียวกัน

สัญลักษณ์สำหรับอนุพันธ์อันดับสูงที่กล่าวมาแล้วนั้น เป็นสัญลักษณ์ที่ไม่สะดวกต่อการใช้นัก เช่นหากจะเขียนอนุพันธ์อันดับ 100 หรือแม้แต่อันดับ 10 ก็คงลำบากที่จะอ่าน เพื่อความสะดวกเราจึงมีสัญลักษณ์อีกแบบหนึ่ง คือเราจะใช้ $f^{(n)}$ แทน**อนุพันธ์อันดับที่ n ของ** f และเพื่อความสมบูรณ์ เราจะใช้ $f^{(0)}$ แทน f (หมายถึง f ที่ยังไม่ถูกดิฟเฟอเรนชิเอต)

เนื่องจาก $\dfrac{df(x)}{dx}$ หมายถึง อนุพันธ์ของ f ดังนั้น $\dfrac{d(\frac{df(x)}{dx})}{dx}$ จึงเป็นอนุพันธ์อันดับที่สองของ f เราอาจเขียนสัญลักษณ์นี้โดยย่อได้เป็น $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ ดังนั้นจึงได้

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \text{ เป็นสัญลักษณ์แทนอนุพันธ์อันดับที่สองของ } f$$

และ โดยทั่วๆ ไป

$$\boxed{\frac{d^nf(x)}{dx^n} \text{ เป็นสัญลักษณ์แทนอนุพันธ์อันดับที่ } n \text{ ของ } f}$$

เรายังมีสัญลักษณ์แบบอื่นๆ สำหรับแทนอนุพันธ์อันดับสูงอีก ถ้าเราเขียนแสดงฟังก์ชันด้วย $y = f(x)$ เรายังอาจแทน อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ได้ด้วย y'', $y^{(2)}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ และทำนองเดียวกันสำหรับอนุพันธ์อันดับที่ n

ตัวอย่าง 4.8

จงหาอนุพันธ์อันดับที่สี่ของ $f(x) = x^3 + x^{-2}$ ที่ $x = 1$

วิธีทำ

$$f'(x) = 3x^2 - 2x^{-3}$$
$$f''(x) = 6x + 6x^{-4}$$
$$f^{(3)}(x) = 6 - 24x^{-5}$$
$$f^{(4)}(x) = 120x^{-6}$$

ดังนั้น $f^{(4)}(1) = 120(1)^{-6} = 120$ □

ตัวอย่าง 4.9

กำหนดให้ $y = \sqrt{1+x^2}$ จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1+x^2)$$
$$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\frac{dx}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}\right) - x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x(\frac{1}{2})(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{1+x^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

หรือ สามารถหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ โดยสูตรผลคูณดังนี้

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}\left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2x) \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

□

ตัวอย่าง 4.10

จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 10 ของ $f(x) = x^{-3}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -3x^{-4} \\
f''(x) &= (-3)(-4)x^{-5} \\
f^{(3)}(x) &= (-3)(-4)(-5)x^{-6} \\
&\vdots \\
f^{(10)}(x) &= (-3)(-4)(-5)\cdots(-12)x^{-13} = \frac{12!}{2x^{13}}
\end{aligned}
$$

□

ตัวอย่าง 4.11

ถ้า $y = 3x^4 - 8x^3 + 5$ จงหาว่า y'' มีค่าเป็นศูนย์ที่จุดใดบ้างหรือไม่

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
y' &= 12x^3 - 24x^2 = 12(x^3 - 2x^2) \\
y'' &= 12(3x^2 - 4x) = 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น y'' มีค่าเป็นศูนย์ที่ $x = 0, \ \frac{4}{3}$ □

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สี่ของ $f(x)$ ที่ $x = 1$

   1.1. $f(x) = 1 + x^2 + 3x^4 + 5x^7$

   1.2. $f(x) = 3x - 5\sqrt{x}$

   1.3. $f(x) = (1+x)(\sqrt{2x} + x^3)$

   1.4. $f(x) = \dfrac{(4x + x^5)^2}{x^3}$

2. กำหนดให้ $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

3. จงหาว่า y'' มีค่าเป็นศูนย์ที่จุดใดบ้างหรือไม่

   3.1. $y = x^4 - x^3 - 9x^2 + 42x + 6$

   3.2. $y = \dfrac{3}{5}x^5 - x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 24x + 1$

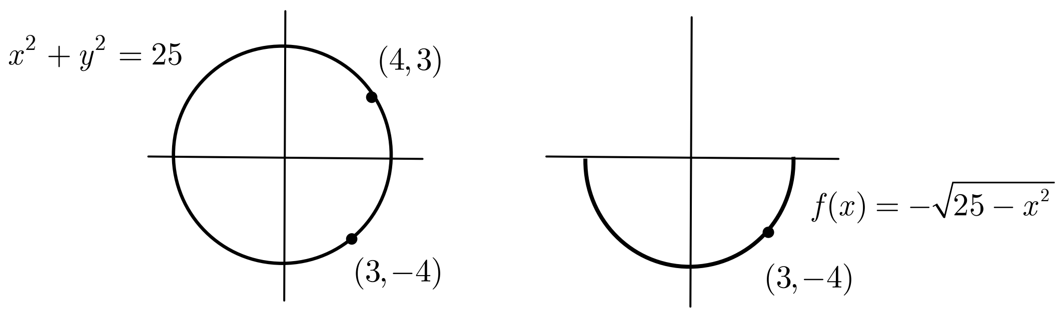
   3.3. $y = \dfrac{x^6}{10} + \dfrac{5}{4}x^4 + 6x^2 + 3x + 6$

4.4 การดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย (differentiation of implicit functions)

ในบางปัญหาฟังก์ชันที่เราต้องการดิฟเฟอเรนชิเอตไม่ได้ถูกกำหนดให้มาอย่างชัดเจน เช่น ถ้าโจทย์ต้องการให้เราหาสมการของเส้นสัมผัสของวงกลม

$$x^2 + y^2 = 25$$

ที่จุด $(3, -4)$ หรือที่จุด $(4, 3)$ เป็นต้น สมการนี้เป็นสมการของความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน การแก้ปัญหาโจทย์ข้อนี้ เราทำได้โดยการหาฟังก์ชัน f มาฟังก์ชันหนึ่งที่กราฟของ f ซ้อนกันกับส่วนของวงกลมดังกล่าวในบริเวณของจุดที่เราจะหาสมการเส้นสัมผัส



ในกรณีของจุด $(3, -4)$ ฟังก์ชัน f ที่มีกราฟซ้อนกันกับวงกลมได้แก่

$$f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

เมื่อดิฟเฟอเรนชิเอต $f(x)$ แล้วแทนค่า $x = 3$ เราจะได้ $f'(3) = \dfrac{3}{4}$

เรามีวิธีทำโจทย์ข้อนี้อีกวิธีหนึ่งซึ่งง่ายกว่า เราไม่ต้องหาสูตรของ f หากแต่พิจารณาว่า f ที่เราต้องการนั้นสอดคล้องสมการ $x^2 + y^2 = 25$ กล่าวคือ $x^2 + f(x)^2 = 25$ แล้วดิฟเฟอเรนชิเอตทั้งสองข้างของสมการที่ได้นี้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2 + f(x)^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\
\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(f(x)^2) &= 0 \\
2x + 2f(x)\frac{d}{dx}(f(x)) &= 0 \\
2x + 2f(x)f'(x) &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)}$ จึงได้ว่า $f'(3) = -\dfrac{3}{f(3)} = -\dfrac{3}{-4} = \dfrac{3}{4}$

แสดงว่าเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $(3, -4)$ มีความชันเท่ากับ $\dfrac{3}{4}$ จึงมีสมการเป็น

$$\frac{y - (-4)}{x - 3} = \frac{3}{4}$$

ซึ่งเมื่อจัดพจน์เสียใหม่ก็จะได้เป็น $3x - 4y = 25$

สำหรับสมการเส้นสัมผัสที่จุด $(4, 3)$ นั้นจะให้นิสิตทำเป็นแบบฝึกหัด

ในตัวอย่างที่กล่าวมานี้ โจทย์ให้หาสมการเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ ที่จุด $(3, -4)$ แม้โจทย์จะไม่ได้ให้ฟังก์ชัน $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ มา การให้สมการวงกลมกับจุด $(3, -4)$ มาก็มีผลเหมือนกับให้ $f(x)$ นี้มาโดยปริยาย เช่นนี้เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย** (implicit function)

วิธีการดิฟเฟอเรนชิเอต f โดยไม่ต้องหาสูตรออกมาเสียก่อนนั้นเป็น**การดิฟเฟอเรนชิเอตโดยปริยาย** (implicit differentiation)

ในกรณีตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วนั้น เราสามารถหาฟังก์ชัน f ออกมาให้**ชัดแจ้ง**(explicit) ได้ว่า $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ แต่ในบางกรณีการหาฟังก์ชัน f ออกมาให้ชัดแจ้งเป็นสิ่งที่เป็นไปไม่ได้

ตัวอย่าง 4.12

จงหาความชันของเส้นโค้ง $x^3 + 3x^2y + y^5 = 5$ ที่จุด $(-2,1)$

วิธีทำ ความชันของเส้นโค้งคือ $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^3 + 3x^2y + y^5\right) &= \frac{d}{dx}(5) \\
\frac{d}{dx}(x^3) + 3\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(y^5) &= 0 \\
3x^2 + 3\left(\frac{dx^2}{dx}y + x^2\frac{dy}{dx}\right) + 5y^4\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\left(3x^2 + 5y^4\right)\frac{dy}{dx} &= -3x^2 - 6xy
\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(3x^2 + 6xy\right)}{3x^2 + 5y^4}$$

จะได้ว่า ความชันที่จุด $(-2,1)$ คือ $\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(3(-2)^2 + 6(-2)(1)\right)}{3(-2)^2 + 5(1)^4} = 0$ □

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่จุด $(2,1)$ จากสมการ $x^2 + 2xy + y^3 = 9$
2. จงหาสมการเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้

   2.1. $\frac{x+2y}{x-2y} = 2 + x$ ที่จุด $(-1,0)$

   2.2. $y - 2\sqrt{x} = \sqrt{x+y}$ ที่จุด $(0,1)$

   2.3. $x^2y + 2x - 3y = 2$ ที่จุด $(1,0)$

   2.4. $xy + x^3 + y^3 = 41$ ที่จุด $(2,3)$

4.5 ปฏิยานุพันธ์ (antiderivatives)

ปัญหาเกี่ยวกับการหาความเร็ว ความชัน และอัตราการแปรค่าชั่วขณะอื่นๆ ล้วนเป็นปัญหาในลักษณะที่ว่า จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ สำหรับปัญหาบางปัญหาเราจะพบกับคำถามในทางตรงกันข้าม กล่าวคือ จงหาฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้

บทนิยาม 4.3

ถ้า P เป็นฟังก์ชันซึ่ง $P'(x) = f(x)$ สำหรับทุกๆ x ในช่วง (a,b) เรากล่าวว่า P เป็น **ปฏิยานุพันธ์** (antiderivative) **ของ** f **บนช่วง** (a,b)

ตัวอย่างเช่น $P(x) = \dfrac{x^3}{3} + 5$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ และโดยทั่วๆ ไป ถ้า C เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า $P(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ ก็เป็น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ มีปฏิยานุพันธ์มากมายหลายปฏิยานุพันธ์ โดยสูตร $P(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ ครอบคลุมปฏิยานุพันธ์ทั้งหลายของ $f(x) = x^2$

เราเรียก C ในสูตรว่า **ตัวคงค่า** (arbitrary constant) เราจะเรียกปฏิยานุพันธ์ที่สูตรของมันมีตัวคงค่าอยู่ด้วยว่า **ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป** (general antiderivative) และเมื่อกำหนดให้ C มีค่าใดค่าหนึ่งเราก็ได้**ปฏิยานุพันธ์เฉพาะ** (particular antiderivative)

ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2$ มีปฏิยานุพันธ์ทั่วไปเป็น $P(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ และมี

$$P(x) = \frac{x^3}{3} + 5, \quad P(x) = \frac{x^3}{3}, \quad P(x) = \frac{x^3}{3} - 7$$

เป็นปฏิยานุพันธ์เฉพาะ เป็นต้น

เราอาจกล่าวได้ว่า **ปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน** f หมายถึงเซตของปฏิยานุพันธ์ทั้งหลายของ f และ**ปฏิยานุพันธ์เฉพาะ**หมายถึงปฏิยานุพันธ์ใดปฏิยานุพันธ์หนึ่งซึ่งอยู่ในเซตนั้น

ต่อไปนี้ คำว่า ปฏิยานุพันธ์ จะหมายถึงปฏิยานุพันธ์ทั่วไป ส่วนคำว่า ปฏิยานุพันธ์หนึ่ง จะหมายถึง ปฏิยานุพันธ์เฉพาะ

ข้อสังเกต

จากบทนิยามของปฏิยานุพันธ์ จะเห็นได้ว่า $P(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ถ้า $dP(x) = f(x)dx$

จากแนวคิดนี้ การหาปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ใดๆ ก็คือ การหาว่า $f(x)dx = d(\ ?\ )$ เช่นถ้าจะหาปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ ก็ต้องถามว่า

$$x^2dx = d(\ ?\ )$$

หากเราคุ้นเคยกับสูตรดิฟเฟอเรนเชียลในลักษณะอ่านถอยหลัง

$$\begin{aligned} dc &= 0 \\ c\,df(x) &= d(cf(x)) \\ df(x) + dg(x) &= d(f(x) + g(x)) \\ kx^{k-1}dx &= dx^k \end{aligned}$$

$$\text{และ } k\,v^{k-1}dv = d\,v^k$$

เราจะสามารถนำสูตรเหล่านี้ไปใช้ในการหาปฏิยานุพันธ์ได้ ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.13

จงหาปฏิยานุพันธ์ของ $\sqrt{x+2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2}\,dx &= (x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx = (x+2)^{\frac{1}{2}}\,d(x+2) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{1}{2}}\,d(x+2) \\ &= \frac{2}{3}d(x+2)^{\frac{3}{2}} = d\,(\frac{2}{3})(x+2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

ปฏิยานุพันธ์ที่ต้องการก็คือ $(\frac{2}{3})(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$ □

สัญลักษณ์สำหรับปฏิยานุพันธ์

เราจะใช้สัญลักษณ์

$$\int f(x)\,dx$$

เพื่อเขียนแทนปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ตัวอย่าง เช่น $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

ตัวอย่าง 4.14

$$\int (x+1)dx = \int (x+1)d(x+1) = \frac{1}{2}\int d(x+1)^2 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$$

□

ตัวอย่าง 4.15

$$\begin{aligned}\int (x-5)^{\frac{1}{3}}dx &= \int (x-5)^{\frac{1}{3}}d(x-5) = \frac{3}{4}\int \frac{4}{3}(x-5)^{\frac{1}{3}}d(x-5)\\ &= \frac{3}{4}\int d(x-5)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}(x-5)^{\frac{4}{3}} + C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 4.16

$$\begin{aligned}\int (x^2+4)^{\frac{2}{5}}\,2x\,dx &= \int (x^2+4)^{\frac{2}{5}}\,d(x^2) = \int (x^2+4)^{\frac{2}{5}}\,d(x^2+4)\\ &= \frac{5}{7}\int \frac{7}{5}(x^2+4)^{\frac{2}{5}}\,d(x^2+4) = \frac{5}{7}\int d(x^2+4)^{\frac{7}{5}}\\ &= \frac{5}{7}(x^2+4)^{\frac{7}{5}} + C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 4.17

$$\begin{aligned}\int x(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}\,dx &= \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{3}}\,d(x^2)\\ &= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{3}}\,d(x^2+1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{2}{3}(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}\,d(x^2+1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int d(x^2+1)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + C\end{aligned}$$

□

แบบฝึกหัด 4.5

จงหาปฏิยานุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int 4x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$
3. $\int x(3x^2-2)^5\,dx$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)^5}\,dx$
5. $\int \frac{5x^3}{\sqrt[3]{x^4+2}}\,dx$
6. $\int \frac{y+2}{\sqrt{y^2+4y+2}}\,dy$
7. $\int z^5\sqrt{z^2+1}\,dz$
8. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\,dx$
9. $\int \sqrt{7t+1}\,dt$
10. $\int \frac{x^8}{\sqrt{1-2x^3}}\,dx$