บทที่ 5
ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

แคลคูลัสมีสองแขนง คือ แคลคูลัสอินทิกรัล (integral calculus) และแคลคูลัสดิฟเฟอเรนเชียล (differential calculus) แคลคูลัสอินทิกรัลว่าด้วยเรื่องอินทิกรัล ซึ่งเป็นเรื่องของการคำนวณหา ลิมิตของผลบวก ส่วนแคลคูลัสดิฟเฟอเรนเชียลว่าด้วยเรื่องของลิมิตของอัตราส่วนของส่วนเพิ่ม เรื่องทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน ดูประหนึ่งว่าไม่เกี่ยวข้องกัน

ในบทนี้เราจะพบว่าเรื่องทั้งสองเกี่ยวข้องกัน ความเกี่ยวข้องระหว่างแคลคูลัสสองแขนงนี้อยู่ในทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (fundamental theorems of calculus) ซึ่งมีอยู่สองบท

ทฤษฎีบท 5.1 (ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่ง)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$ และ x เป็นจำนวนใดๆ ในช่วงเปิด (a,b) ให้ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ x จะได้ว่า F ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ x และได้ว่า

$$F'(x) = f(x)$$

บทนิยาม 5.1

เราเรียกฟังก์ชัน F ซึ่งกำหนดค่าโดย

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ว่า **อินทิกรัลไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) **ของ** f

เราอาจกล่าวทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งอย่างคร่าวๆ ได้ว่า ถ้าอินทิเกรต f ได้ F เราดิฟเฟอเรนชิเอต F ก็จะได้ f

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของฟังก์ชันที่จะสาธิตทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่ง

ตัวอย่าง 5.1

กำหนดให้ $f(x) = |x|$ บนช่วง $[-1,1]$ และให้ $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$

จงหา $F'(x)$ ทุก $x \in (-1,1)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = |x|$ ดังนั้น

$$f(t) = \begin{cases} -t, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

กรณี $x < 0$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{x} (-t)dt = -\int_{-1}^{x} tdt$$
$$= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

กรณี $x > 0$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$
$$= \int_{-1}^{0} (-t)\,dt + \int_{0}^{x} tdt$$
$$= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

กรณี $x = 0$

$$F(x) = \int_{-1}^{0} -tdt = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{2}, & -1 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{2}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

ต่อไป จะแสดงว่า $F(x)$ ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ทุกๆ จุดใน $(-1{,}1)$ และ $F'(x) = f(x)$ บนช่วง $(-1{,}1)$

กรณี $-1 < c < 0$

$$F'(c) = \lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{2}\right)}{x - c} = \lim_{x \to c} -\frac{(x + c)}{2} = -c$$

ดังนั้น F ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และ $F'(c) = -c = |\, c \,| = f(c)$

กรณี $c = 0$

$$F'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2} = 0$$

$$F'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x}{2}=0$$

ดังนั้น $F'(0)=0=f(0)$

กรณี $0<c<1$

$$F'(c)=\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{c^2}{2}\right)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{(x+c)}{2}=c$$

ดังนั้น F ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และ $F'(c)=c=|\,c\,|=f(c)$

จากทุกกรณี ได้ว่า $F'(x)=f(x)$ ทุกๆ x บนช่วง $(-1,1)$ $\square$

คราวนี้ ลองใช้ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่ง สรุปผลที่ได้จากการแสดงในตัวอย่างข้างต้น ดังนี้ เนื่องจาก $f(x)=|\,x\,|$ ต่อเนื่องทุกจุดบนช่วง $[-1,1]$ ดังนั้นโดยทฤษฎีหลักมูลบทที่หนึ่ง จะได้ $F'(x)=\frac{d}{dx}(\int_{-1}^{x}|\,t\,|\,dt)=|\,x\,|$ ทุกจุดบนช่วง $(-1,1)$ ซึ่งได้ผลเช่นเดียวกันกับวิธีแสดงในตัวอย่าง 5.1

ตัวอย่าง 5.2

กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\frac{|\,x\,|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ บนช่วง $[-1,1]$ และให้ $F(x)=\int\limits_{-1}^{x}f(t)dt$

จงหา $F'(x)$ ทุก $x\in(-1,1)$

วิธีทำ

กรณี $x<0$

$$F(x)=\int\limits_{-1}^{x}\frac{-t}{t}dt=\int\limits_{-1}^{x}-1dt=-x-1$$

กรณี $x>0$

$$F(x)=\int\limits_{-1}^{0}f(t)dt+\int\limits_{0}^{x}f(t)dt=\int\limits_{-1}^{0}-1dt+\int\limits_{0}^{x}1dt=-1+x$$

กรณี $x=0$

$$F(0)=\int\limits_{-1}^{0}-1dt=-1$$

ดังนั้น

$$F(x) = \begin{cases} -x-1, & x < 0 \\ -1+x, & x \geq 0 \end{cases}$$

ต่อไปจะแสดงว่า F ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ทุกจุด c ใน $(-1,1)$ ยกเว้นที่ $c = 0$

กรณี $-1 < c < 0$

$$F'(c) = \lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(-x-1) - (-c-1)}{x - c} = -1$$

ดังนั้น F ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และ $F'(c) = -1 = \dfrac{|\,c\,|}{c} = f(c)$

กรณี $0 < c < 1$

$$F'(c) = \lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x-1) - (c-1)}{x - c} = 1$$

ดังนั้น F ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และ $F'(c) = 1 = \dfrac{|\,c\,|}{c} = f(c)$

กรณี $c = 0$

$$F'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x-1) - (-1)}{x} = 1$$

$$F'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(-x-1) - (-1)}{x} = -1$$

ดังนั้น $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x}$ ไม่มีค่าลิมิต นั่นคือ F ดิฟเฟอเรนชิเอตที่ 0 ไม่ได้ $\square$

ทฤษฎีบทหลักมูลที่หนึ่ง สรุปผลในตัวอย่างข้างต้นอย่างเดียวกัน คือ เนื่องจาก $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\,x\,|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ต่อเนื่องทุกจุดบนช่วง $[-1,1]$ ยกเว้น 0 ดังนั้นโดยทฤษฎีหลักมูลบทที่หนึ่งจะได้ $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$ ทุกจุดบนช่วง $(-1,1)$ ยกเว้นที่จุด 0 ซึ่งได้ผลเช่นเดียวกันกับวิธีแสดงในตัวอย่าง 5.2

ในการอธิบายตัวอย่างเหล่านี้ เราจะต้องอินทิเกรตฟังก์ชันที่กำหนดค่าด้วยสูตรหลายสูตร ซึ่งอาจไม่มีความต่อเนื่องที่บางจุดในช่วงของการอินทิเกรต เราจะทำได้โดยอาศัยข้อสังเกตต่อไปนี้

ข้อสังเกต

ให้ f กับ g เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a,b]$ ถ้า f กับ g มีค่าต่างกันที่จุดเดียว จะได้ว่า $\int_a^b f = \int_a^b g$
(อธิบายความจริงข้อนี้โดยพิจารณาผลบวกรีมันน์)

จะเห็นว่า ในการแก้ปัญหาดังในตัวอย่าง 5.1 และ ตัวอย่าง 5.2 เราสามารถใช้ทฤษฎีหลักมูลบทที่หนึ่งได้สะดวกกว่าทำโดยตรงมาก ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.3 (แสดงในห้องเรียน)
จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \int_0^x \sin t dt$

ตัวอย่าง 5.4 (แสดงในห้องเรียน)
จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \int\limits_1^{x^2} (t^{\frac{3}{4}} + 3t^{\frac{1}{4}} - 1)^{\frac{3}{5}} dt$ ที่ $x = 1$

ตัวอย่าง 5.5 (แสดงในห้องเรียน)
จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = (x^2 - 1)\int_1^x \sqrt[3]{2t^2 + 1}\ dt$

ทฤษฎีบท 5.2 (ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สอง)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$ P เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องใน $[a,b]$ ซึ่ง

$$P'(x) = f(x)$$

ที่ทุกๆ x ในช่วงเปิด (a,b) ย่อมได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \quad P(b) - P(a)$$

เราอาจเขียนข้อสรุปของทฤษฎีบทนี้เสียใหม่เป็น

$$\int_a^x f(t)dt \quad = \quad P(x) - P(a)$$

และกล่าวทฤษฎีบทนี้เสียใหม่คร่าวๆได้ว่า

ถ้า $P'(x) = f(x)$ ย่อมได้ว่า $\int_a^x f(t)dt \quad = \quad P(x) - P(a)$

นั่นคือ ถ้าดิฟเฟอเรนชิเอต P ได้ f อินทิเกรต f ย่อมได้ P

จากทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งเราได้ว่า

ถ้าอินทิเกรต f ได้ F เราดิฟเฟอเรนชิเอต F ก็จะได้ f

จากทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองเราได้ว่า

ถ้าดิฟเฟอเรนชิเอต P ได้ f เราอินทิเกรต f ย่อมได้ P

ดังนั้น การอินทิเกรตกับการดิฟเฟอเรนชิเอตจึงเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกันอย่างยิ่ง เห็นได้จากทฤษฎีบทหลักมูลทั้งสอง ว่าการอินทิเกรตกับการดิฟเฟอเรนชิเอตเป็นการกระทำตรงข้ามกัน ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสบทที่สองทำให้เราเห็นได้ว่า สำหรับฟังก์ชันที่เราทราบปฏิยานุพันธ์ของมันนั้น เราจะสามารถคำนวณอินทิกรัลของมันได้โดยง่าย กล่าวคือ คำนวณได้จากผลต่างของปฏิยานุพันธ์ที่จุดปลายของช่วงที่เราอินทิเกรต เช่น จากที่เราทราบว่า $f(x) = x^{-2}$ มี $P(x) = -x^{-1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ และ P มีความต่อเนื่องในช่วง $[1,2]$ เราก็สรุปได้จากทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองว่า

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^{-2}dx &= P(2) - P(1) \\ &= (-2^{-1}) - (-1^{-1}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

เพื่อให้การแสดงการใช้ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองทำได้สะดวกขึ้น เราจะใช้สัญลักษณ์ $P(x)\big]_a^b$ เพื่อหมายถึง $P(b) - P(a)$ โดยการใช้สัญลักษณ์นี้ เราเขียนวิธีทำข้างบนเสียใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^{-2}dx &= -x^{-1}\big]_1^2 \\ &= (-2^{-1}) - (-1^{-1}) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.6

จงอินทิเกรต $\displaystyle\int_1^2 (4x^3 - x^{-2})\,dx$

วิธีทำ

$$\int (4x^3 - x^{-2})\,dx = 4(\frac{x^4}{4}) - (\frac{x^{-1}}{-1}) = x^4 + x^{-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_1^2 (4x^3 - x^{-2})\,dx &= (x^4 + x^{-1})\big]_1^2 \\ &= (2^4 + 2^{-1}) - (1^4 + 1^{-1}) = \frac{29}{2}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.7 (แสดงวิธีทำในห้องเรียน)

จงอินทิเกรต

1) $\int_0^2 (8x^3 + 6x^2 - 5)\,dx$ 2) $\int_1^2 (x+2)^{-2}\,dx$

3) $\int_0^1 (3x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx$ 4) $\int_0^4 2x(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx$

5) $\int_0^2 x(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}\,dx$

แบบฝึกหัด 5.1

1. กำหนดให้ $F(x) = \int\limits_{-2}^{2x} \sqrt[3]{t^4 + 2t + 1}\ dt$ จงหา

   1.1. $F(-1)$ 1.2. $F'(-1)$ 1.3. $F''(-1)$

2. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

   2.1. $y = \int\limits_{-2}^{2x+3} (t^{10} + 3t^5 - 1)^{\frac{7}{5}}\,dt$

   2.2. $y = (x^3 + 3x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} + \int\limits_{x-1}^{x+1} \sqrt{3t^2 + 1}\ dt$

   2.3. $y = x^2 \int\limits_{x}^{3} \sqrt[5]{t^2 + 2}\ dt$

   2.4. $y \int\limits_{1}^{x} \sqrt[3]{4t^3 + 3t^2 - 5}\ dt = 2x$

3. จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

   3.1. $\int\limits_{0}^{1} x\sqrt[3]{2x^2 - 7}\ dx$

   3.2. $\int\limits_{-2}^{3} \left|x^2 - 1\right| dx$

   3.3. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2}{(3x^3 - 1)^3}\ dx$