บทที่ 6
ลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ในการหาปฏิยานุพันธ์ เราคงได้สังเกตเห็นมาแล้วว่า เราหา

$$\int v^k \, dv$$

ได้ในกรณี $k \neq -1$ ทั้งนี้ก็เพราะ เรายังไม่รู้จักฟังก์ชัน f ใดๆ ที่ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งช่วยให้เราสร้างฟังก์ชัน f ที่มีคุณสมบัติดังกล่าวได้ ให้ L เป็นฟังก์ชันที่มีค่าที่จำนวนบวก x ใดๆ เป็น

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่ง เราย่อมได้ว่า

$$L'(x) = \frac{1}{x}$$

ในการศึกษาคุณสมบัติของฟังก์ชัน L นี้ เราจะต้องใช้คุณสมบัติบางประการของอินทิกรัล $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\, dx$ ซึ่งจะตั้งเป็นข้อสังเกตต่อไปนี้

ข้อสังเกต

ให้ S_n เป็นผลบวกรีมันน์ของ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ บนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $0 < a < b$ ดังนั้น

$$S_n = \sum f(t_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

โดยที่ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $x_{i-1} < t_i^* < x_i$

กำหนดให้ $x_i = ay_i$ และ $t_i^* = as_i^*$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_n &= \sum f(t_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum f(as_i^*)(ay_i - ay_{i-1}) \\ &= \sum \frac{1}{as_i^*} a(y_i - y_{i-1}) = \sum \frac{1}{s_i^*}(y_i - y_{i-1}) \\ &= \sum f(s_i^*)(y_i - y_{i-1}) \end{aligned}$$

โดยที่ $1 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \dfrac{b}{a}$, $y_{i-1} < s_i^* < y_i$

ซึ่งเป็นผลบวกรีมันน์ของ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ บนช่วง $[1,\dfrac{b}{a}]$ เราจึงได้ลิมิตของ S_n เป็นสองแบบคือ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx$$

กับ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{1}{y}\,dy = L(\frac{b}{a})$$

ดังนั้น

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = L(\frac{b}{a})$$

อาศัยคุณสมบัติดังกล่าว เราจะแสดงได้โดยง่ายว่า

(1) $L(uv) = L(u) + L(v)$ สำหรับทุกๆจำนวนบวก u, v

(2) $L(u^k) = kL(u)$ ทุกๆจำนวนบวก u และทุกๆจำนวนตรรกยะ k

เห็นได้ว่า L มีคุณสมบัติของลอการิทึมทุกประการ ฟังก์ชัน L นี้เองที่เราเรียกว่า **ลอการิทึมธรรมชาติ** (natural logarithm) และเขียนแทนด้วย ln

บทนิยาม 6.1

สำหรับจำนวนบวก x ใดๆ เรานิยาม $\ln(x)$ โดย

$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

และนิยามจำนวน e ว่าคือจำนวนซึ่ง $\ln(e) = 1$

เราจะแสดงได้ว่า $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ และ e มีค่าประมาณ 2.718 (แสดงในห้องเรียน)

จากบทนิยามของ $\ln(x)$ กับทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่ง เราได้ว่า $\frac{d\ \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$

สูตรนี้ใช้ได้เฉพาะกรณี $x > 0$ อย่างไรก็ตาม ในกรณี $x < 0$ เราจะแสดงได้เช่นกันว่า

$$\frac{d\ \ln(-x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

เราจึงเขียนสูตรทั้งสองรวมกันเป็น

$$\boxed{\frac{d\ \ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}}$$

เราจึงมีสูตรหาปฏิยานุพันธ์เพิ่มขึ้นสูตรหนึ่งว่า

$$\boxed{\int \frac{1}{v}\,dv = \ln|\,v\,| + C}$$

หมายเหตุ หากจะนำสูตรนี้ไปใช้ในการอินทิเกรต (คือใช้ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สอง) เราจะใช้ได้กับช่วง $[a,b]$ ที่ v ไม่เป็นศูนย์ในช่วงเท่านั้น เพราะ ถ้า $v = 0$ ในช่วงใด $\ln|\,v\,|$ จะไม่ต่อเนื่องในช่วงนั้น ซึ่งจะทำให้เราใช้ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองไม่ได้

ตัวอย่าง 6.1

1. $\dfrac{d}{dx}(\ln(1+x)) = \dfrac{1}{1+x}$

2. $\dfrac{d}{dx}(\ln(1+x^2)) = \dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{d(1+x^2)}{dx} = \dfrac{2x}{1+x^2}$

3. $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{1+x^2}) &= \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\ln(1+x^2))\\ &= \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln(x^2\ln x)) &= \frac{1}{x^2\ln x}\frac{d}{dx}(x^2\ln x)\\ &= \frac{1}{x^2\ln x}\left[\frac{dx^2}{dx}(\ln x) + x^2\,\frac{d(\ln x)}{dx}\right]\\ &= \frac{1}{x^2\ln x}\left[2x\ln x + x^2\,\frac{1}{x}\right] = \frac{2}{x} + \frac{1}{x\ln x}\end{aligned}$$

หรืออาจจัดรูปก่อนแล้วจึงหาอนุพันธ์ได้อีกวิธีดังนี้

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(\ln(x^2\ln x)) = \frac{d}{dx}(\ln(x^2) + \ln(\ln x))\\ &= \frac{1}{x^2}\frac{dx^2}{dx} + \frac{1}{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x^2}(2x) + \frac{1}{\ln x}(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x\ln x}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2

1. $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+3x}\,d(2+3x) = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \int \frac{1}{x^2+3}\,d(x^2+3) = \ln(x^2+3) + C$

ตัวอย่าง 6.3

$$1.\quad \int_0^4 \frac{1}{4+x}\,dx = \int_0^4 \frac{1}{4+x}\,d(4+x) = \ln(4+x)\Big]_0^4 = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2$$

$$\begin{aligned} 2.\quad \int_0^4 \frac{4x}{x^2+9}\,dx &= 2\int_0^4 \frac{1}{x^2+9}\,d(x^2+9) = 2\ln(x^2+9)\Big]_0^4 \\ &= 2\ln 25 - 2\ln 9 = 2\ln(\frac{25}{9}) \end{aligned}$$

ฟังก์ชันที่เป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตเป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเสมอไป ดังนั้น ln ก็มีความต่อเนื่องบนโดเมนของมัน ซึ่งคือช่วง $(0, +\infty)$ และมีพิสัยเป็น $(-\infty, +\infty)$
นอกจากนั้น ln เป็นอินทิกรัลของฟังก์ชันที่เป็นบวก ln จึงเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น ln จึงเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งย่อมมีฟังก์ชันผกผันที่มีโดเมน $(-\infty, +\infty)$ และพิสัย $(0, +\infty)$

บทนิยาม 6.2

เราเรียกฟังก์ชันผกผันของ ln ว่า **ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง** (exponential function) และเขียนแทนฟังก์ชันนี้ด้วยสัญลักษณ์ exp กล่าวคือ

$$\exp(x) = \ln^{-1}(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

ข้อสังเกต

$$\exp(\ln(x)) = x, \quad 0 < x < +\infty$$
$$\ln(\exp(x)) = x, \quad -\infty < x < +\infty$$

บทนิยาม 6.3

สำหรับจำนวนจริงบวก a และจำนวนจริง x ใดๆ เรานิยาม

$$a^x = \exp(x\ln(a))$$

ข้อสังเกต

1) การยกกำลังที่กล่าวถึงในบทนิยาม 6.3 นี้ x อาจเป็นจำนวนจริงใดๆ ก็ได้ ไม่จำกัดว่าต้องเป็นจำนวนเต็ม หรือจำนวนตรรกยะ

2) $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x1) = \exp(x)$ แสดงว่า $\exp(x)$ ก็คือ e^x

นอกจากนั้นเรายังแสดงได้ด้วยว่า (แสดงในห้องเรียน)

$$
\begin{aligned}
a^1 &= a \\
a^{x+y} &= a^x a^y \\
(a^x)^y &= a^{xy}
\end{aligned}
$$

ซึ่งสอดคล้องกับการยกกำลังที่เราคุ้นเคย

บทนิยาม 6.4

สำหรับจำนวนจริงบวก a, x ใดๆที่ $a \neq 1$ เรานิยาม **ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน** a (logarithm function) และเขียนแทนด้วย $\log_a$ โดย

$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

ข้อสังเกต

จากนิยามนี้ ได้ว่า

$$\log_e x = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \frac{\ln(x)}{1} = \ln(x)$$

เห็นได้ว่า $\ln$ ก็คือลอการิทึมฐาน e นั่นเอง เรานิยมเรียกจำนวน e ว่าเป็นฐานของลอการิทึมธรรมชาติ

นอกจากนั้นเรายังแสดงได้ด้วยว่า (แสดงในห้องเรียน)

$$
\begin{aligned}
&\log_a(a) = 1 \\
&\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \\
&\log_a(x^y) = y \log_a(x)
\end{aligned}
$$

ซึ่งสอดคล้องกับ $\log$ ที่เราคุ้นเคย

สำหรับฟังก์ชัน $\exp(x), a^x$ และ $\log_a(x)$ เราหาสูตรดิฟเฟอเรนชิเอตได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{d \exp(x)}{dx} &= \exp(x) \\
\frac{da^x}{dx} &= a^x \ln(a) \\
\frac{d \log_a(x)}{dx} &= \frac{1}{x \ln(a)}
\end{aligned}
$$

แต่เรานิยมเขียนสูตรแรกในรูป

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

สำหรับ x^k ที่เรารู้จักมาก่อนนั้น k ต้องเป็นจำนวนตรรกยะ บัดนี้ บทนิยาม 6.3 ช่วยให้เรายกกำลังด้วยเลขชี้กำลังจำนวนจริงใดๆ ก็ได้ เราจึงต้องพิจารณาดูว่า สูตรดิฟเฟอเรนชิเอต x^k จะเป็นอย่างไร ถ้า k เป็นจำนวนจริงโดยทั่วไป

ผลลัพธ์ก็คือ $\dfrac{d\,x^k}{dx} = kx^{k-1}$

ตัวอย่าง 6.4

1. $\dfrac{d}{dx}(e^{5x}) = e^{5x}\dfrac{d}{dx}(5x) = 5e^{5x}$

2. $\dfrac{d}{dx}(e^{x^2}) = e^{x^2}\dfrac{d}{dx}(x^2) = e^{x^2}(2x)$

3. $\dfrac{d}{dx}(x^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

4. $\dfrac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2 \dfrac{d}{dx}(x) = 2^x \ln 2$

5. $\dfrac{d}{dx}(xe^{-x^2}) = e^{-x^2}\dfrac{d}{dx}(x) + x\dfrac{d}{dx}(e^{-x^2}) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}\dfrac{d}{dx}(-x^2)$

   $= e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x)$

6. $\dfrac{d}{dx}(x^2 2^x) = 2^x\dfrac{d}{dx}(x^2) + x^2\dfrac{d}{dx}(2^x) = 2^x(2x) + x^2 2^x \ln 2$

7. $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}(e^x - e^{-x}) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

8. $\dfrac{d}{dx}(\log_2(2^x + \sqrt{x})) = \dfrac{1}{(2^x + \sqrt{x})\ln 2}\dfrac{d}{dx}(2^x + \sqrt{x}) = \dfrac{2^x \ln 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(2^x + \sqrt{x})\ln 2}$

รวมสูตรดิฟเฟอเรนชิเอต

1) $\dfrac{dc}{dx} = 0$

2) $\dfrac{dx}{dx} = 1$

3) $\dfrac{dV^k}{dx} = kV^{k-1}\dfrac{dV}{dx}$

4) $\dfrac{de^V}{dx} = e^V\,\dfrac{dV}{dx}$

5) $\dfrac{da^V}{dx} = a^V\,\ln(a)\dfrac{dV}{dx}$

6) $\dfrac{d\ln(V)}{dx} = \dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dx}$

7) $\dfrac{d\log_a(V)}{dx} = \dfrac{1}{V\ln(a)}\dfrac{dV}{dx}$

กับสูตรดิฟเฟอเรนชิเอต ผลบวก ผลคูณ ผลหารที่นิสิตคุ้นเคยมาแล้วจากชั้นมัธยม

ตัวอย่าง 6.5

จงดิฟเฟอเรนชิเอต

$$f(x) = \frac{(2x+1)2^{x^2}}{(1+x^2)(1+x)}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= \ln\left|\frac{(2x+1)2^{x^2}}{(1+x^2)(1+x)}\right| \\ &= \ln|2x+1| + \ln(2^{x^2}) - \ln(1+x^2) - \ln|1+x|\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln f(x)) &= \frac{d}{dx}(\ln|2x+1| + \ln(2^{x^2}) - \ln(1+x^2) - \ln|1+x|) \\ &= \frac{d}{dx}(\ln|2x+1|) + \frac{d}{dx}(x^2\ln 2) - \frac{d}{dx}(\ln(1+x^2)) - \frac{d}{dx}(\ln|1+x|) \\ \frac{1}{f(x)}f'(x) &= \frac{2}{2x+1} + 2x\ln 2 - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f'(x) = \left[\frac{2}{2x+1} + 2x\ln 2 - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right]\frac{(2x+1)2^{x^2}}{(1+x^2)(1+x)} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 6.6

จงดิฟเฟอเรนชิเอต (แสดงในห้องเรียน)

1) $f(x) = \ln(4+x^2)$
2) $f(x) = x^2 2^x + \dfrac{x}{2^x}$
3) $f(x) = x^x$
4) $f(x) = \dfrac{(5+3x)e^{-x^2}}{(1+2x)^3(1+x^2)}$
5) $f(x) = x^3\log(1+x^2)$

รวมสูตรดิฟเฟอเรนเชียล

1) $dc = 0$
2) $dV^k = kV^{k-1}dV$
3) $d\ln(V) = \dfrac{1}{V}dV$
4) $de^V = e^V dV$
5) $da^V = a^V\ln(a)dV$
6) $d\log_a(V) = \dfrac{1}{V\ln(a)}dV$

รวมสูตรหาปฏิยานุพันธ์

1) $\displaystyle\int V^k\,dV = \frac{V^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \neq -1)$
$\qquad = \ln|V| + C \quad (k = -1)$
2) $\displaystyle\int e^V\,dV = e^V + C$
3) $\displaystyle\int a^V\,dV = \frac{a^V}{\ln(a)} + C$

ตัวอย่าง 6.7

จงหาปฏิยานุพันธ์ (แสดงในห้องเรียน)

1) $\int (1+2x)^{\pi}\, dx$

2) $\int \frac{1}{(3+2x)}\, dx$

3) $\int (2^x+1)^2\, dx$

บทนิยาม 6.5

1) $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (hyperbolic sine)

2) $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (hyperbolic cosine)

3) $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ (hyperbolic tangent)

4) $\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$ (hyperbolic cosecant)

5) $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$ (hyperbolic secant)

6) $\operatorname{ctnh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ (hyperbolic cotangent)

ตัวอย่าง 6.8 (แสดงในห้องเรียน)

1) จงแสดงว่า

$a)$ $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

$b)$ $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$c)$ $\frac{d\sinh(V)}{dx} = \cosh(V)\frac{dV}{dx}$

2) จงดิฟเฟอเรนชิเอต

$a)$ $f(x) = \sinh(1+x^2)$

$b)$ $f(x) = e^x \sinh(x)$

แบบฝึกหัด 6.1

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $f(x) = \ln(1+2x^2)$
2. $f(x) = e^{2x}$
3. $f(x) = \ln x^3$
4. $f(x) = e^{2x^2}$
5. $f(x) = \ln\sqrt{x+x^2+2}$
6. $f(x) = 2x^2e^x$
7. $f(x) = \ln(\sqrt{x}(x+1)^3)$
8. $f(x) = 3^{e^x}$
9. $f(x) = \ln(\ln(x+1))$
10. $f(x) = x^2+2^x+(2x)^{x^2}$
11. $f(x) = (\ln x)^2\sqrt{x}$
12. $f(x) = \dfrac{2e^x+e^{2x}}{3}$
13. $f(x) = \log_2(x^2+1)$
14. $f(x) = xe^x+\log_2(2x)$
15. $f(x) = \ln(5x+\sqrt{x}x^3)$
16. $f(x) = \dfrac{e^x+xe^{2x}}{3^x+x-\ln x}$
17. $f(x) = \ln(x^2\ln(x^2))$
18. $f(x) = (2x)^{(2x)}$
19. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$
20. $f(x) = \dfrac{(3x-x^2)e^{-x}}{(1+x)^2(\ln x)}$
21. $f(x) = \log_3(\dfrac{3^{4x}}{x^3})$
22. $f(x) = \sinh(1-x)$
23. $f(x) = x^2\ln x$
24. $f(x) = \cosh(-x)\cdot e^{2x}$

แบบฝึกหัด 6.2

จงหาอินทิกรัลในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\int 2e^x \, dx$
2. $\int \frac{7x}{x^2-4} dx$
3. $\int 3e^{2x} \, dx$
4. $\int (\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}) \, dx$
5. $\int (2^x+3)^2 \, dx$
6. $\int x^2 e^{x^3} \, dx$
7. $\int \frac{1}{4x-7} dx$
8. $\int (2^x+3)^2 \, dx$
9. $\int \frac{7x}{x^2-4} dx$
10. $\int e^{2x}(e^{2x}+1)^5 \, dx$
11. $\int \frac{x^2+2}{x^3+6x} dx$
12. $\int \frac{\log_2 x^3}{x} dx$
13. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$
14. $\int x^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}} \, dx$
15. $\int_1^{\ln 2} e^{-2x} dx$
16. $\int_0^5 \frac{1}{x+2} dx$
17. $\int_1^2 x e^{-x^2} dx$
18. $\int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+2} dx$
19. $\int_1^5 \frac{\log_5 x}{x} dx$
20. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln \sqrt{x}} dx$