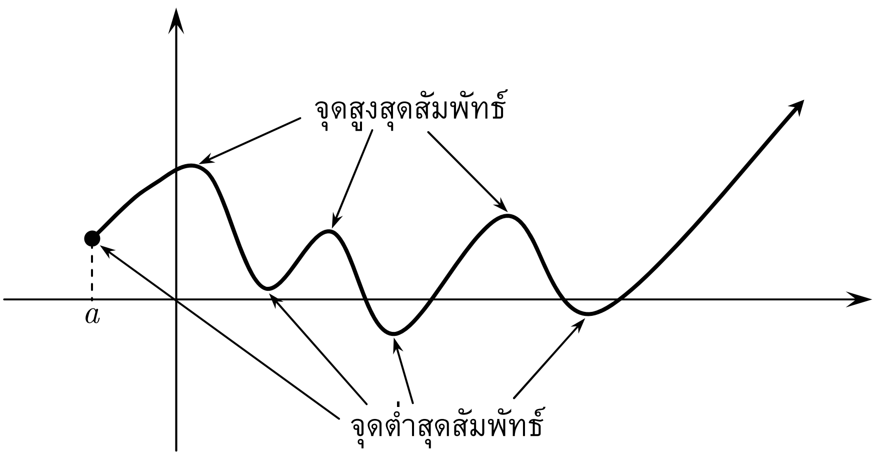
บทที่ 7
ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

7.1 ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

บทนิยาม 7.1

เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) ที่จุด c ถ้ามีช่วงเปิด I ช่วงหนึ่งซึ่ง $f(x) \leq f(c)$ ทุกๆ x ในส่วนร่วมของ I กับโดเมนของ f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า**จุดสูงสุดสัมพัทธ์**

เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum) ที่จุด c ถ้ามีช่วงเปิด I ช่วงหนึ่งซึ่ง $f(x) \geq f(c)$ ทุกๆ x ในส่วนร่วมของ I กับโดเมนของ f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า**จุดต่ำสุดสัมพัทธ์**



รูปแสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์บนช่วง $[a, \infty)$

ทฤษฎีบท 7.1

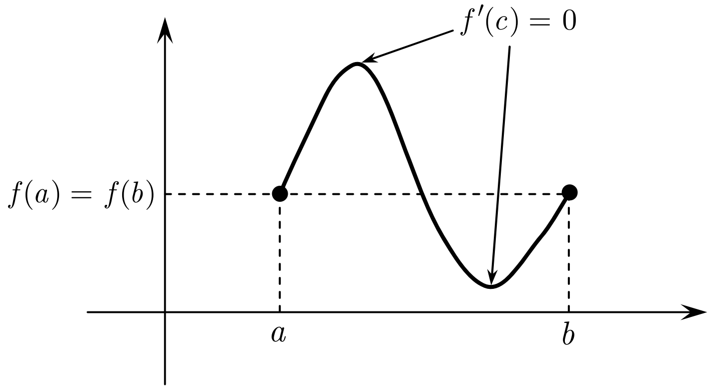
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $[a,b]$ และ c เป็นจุดซึ่ง $a < c < b$ ถ้า f ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c ย่อมได้ว่า $f'(c) = 0$

แนวทางพิสูจน์ ให้ $a < c < b$ และ f ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c ดังนั้น พิจารณาอนุพันธ์จากทางซ้าย $f'_{-}(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ เนื่องจาก $x \to c^-$ ดังนั้น $x < c$ และ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ จึงได้ $f(x) \leq f(c)$ ฉะนั้น $f'_{-}(c) \geq 0$

พิจารณาอนุพันธ์จากทางขวา $f'_+(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ เนื่องจาก $x \to c^+$ ดังนั้น $x > c$
และ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ จึงได้ $f(x) \leq f(c)$ ฉะนั้น $f'_+(c) \leq 0$
เนื่องจาก f ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ c ดังนั้น $f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c)$
จึงได้ $0 \leq f'(c) \leq 0$ นั่นคือ $f'(c) = 0$ ตามต้องการ
สำหรับกรณีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน □

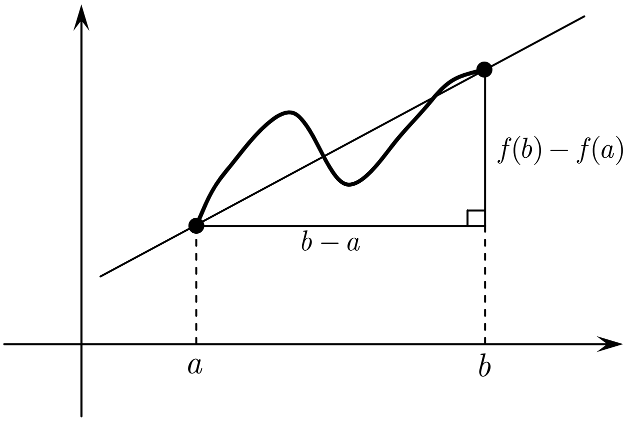
ทฤษฎีบท 7.2 (ทฤษฎีบทของรอล)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องใน $[a,b]$ และ ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ใน (a,b)
ถ้า $f(a) = f(b)$ ย่อมมี c ใน (a,b) ซึ่ง $f'(c) = 0$



ทฤษฎีบท 7.3 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องใน $[a,b]$ และ ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ใน (a,b)
แล้วจะมี c ใน (a,b) ซึ่ง $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



แนวทางพิสูจน์ เส้นตรง ℓ ที่ผ่านจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ มีความชันเป็น $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
ดังนั้น สมการของเส้นตรง ℓ คือ

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

กำหนดให้ $F(x) = f(x) - y$ นั่นคือ

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

ดังนั้น $F(a) = F(b) = 0$ จากทฤษฎีบท 7.2 จะมี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ $F'(c) = 0$
ฉะนั้น

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

จึงได้ $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 7.4

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนชิเอตได้บน (a,b)

(1) ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกๆ x ใน (a,b) f ย่อมเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน (a,b)

(2) ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกๆ x ใน (a,b) f ย่อมเป็นฟังก์ชันลดบน (a,b)

(3) ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุกๆ x ใน (a,b) f ย่อมเป็นฟังก์ชันค่าคงตัวบน (a,b)

แนวทางพิสูจน์

(1) สมมติ $x_1 < x_2$ บนช่วง (a,b)

จากทฤษฎีบท 7.3 จะมี c ซึ่ง $x_1 < c < x_2$ และ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$

แต่ $f'(c) > 0$ เราจึงได้ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$

เนื่องจาก $x_1 < x_2$ ดังนั้น $f(x_1) < f(x_2)$

(2) และ (3) พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน □

ตัวอย่าง 7.1 จงแสดงว่า $f(x) = x^5 + 2x^3 + 7$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, +\infty)$

วิธีทำ $f'(x) = 5x^4 + 6x^2$ เห็นได้ชัดว่า $f'(x) > 0$ บนช่วง $(-\infty, 0)$ กับ $(0, \infty)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0)$ กับ $(0, \infty)$

พิจารณาที่จุด $x = 0$

สำหรับ $x_1 \in (-\infty, 0)$ จะได้ว่า $f(x_1) < 7 = f(0)$

สำหรับ $x_2 \in (0, +\infty)$ จะได้ว่า $f(0) = 7 < f(x_2)$

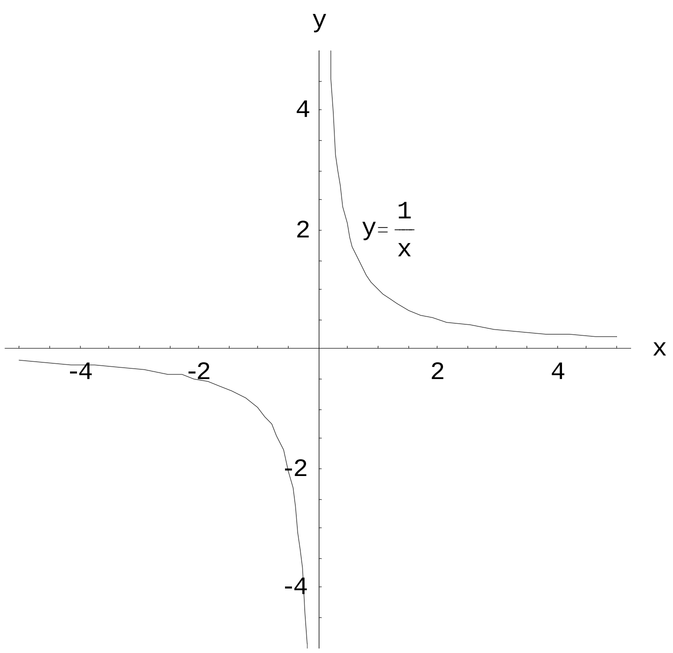
ดังนั้น $f(x_1) < f(x_2)$ ทุกๆ $x_1 \in (-\infty, 0)$ และทุกๆ $x_2 \in (0, +\infty)$

ฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, +\infty)$ □

ข้อสังเกต

1. ในตัวอย่าง 7.1 หลังจากได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0)$ กับ $(0, \infty)$ เราอาจจะสรุปตามมาว่า เนื่องจาก f ต่อเนื่อง จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, +\infty)$ ได้อีกวิธีหนึ่ง

2. ฟังก์ชันอาจเป็นฟังก์ชันเพิ่มเป็นช่วงๆ แต่อาจไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดทั้งโดเมนก็ได้ เช่น $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ดังแสดงในรูปต่อไปนี้



ตัวอย่าง 7.2 (แสดงในห้องเรียน)

1. จงแสดงว่า $f(x) = x^3 + x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty, +\infty)$

2. จงพิจารณาว่า $f(x) = 3x - x^3$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใดบ้างหรือไม่ (ตอบทุกช่วงที่กว้างสุด)

3. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันในโจทย์ข้อ 2 เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใดบ้าง และจงพิจารณาว่าจุดที่เป็นรอยต่อระหว่างช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลดกับฟังก์ชันเพิ่มนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์หรือไม่

4. จงพิจารณาว่า $f(x) = x^4 - 2x^2$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ใดบ้างหรือไม่

5. จงพิจารณาว่า $f(x) = x^3$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ใดบ้างหรือไม่

บทนิยาม 7.2

เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum) ที่จุด c ถ้า $f(x) \le f(c)$ ทุกๆ x ในโดเมนของ f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า**จุดสูงสุดสัมบูรณ์**

เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum) ที่จุด c ถ้า $f(x) \ge f(c)$ ทุกๆ x ในโดเมนของ f และเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า**จุดต่ำสุดสัมบูรณ์**

ตัวอย่าง 7.3 (แสดงในห้องเรียน)

จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ บนช่วง $[0, 3]$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ สอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบทของรอล และหาค่า c ทั้งหมดที่ได้จากบทสรุปของทฤษฎีบทของรอล

   1.1. $f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad [0,4]$

   1.2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, \ [0,2]$

   1.3. $f(x) = \sin 2\pi x, \ [-1,1]$

   1.4. $f(x) = x\sqrt{x+6}, \ [-6,0]$

2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ สอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบทค่ามัชฌิม และหาค่า c ทั้งหมดที่ได้จากบทสรุปของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

   2.1. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1,1]$

   2.2. $f(x) = x^3 + x - 1, \ [0,2]$

   2.3. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \ [0,1]$

   2.4. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \ [1,4]$

3. จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   3.1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \ [-2,3]$

   3.2. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, \ [-2,3]$

   3.3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x+4}, \ [-4,4]$

   3.4. $f(t) = t\sqrt{4-t^2}, \ [-1,2]$

   3.5. $f(x) = \sin x + \cos x, \ [0, \dfrac{\pi}{3}]$

4. สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงใดและเป็นฟังก์ชันลดบนช่วงใดบ้าง และจงหาจุดที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ จุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ทั้งหมด

   4.1. $f(x) = 2 + 3x - x^3$

   4.2. $g(x) = x^4 - 6x^2$

   4.3. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$

   4.4. $h(x) = x\sqrt{x+3}$

   4.5. $A(x) = x - 4\sqrt{x}$

   4.6. $f(t) = t + \cos t, \ -2\pi \le t \le 2\pi$

7.2 สูตรของเทย์เลอร์

ทฤษฎีบท 7.5 (สูตรของเทย์เลอร์)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่ $n+1$ บน (a,b) และอนุพันธ์อันดับต่ำกว่า $n+1$ ล้วนมีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ ให้ x กับ x_0 เป็นสองจุดใด ๆ ใน $[a,b]$ ที่ต่างกัน เราย่อมได้ว่า

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}\right) + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

โดยที่ c อยู่ระหว่าง x กับ x_0

เราเรียกพจน์สุดท้ายในสูตรว่า **เศษเหลือ**

และเรียกสูตรนี้ว่า สูตรของเทย์เลอร์พร้อมด้วยเศษเหลือ

เราเรียกการเขียนสูตรเช่นนี้ว่า**การกระจายฟังก์ชัน** f ด้วยสูตรของเทย์เลอร์พร้อมด้วยเศษเหลือรอบจุด x_0

ตัวอย่าง 7.4

จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ ด้วยสูตรของเทย์เลอร์รอบจุด $x_0 = 1$ เมื่อ $n = 10$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
f''(x) &= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
f'''(x) &= (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3} \\
f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}
\end{aligned}$$

แทนค่า $x_0 = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} f(1) &= \ln 1 = 0 \\ f'(1) &= 1 \\ f''(1) &= -1 \\ f'''(1) &= 2! \\ f^{(4)}(1) &= -3! \\ &\vdots \\ f^{(n)}(1) &= \begin{cases} -(n-1)!, & n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ (n-1)!, & n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \end{aligned}$$

ดังนั้น การกระจายของ $\ln x$ คือ

$$\begin{aligned} \ln x &= 0 + \frac{(1)(x-1)^1}{1!} + \frac{(-1)(x-1)^2}{2!} + \frac{(2!)(x-1)^3}{3!} + \frac{(-3!)(x-1)^4}{4!} \\ &\quad + \frac{(4!)(x-1)^5}{5!} + \cdots + \frac{(-9!)(x-1)^{10}}{10!} + \frac{10!}{c^{11}}\frac{(x-1)^{11}}{11!} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \ln x &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} \\ &\quad + \cdots - \frac{(x-1)^{10}}{10} + \frac{(x-1)^{11}}{11c^{11}} \end{aligned}$$

เมื่อ c อยู่ระหว่าง 1 กับ x □

ตัวอย่าง 7.5 (แสดงในห้องเรียน)

จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้ด้วย สูตรของเทย์เลอร์พร้อมด้วยเศษเหลือรอบจุด x_0 ที่กำหนดให้

1. $f(x) = \sqrt{1+x}$ $\quad x_0 = 0, \ n = 3$
2. $f(x) = e^x$ $\quad x_0 = 0, \ n = 5$
3. $f(x) = \ln(1+x)$ $\quad x_0 = 0, \ n = 5$
4. $f(x) = \sinh(x)$ $\quad x_0 = 0, \ n = 5$

สมัยก่อนค่าของฟังก์ชันต่างๆที่สำคัญจะถูกคำนวณเก็บไว้ในรูปของตาราง เช่น ตารางลอการิทึม ตารางฟังก์ชันตรีโกณ เป็นต้น การคำนวณค่าฟังก์ชันต่างๆ เหล่านี้เขาทำกันโดยใช้สูตรของเทย์เลอร์ ปัจจุบันนี้ เครื่องคิดเลขหรือคอมพิวเตอร์ก็คำนวณค่าฟังก์ชันเหล่านี้ให้เราโดยใช้สูตรของเทย์เลอร์เช่นกัน ต่อไปนี้เราจะดูกันว่าเราใช้สูตรของเทย์เลอร์คำนวณค่าฟังก์ชันต่างๆ ได้อย่างไร

ตัวอย่าง 7.6

จงใช้สูตรเทย์เลอร์ประมาณค่า $e^{0.2}$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สี่

วิธีทำ เราจะใช้สูตรของเทย์เลอร์ประมาณค่า e^x รอบจุด $x_0 = 0$ ซึ่งได้ว่า

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

เมื่อแทนค่า $x = 0.2$ จะได้เศษเหลือคือ

$$R_n = \frac{e^c (0.2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ต้องการหาค่า n ที่ให้ $|R_n| < 0.00001$ เราจึงประมาณขอบเขตของ R_n ดังนี้

$$R_n < \frac{3(0.2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

n	1	2	3	4
$R_n <$	0.06	0.004	0.0002	0.000008

ดังนั้น จึงพอเพียงที่จะใช้ $n = 4$ ในการประมาณค่า $e^{0.2}$

$$e^{0.2} \approx 1 + 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2!} + \frac{(0.2)^3}{3!} + \frac{(0.2)^4}{4!} = 1.2214 \qquad \square$$

ตัวอย่าง 7.7

จงใช้สูตรเทย์เลอร์แสดงว่า

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

ทุกๆ x ซึ่ง $x > 0$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ &\vdots \\ f^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \end{aligned}$$

แทนค่า $x_0 = 0$ และ $n = 4$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + f^{(5)}(c)\frac{x^5}{5!}$$
$$= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+c)^5}$$

เนื่องจาก $x > 0$ และ $0 < c < x$ ดังนั้น $\frac{x^5}{5(1+c)^5} > 0$ นั่นคือ $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < f(x)$

กระจาย $f(x)$ รอบจุด $x_0 = 0$ ใช้ $n = 3$ ได้ว่า

$$f(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(1+c)^4}$$

เนื่องจาก $x > 0$ และ $0 < c < x$ ดังนั้น $\frac{x^4}{4(1+c)^4} > 0$ นั่นคือ $f(x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ □

ตัวอย่าง 7.8

จงใช้สูตรเทย์เลอร์แสดงว่า

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} < -\ln(1-x) < x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 4x^4$$

ทุกๆ x ซึ่ง $0 < x < 0.5$

วิธีทำ

$$f(x) = -\ln(1-x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

แทนค่า $x_0 = 0$ และ $n = 4$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + f^{(5)}(c)\frac{x^5}{5!}$$
$$= 0 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1-c)^5}$$

เนื่องจาก $0 < x < 0.5$ และ $0 < c < x$ ดังนั้น $\frac{x^5}{5(1-c)^5} > 0$

นั่นคือ $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} < f(x)$

กระจาย $f(x)$ รอบจุด $x_0 = 0$ ใช้ $n = 3$ ได้ว่า

$$f(x) = 0 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4(1-c)^4}$$

เนื่องจาก $0 < x < 0.5$ และ $0 < c < x$ ดังนั้น $\dfrac{x^4}{4(1-c)^4} > 0$

นั่นคือ $f(x) < x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ □

หมายเหตุ

โดยการใช้ผลลัพธ์จากตัวอย่าง 7.7 กับตัวอย่าง 7.8 ประกอบกัน เราจะได้ช่วงสำหรับประมาณค่าของ $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ ซึ่งสามารถใช้หา ln ของจำนวนที่มีค่ามากกว่า 1

ตัวอย่าง 7.9 (แสดงในห้องเรียน)

1. จงกระจายสูตรของเทย์เลอร์สำหรับ $f(x) = e^{-x}$ รอบจุด 0 เพื่อให้หาค่า $f(1)$ ได้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สาม แล้วแสดงการหาค่า $f(1)$
2. จงกระจายสูตรของเทย์เลอร์สำหรับ $f(x) = \ln(1+x)$ รอบจุด 0 เพื่อให้หาค่า $f(0.1)$ ได้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สอง แล้วแสดงการหาค่า $f(0.1)$

ในแต่ละข้อ จงให้เหตุผลว่าจำนวนพจน์ที่กระจายนั้นเพียงพอและเหมาะสมดี

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้ด้วย สูตรของเทย์เลอร์พร้อมด้วยเศษเหลือรอบจุด x_0

   1.1. $f(x) = (1+x)^{-3}$ $\quad x_0 = 0,\ n = 3$

   1.2. $f(x) = e^{5x}$ $\quad x_0 = 0,\ n = 5$

   1.3. $f(x) = \ln(x-1)$ $\quad x_0 = 2,\ n = 5$

   1.4. $f(x) = \sin(x)$ $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{2},\ n = 5$

2. จงใช้สูตรเทย์เลอร์ประมาณค่า $e^{1.5}$ โดยมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.0001
3. จงใช้สูตรเทย์เลอร์แสดงว่า

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

   ทุกๆ x ซึ่ง $x > 0$

7.3 เกณฑ์โลปิตาล

ทฤษฎีบท 7.6 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมของโคชี)

ถ้า $f,\ g$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และดิฟเฟอเรนชิเอตได้บน (a,b) ย่อมมี c ใน (a,b) ซึ่ง $g'(c)\big(f(b)-f(a)\big)=f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)$

แนวทางพิสูจน์ ให้ $h(x)=f(x)-f(a)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)\big(g(x)-g(a)\big)$

จะเห็นว่า $h(a)=h(b)=0$ โดยทฤษฎีบท 7.2 และทฤษฎีบท 7.3 จะมี $c\in(a,b)$ ซึ่ง

$h'(c)=\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}=0$

เนื่องจาก $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$

เมื่อแทนค่า $x=c$ ได้ว่า

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$$

ดังนั้น

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$ □

โดยอาศัยทฤษฎีบทข้างบนนี้เราจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ของโลปิตาล ซึ่งจะช่วยให้การพิจารณาหาลิมิตต่าง ๆ ทำได้ง่ายขึ้น เราเรียกทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ว่า **เกณฑ์ของโลปิตาล**

ข้อสังเกต

ในทฤษฎีบทที่ 7.6 ถ้าเราให้ x เป็นจุดใด ๆ ใน (a,b) เราจะได้ว่ามี x^* ระหว่าง a กับ x ซึ่ง $g'(x^*)\big(f(x)-f(a)\big)=f'(x^*)\big(g(x)-g(a)\big)$

ถ้า $f(a)=g(a)=0$, และถ้า $g'(x)$ ไม่เป็นศูนย์ใน (a,b) เราจะได้ว่า

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$$

โดยที่ $a<x^*<x$

ในที่นี้ x^* ขึ้นอยู่กับ x จึงเป็นฟังก์ชันของ x เห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to a^+}x^*=a$

ดังนั้น ถ้า $\lim\limits_{t\to a^+}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}=L$ เราก็จะได้ว่า

$$\lim_{t\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}=L$$

ซึ่งเป็นแนวคิดที่นำไปสู่ทฤษฎีบทได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.7

ให้ $f,\ g$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง และดิฟเฟอเรนชิเอตได้ในช่วงหนึ่งทางขวาของ c ถ้า

1) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=0$
2) $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=0$
3) $g'(x)\neq 0$ ในช่วงดังกล่าว
4) $\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$

โดยที่ในที่นี้ L อาจเป็นจำนวนจริง $-\infty$ หรือ $+\infty$

ข้อสังเกต

โดยการพิจารณาในแนวเดียวกันกับในข้อสังเกตที่มาก่อนทฤษฎีบทที่ 7.7 จะเห็นได้ว่าเราอาจพิสูจน์ทฤษฎีบททำนองนี้สำหรับลิมิตแบบอื่นๆด้วย คือ

ลิมิตจากทางซ้าย $\left(\lim\limits_{x\to c^-}\right)$

ลิมิตสองทาง $\left(\lim\limits_{x\to c}\right)$

ลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ($\lim\limits_{x\to+\infty}$ และ $\lim\limits_{x\to -\infty}$)

เราจะถือว่า ทฤษฎีบทที่ 7.7 ครอบคลุมกรณีของลิมิตแบบอื่นๆ เหล่านี้ด้วย เราเรียกลิมิตของเศษส่วนที่ทั้งเศษและส่วนมีลิมิตเป็นศูนย์ว่า **รูปแบบยังไม่กำหนด** $\dfrac{0}{0}$ ดังนั้นจึงเรียกทฤษฎีบทที่ 7.7 นี้ว่า**เกณฑ์โลปิตาลสำหรับรูปแบบ** $\dfrac{0}{0}$

ตัวอย่าง 7.10

จงแสดงการพิจารณาว่าจะใช้เกณฑ์โลปิตาลในการหาลิมิตต่อไปนี้ได้หรือไม่ ถ้าทำได้จงแสดงการใช้เกณฑ์ดังกล่าวหาลิมิต ถ้าท่านเห็นว่าใช้เกณฑ์โลปิตาลไม่ได้ จงบอกเหตุผล และแสดงการหาลิมิตด้วยวิธีอื่น

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x^2+9}=\dfrac{2(3)-6}{3^2+9}=0$ (แทนค่าได้เลย ใช้เกณฑ์โลปิตาลไม่ได้)

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-1}{x^2+x-2}$ (ใช้เกณฑ์โลปิตาลไม่ได้ แสดงวิธีทำในห้องเรียน)

ข้อ 3 – 9 เป็นรูปแบบยังไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ จึงใช้เกณฑ์โลปิตาลได้

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\ln 2}{3^x\ln 3}=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\sinh(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{\cosh(x)}=0$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}-3}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9e^{3x}}{2}=\dfrac{9}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{2x+1}=\dfrac{1}{3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-4^x}{3^x-2^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x\ln 5-4^x\ln 4}{3^x\ln 3-2^x\ln 2}=\dfrac{\ln 5-\ln 4}{\ln 3-\ln 2}=\dfrac{\ln(5/4)}{\ln(3/2)}$

8. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}=\dfrac{0}{1}=0$

ทฤษฎีบท 7.8

ให้ $f,\ g$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง และดิฟเฟอเรนชิเอตได้ในช่วงหนึ่งทางขวาของ c ถ้า

1) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = +\infty$
2) $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = +\infty$
3) $g'(x) \neq 0$ ในช่วงดังกล่าว
4) $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

โดยที่ในที่นี้ L อาจเป็นจำนวนจริง $-\infty$ หรือ $+\infty$

หมายเหตุ

ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับลิมิตแบบอื่นๆด้วย คือ ลิมิตจากทางซ้าย $\left(\lim\limits_{x\to c^-}\right)$ ลิมิตสองทาง $\left(\lim\limits_{x\to c}\right)$ ลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ($\lim\limits_{x\to+\infty}$ และ $\lim\limits_{x\to -\infty}$)

เราจะถือว่า ทฤษฎีบทที่ 7.8 ครอบคลุมกรณีของลิมิตแบบอื่นๆเหล่านี้ด้วย เราเรียกลิมิตของเศษส่วนที่ทั้งเศษและส่วนมีลิมิตเป็น ∞ ว่า **รูปแบบยังไม่กำหนด** $\dfrac{\infty}{\infty}$

ดังนั้นจึงเรียกทฤษฎีบทที่ 7.8 นี้ว่า **เกณฑ์โลปิตาลสำหรับรูปแบบ** $\dfrac{\infty}{\infty}$

ตัวอย่าง 7.11

จงแสดงการพิจารณาว่าจะใช้เกณฑ์โลปิตาลในการหาลิมิตต่อไปนี้ได้หรือไม่ ถ้าทำได้จงแสดงการใช้เกณฑ์ดังกล่าวหาลิมิต ถ้าท่านเห็นว่าใช้เกณฑ์โลปิตาลไม่ได้ จงบอกเหตุผล และแสดงการหาลิมิตด้วยวิธีอื่น

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x+\log_2(x)}{2x+\log_3(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3+\dfrac{1}{x\ln 2}}{2+\dfrac{1}{x\ln 3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{3x\ln 2+1}{2x\ln 3+1}\right)\left(\dfrac{x\ln 3}{x\ln 2}\right) = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2^x\ln 2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2^x(\ln 2)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2^x(\ln 2)^3}=0$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-1/x}}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{-t}}{1/t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{e^t}=0$

แบบฝึกหัด 7.3

จงแสดงการพิจารณาว่าจะใช้เกณฑ์โลปิตาลในการหาลิมิตต่อไปนี้ได้หรือไม่ ถ้าทำได้ จงแสดงการใช้เกณฑ์ดังกล่าวหาลิมิต ถ้าไม่ได้ จงบอกเหตุผล และแสดงการหาลิมิตด้วยวิธีอื่น

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-3^x}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^a-1}{x^b-1}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln(1+2e^x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1+\cos\pi x}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^a-ax+a-1}{(x-1)^2}$