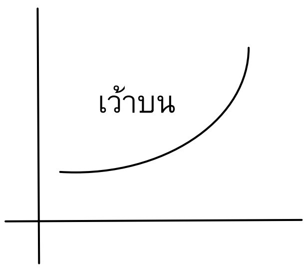
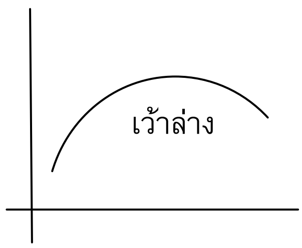
บทที่ 8
การประยุกต์ใช้อนุพันธ์

8.1 การร่างเส้นโค้ง

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาดูลักษณะกราฟของฟังก์ชัน โดยดูจากอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งกับอนุพันธ์อันดับที่สองของมัน ในบทก่อนเราทราบมาแล้วว่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งบอกให้เราทราบได้ถึงลักษณะขึ้นลงของกราฟ กล่าวคือ ถ้าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งมีค่าเป็นบวกในช่วงใด ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงนั้น กราฟของมันจึงมีลักษณะสูงขึ้นเมื่อตัวแปรมีค่ามากขึ้น แต่ถ้าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งมีค่าเป็นลบในช่วงใด ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันลดบนช่วงนั้น กราฟของมันจึงมีลักษณะต่ำลงเมื่อตัวแปรมีค่ามากขึ้น

ในหัวข้อนี้เราจะเรียนรู้ว่าอนุพันธ์อันดับที่สองบอกให้เราทราบถึงลักษณะเกี่ยวกับความเว้าของกราฟ ความเว้าคืออะไร? จงพิจารณาดูกราฟสองรูปต่อไปนี้

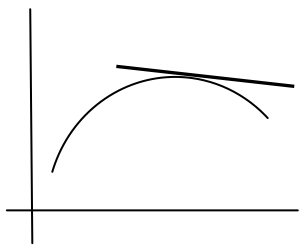




ข้อสังเกต

ที่จุดใด ๆ บนกราฟที่มีลักษณะเว้าบน หากเราลากเส้นสัมผัสที่จุดนั้น เส้นกราฟจะอยู่เหนือเส้นสัมผัส (ในช่วงหนึ่งรอบจุดนั้น)

แต่ที่จุดซึ่งกราฟที่มีลักษณะเว้าล่าง หากเราลากเส้นสัมผัสที่จุดนั้น เส้นกราฟจะอยู่ใต้เส้นสัมผัส (ในช่วงหนึ่งรอบจุดนั้น)



สมการเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $(c, f(c))$ คือ

$$y = f'(c)(x-c) + f(c)$$

ระยะระหว่างเส้นสัมผัสนี้กับกราฟของ $y = f(x)$ ก็คือ

$$g(x) = f(x) - (f'(c)(x-c) + f(c))$$

เห็นได้ว่า

$$\text{กราฟอยู่เหนือเส้นสัมผัสเมื่อ} \quad g(x) > 0$$

$$\text{กราฟอยู่ใต้เส้นสัมผัสเมื่อ} \quad g(x) < 0$$

เราจึงอาจใช้ $g(x)$ เป็นเครื่องมือพิจารณาความเว้าได้

บทนิยาม 8.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด c ให้ $g(x) = f(x) - (f'(c)(x-c) + f(c))$

(1) ถ้ามีช่วง (a,b) ที่ $a < c < b$ ซึ่ง $g(x) > 0$ ที่ทุกๆ x ใน (a,c) และ (c,b) เรากล่าวว่ากราฟของ f มีลักษณะ**เว้าบน** (concave upward) ที่ c

(2) ถ้ามีช่วง (a,b) ที่ $a < c < b$ ซึ่ง $g(x) < 0$ ที่ทุกๆ x ใน (a,c) และ (c,b) เรากล่าวว่ากราฟของ f มีลักษณะ**เว้าล่าง** (concave downward)ที่ c

(3) ถ้ามีช่วง (a,b) ที่ $a < c < b$ ซึ่ง $g(x)$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกันใน (a,c) กับ (c,b) เรากล่าวว่ากราฟของ f มี c เป็น **จุดเปลี่ยนความเว้า** (inflection point)

ข้อสังเกต

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - (f'(c)(x-c) + f(c)) \\ &= f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) \\ &= f'(x_1)(x-c) - f'(c)(x-c) \\ &= (f'(x_1) - f'(c))(x-c) \\ &= f''(x_2)(x-c)(x-c) \end{aligned}$$

เห็นได้ว่าเครื่องหมายของ $g(x)$ เหมือนกับของ $f''(x_2)$ เราจึงสามารถใช้เครื่องหมายของ f'' เป็นเครื่องมือสำหรับพิจารณาความเว้าของกราฟของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบทที่ 8.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับที่สอง

(1) ถ้า f'' เป็นบวกบนช่วงใด กราฟของ f ย่อมมีลักษณะเว้าบนบนช่วงนั้น

(2) ถ้า f'' เป็นลบบนช่วงใด กราฟของ f ย่อมมีลักษณะเว้าล่างบนช่วงนั้น

(3) ถ้ากราฟของ f เปลี่ยนความเว้าที่จุดใด f'' ย่อมมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดนั้น

ข้อสังเกต

บทกลับของ (3) ในทฤษฎีบท 8.1 ไม่จริง เช่น $f(x) = x^4$ เราได้ $f''(0) = 0$ แต่ $x = 0$ ไม่เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

จากความรู้ในทฤษฎีบท 8.1 เราจะสามารถร่างกราฟของฟังก์ชันจากข้อมูลเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งกับอันดับที่สอง และค่าของฟังก์ชันที่บางจุด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.1

กำหนดให้ $f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 55$

จงแสดงการพิจารณาหา

1) ช่วงของการเพิ่มขึ้นของกราฟของ f

2) ช่วงของการลดลงของกราฟของ f

3) ช่วงของการมีความเว้าบนของกราฟของ f

4) ช่วงของการมีความเว้าล่างของกราฟของ f

5) จุดที่กราฟของ f เปลี่ยนความเว้า

6) จุดที่ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

7) จุดที่ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

แล้วจงร่างกราฟของ f

วิธีทำ

$$f'(x) = 12x^3 - 36x^2 = 12x^2(x-3)$$

$$f''(x) = 36x^2 - 72x = 36x(x-2)$$

จะเห็นว่า $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0, 3$

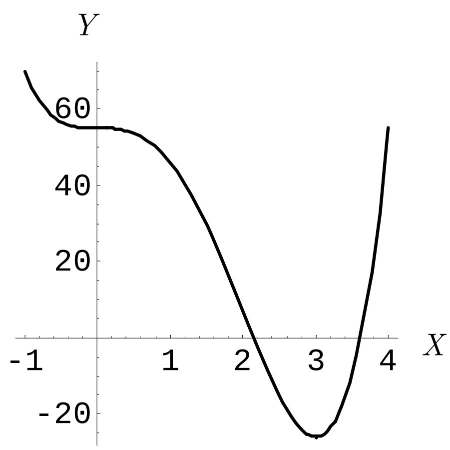
และ $f''(x) = 0$ เมื่อ $x = 0, 2$

ซึ่งเราสามารถคำนวณค่าฟังก์ชันและอนุพันธ์ในช่วงต่าง ๆ ได้ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$2<x<3$	$x=3$	$3<x$
$f(x)$		55		7		-26	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

ดังนั้น

1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(3,\infty)$
2) f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,3)$
3) f เว้าบนบนช่วง $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$
4) f เว้าล่างบนช่วง $(0,2)$
5) จุดเปลี่ยนเว้าคือ $x=0$ และ $x=2$
6) f ไม่มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์
7) f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เมื่อ $x=3$



□

หมายเหตุ

ในการพิจารณาร่างกราฟของฟังก์ชันนั้น จุดที่อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองมีค่าเป็นศูนย์มักจะเป็นจุดที่ฟังก์ชันเปลี่ยนพฤติกรรม เช่นเปลี่ยนจากเพิ่มขึ้นเป็นลดลง หรือเปลี่ยนความเว้าเป็นต้น เรารวมเรียกจุดเหล่านี้ว่า**จุดวิกฤต** (critical point) ในที่นี้ คำว่า"จุดวิกฤต" เราหมายถึงเฉพาะค่าของ x ที่ทำให้ $f'(x)=0$ หรือ $f''(x)=0$ หรือ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 8.2 (แสดงในห้องเรียน)

1. จงหาจุดวิกฤตของ $f(x) = x^2e^{-x}$
2. จงแสดงการพิจารณาหาช่วงของการเพิ่มขึ้นของ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$
3. จงแสดงการพิจารณาหาช่วงของการมีความเว้าล่างของ $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 1$
4. จงแสดงการพิจารณาร่างกราฟของ $f(x) = x^2 + x + 1$
5. จงแสดงการพิจารณาร่างกราฟของ $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 1$ (ใช้ความรู้จากข้อ 4)

แบบฝึกหัด 8.1

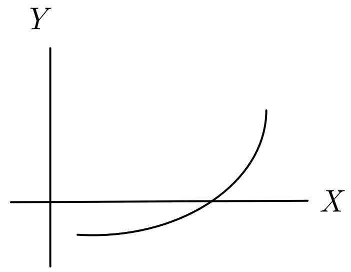
สำหรับฟังก์ชัน f ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงแสดงการพิจารณาหา

(a) จุดวิกฤตของ f
(b) ช่วงของการเพิ่มขึ้นของกราฟของ f
(c) ช่วงของการลดลงของกราฟของ f
(d) ช่วงของการมีความเว้าบนของกราฟของ f
(e) ช่วงของการมีความเว้าล่างของกราฟของ f
(f) จุดที่กราฟของ f เปลี่ยนความเว้า
(g) จุดที่ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
(h) จุดที่ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

พร้อมทั้งร่างกราฟของ f

1. $f(x) = x^3 + x$
2. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$
3. $f(x) = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$
4. $f(x) = 8x^2 - x^4$
5. $f(x) = x^4 + 4x^3$
6. $f(x) = x(x+2)^3$
7. $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 1$
8. $f(x) = 20x^3 - 3x^5$

8.2 การประมาณรากของสมการโดยวิธีของนิวตัน

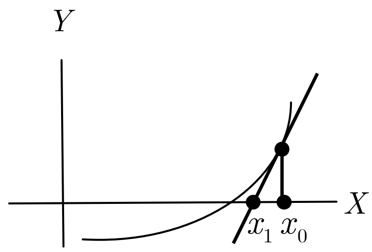


ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาวิธีประมาณรากของสมการในรูป

$$f(x) = 0$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ เราจะเรียกวิธีการนี้ว่า **วิธีของนิวตัน**

วิธีการของนิวตันมีดังนี้



1) เลือกค่าประมาณที่พอใช้ได้มาค่าหนึ่ง (x_0)

2) หาจุด (x_0, y_0) บนกราฟ

3) หาสมการเส้นสัมผัสที่ (x_0, y_0)

4) หาจุด $(x_1, 0)$ ที่เส้นสัมผัสตัดแกน x

5) คำนวณดูว่า $f(x_1)$ มีค่าที่ถือว่าเป็นศูนย์ได้หรือยัง ถ้าใช้ยังไม่ได้ ก็ใช้ x_1 เป็นค่าประมาณแทน x_0 ต่อไปอีก

สมการเส้นสัมผัสที่ (x_0, y_0) คือ

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

ที่จุดตัดแกน x เราต้องได้ว่า

$$0 - y_0 = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

ซึ่ง ทำให้ได้ว่า

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

หากค่า x_1 เป็นค่าประมาณที่ยังไม่ดีพอ เราก็หาสมการเส้นสัมผัสที่ $(x_1, f(x_1))$ แล้วหาจุด $(x_2, 0)$ ที่เส้นสัมผัสใหม่ตัดแกน x หรือหา $x_3, x_4, \ldots$ ต่อไปอีก

โดยใช้สูตร

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

ตัวอย่าง 8.3

กำหนดให้ว่าสมการ $x^5 - 5x + 1 = 0$ มีรากหนึ่งอยู่ในช่วง $[1,2]$ จงแสดงการประมาณรากนี้โดยวิธีของนิวตัน

วิธีทำ $f(x) = x^5 - 5x + 1$ จึงได้ว่า $f'(x) = 5x^4 - 5$

แทน $f(x)$ กับ $f'(x)$ ในสูตร

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ได้ $x_{n+1} = x_n - \dfrac{{x_n}^5 - 5x_n + 1}{5{x_n}^4 - 5}$

โดยการเลือก $x_0 = 1.5$ แล้วคำนวณหา $x_1, x_2, \ldots$

จะได้
$$x_4 = 1.440500397$$
$$x_5 = 1.440500397$$

เมื่อคำนวณ $f(x_5)$ จะได้ว่า $f(x_5) = -0.00000000568$ เห็นได้ว่า 1.440500397 เป็นค่าประมาณของรากที่ต้องการ (รากที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 2) □

หมายเหตุ

ในการประมาณรากของสมการ สิ่งหนึ่งที่เราต้องทำก็คือการพิจารณาว่าสมการมีรากหรือไม่ ถ้ามีจะมีกี่ราก และมีอยู่ในช่วงใดบ้าง วิธีหนึ่งที่จะช่วยให้พิจารณาได้ก็คือการร่างกราฟของฟังก์ชันที่ใช้ในการกำหนดสมการนั้น ดูว่ากราฟของมันน่าจะตัดแกน x ในบริเวณใด แล้วกำหนดให้แน่ลงไปว่ารากอยู่ในช่วงใดโดยดูว่าค่าของฟังก์ชันที่จุดปลายช่วงใดมีเครื่องหมายตรงกันข้าม ช่วงเช่นนั้นย่อมมีรากของสมการอย่างแน่นอน

ตัวอย่าง 8.4 (แสดงในห้องเรียน)

1. กำหนดให้ว่า $x^3 + x - 40 = 0$ มีรากอยู่ในช่วง $[3,4]$ จงแสดงการประมาณรากดังกล่าวนี้โดยวิธีของนิวตัน
2. จงร่างกราฟของฟังก์ชันที่ใช้ในการกำหนดสมการในโจทย์ข้อ 1 แล้วพิจารณาดูว่าสมการดังกล่าวมีรากอื่นนอกเหนือจากที่โจทย์ข้อ 1 สั่งให้หาอีกหรือไม่ ถ้ามี จงหารากเหล่านั้น
3. จงอธิบายว่าจะใช้วิธีของนิวตันประมาณรากของ $x^2 - 5 = 0$ ได้อย่างไร ถ้ากำหนดค่าประมาณเริ่มต้นเป็น 2.1 จะได้ค่าประมาณถัดๆไปอีกสามค่าเป็นอะไรบ้าง
4. จงประมาณรากของสมการ $e^x + x - 2 = 0$ ที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1
5. สมการ $x^5 - 5x + 1 = 0$ มีรากหลายราก จงประมาณรากที่มีค่าต่ำสุด

แบบฝึกหัด 8.2

1. สำหรับสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงใช้วิธีของนิวตันหาค่า x_3 เมื่อ x_0 มีค่าดังที่กำหนดให้

1.1 $x^3 + 2x - 4 = 0,\ x_0 = 1$

1.2 $x^3 - x^2 - 1 = 0,\ x_0 = 1$

1.3 $x^4 - 20 = 0,\ x_0 = 2$

1.4 $x^5 + 2 = 0,\ x_0 = -1$

2. สำหรับสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงใช้วิธีของนิวตันประมาณรากที่อยู่ในช่วงที่กำหนดให้

2.1 $2x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ **ในช่วง** $[2,3]$

2.2 $x^4 + x - 4 = 0$ **ในช่วง** $[1,2]$

2.3 $e^x + x - 2 = 0$ **ในช่วง** $[0,1]$

3. จงร่างกราฟของฟังก์ชันที่ใช้ในการกำหนดสมการในข้อ 2 แล้วพิจารณาดูว่าสมการดังกล่าวมีรากอื่นนอกเหนือจากที่โจทย์ข้อ 2 สั่งให้หาอีกหรือไม่ ถ้ามี จงหารากเหล่านั้น

4. สำหรับสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงใช้วิธีของนิวตันประมาณรากทั้งหมดของสมการ

4.1 $x^4 = 1 + x$

4.2 $x^5 = 5x - 2$

4.3 $\sqrt{x+3} = x^2$

5. สมการ $x^5 - 5x + 1 = 0$ มีรากหลายราก จงประมาณรากที่มีค่าสูงสุด

8.3 การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

ค่าสูงสุดของฟังก์ชันคือค่าหนึ่งของฟังก์ชันที่ค่าของมันที่จุดอื่นใดในโดเมนไม่มากกว่าค่านั้น ค่าสูงสุดจึงย่อมเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันด้วย ดังนั้นการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันจึงจำกัดวงให้แคบลงได้ โดยการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ให้ครบถ้วนทุกค่าเสียก่อน แล้วพิจารณาดูว่าในบรรดาค่าสูงสุดสัมพัทธ์นั้น ค่าใดมากที่สุด ค่าที่มากที่สุดนั้นก็คือค่าสูงสุดที่ต้องการ การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 8.5

กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x + 5,\ \ 1 \le x \le 3$ จงพิจารณาหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ f

แนววิธีทำ ลำดับแรก เราจะพิจารณาหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์กับค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ให้ครบถ้วน ค่าเหล่านี้อาจอยู่ที่จุดขอบโดเมน (1 หรือ 3) หรืออาจอยู่ภายในช่วง $(1, 3)$ ซึ่งหากเป็นเช่นนั้น อนุพันธ์ที่จุดนั้นๆต้องเป็นศูนย์ ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด จึงต้องอยู่ที่จุดขอบ หรือ จุดภายในช่วง $(1, 3)$ ตรงที่อนุพันธ์เป็นศูนย์

วิธีทำ $f'(x) = 2x - 3$ เห็นได้ว่า $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = \dfrac{3}{2}$

ดังนั้น ค่าสูงสุดกับค่าต่ำสุดจึงต้องอยู่ที่ 1 หรือ $\dfrac{3}{2}$ หรือ 3

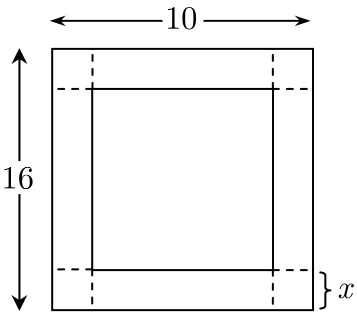
$f(1) = 3,\ \ f(\dfrac{3}{2}) = 2.75,\ \ f(3) = 5$

ดังนั้น ค่าสูงสุด = 5 และค่าต่ำสุด = 2.75 □

ตัวอย่าง 8.6

มีแผ่นโลหะแผ่นหนึ่ง กว้าง 10 นิ้ว ยาว 16 นิ้ว ต้องการตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเท่าๆกันออกจากมุมทั้งสี่ แล้วพับขอบทั้งสี่ขึ้นให้สูงเท่ากับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออกไป ซึ่งจะทำให้ได้กล่องที่ไม่มีฝาปิด หากต้องการให้กล่องที่เกิดขึ้นมีปริมาตรสูงสุด สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออกต้องมีความกว้างเท่าใด

วิธีทำ



ให้ x เป็นความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออกมีหน่วยเป็นนิ้ว
ปริมาตรกล่อง $V = x(10-2x)(16-2x)$ โดยที่ $0 \le x \le 5$
พิจารณากรณี $0 < x < 5$ ดังนั้น

$$\ln V = \ln x + \ln(10-2x) + \ln(16-2x)$$

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{10-2x} + \frac{-2}{16-2x}$$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} &= (10-2x)(16-2x) - 2x(16-2x) - 2x(10-2x)\\ &= 4\big((5-x)(8-x) - x(8-x) - x(5-x)\big)\\ &= 4\Big(40 - 13x + x^2 - 8x + x^2 - 5x + x^2\Big)\\ &= 4\Big(3x^2 - 26x + 40\Big)\\ &= 4(3x-20)(x-2)\end{aligned}$$

เมื่อ $\dfrac{dV}{dx} = 0$ ได้ว่า $x = \dfrac{20}{3}, 2$ แต่ $\dfrac{20}{3} > 5$ จึงไม่อยู่ในโดเมน
ดังนั้น จึงเพียงพอที่จะพิจารณา $x = 0, 2, 5$ ซึ่งจะเห็นว่า
$V(0) = 0, V(5) = 0$ แต่ $V(2) > 0$ ฉะนั้น จึงได้ปริมาตรสูงสุดเมื่อ $x = 2$ $\square$

ตัวอย่าง 8.7 (แสดงในห้องเรียน)
มีแผ่นกระดาษรูปครึ่งวงกลมรัศมี 20 นิ้วอยู่แผ่นหนึ่ง ถ้าต้องการตัดส่วนที่โค้งออกให้เหลือเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีผืนที่มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ จะได้สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่เท่าใด จงแสดงวิธีทำ โดยอธิบายว่าท่านได้ฟังก์ชันที่นำมาหาค่าสูงสุดอย่างไร และหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันได้อย่างไร

ตัวอย่าง 8.8 (แสดงในห้องเรียน)
ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแปลงหนึ่งกว้าง 80 เมตร ยาว 100 เมตร มีรั้วกั้นด้านยาวอยู่แล้วด้านหนึ่ง อีกสามด้านที่เหลือยังไม่มีรั้ว ต้องการล้อมรั้วแบ่งที่ดินเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่ 800 ตารางเมตร โดยกั้นรั้วอีกสามด้านให้ประกอบกับส่วนหนึ่งของรั้วที่มีอยู่แล้ว โดยให้ความยาวรวมของรั้วที่กั้นใหม่นั้นน้อยที่สุด จะต้องใช้รั้วที่กั้นใหม่ยาวเท่าใด และที่ดินที่แบ่งออกมานั้นมีส่วนกว้างและยาวเท่าใด จงแสดงวิธีทำ โดยอธิบายว่าท่านได้ฟังก์ชันที่นำมาหาค่าต่ำสุดอย่างไร และหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันได้อย่างไร

แบบฝึกหัด 8.3

1. จงหาพื้นที่ที่มากที่สุดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ถ้าด้านที่เท่ากันสองด้านยาวด้านละ 12 เซนติเมตร

2. ต้องการล้อมรั้วที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพื่อแบ่งที่ดินเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า 3 แปลงโดยทำรั้วกั้นให้ขนานกับด้านริม 2 ข้าง ถ้าที่ดินนี้มีเนื้อที่ทั้งหมด 3,200 ตารางเมตร จงหาความกว้างและความยาวของที่ดินนี้ที่จะทำให้ความยาวของรั้วน้อยที่สุด

3. จงหาความสูงและรัศมีของฐานของรูปทรงกระบอกกลมที่มีปริมาตรมากที่สุด ที่จะบรรจุในกรวยกลม ซึ่งมีรัศมีของฐานยาว 12 เซนติเมตร และสูง 30 เซนติเมตร โดยที่ฐานของทรงกระบอกอยู่บนฐานของกรวย

4. เจ้าของห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งต้องการกั้นบริเวณด้านล่างของห้างให้มีพื้นที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 600 ตารางฟุต โดยที่มีด้านสามด้านกั้นด้วยรั้วไม้ ส่วนด้านที่สี่ก่อด้วยอิฐ ช่างรับเหมาก่อสร้างกำหนดราคาการก่อสร้างโดยคิดราคากั้นรั้วไม้ 200 บาทต่อความยาวรั้ว 1 ฟุต และราคาก่ออิฐ 400 บาทต่อความยาวรั้ว 1 ฟุต จงหาว่าพื้นที่ผืนนี้ควรมีความกว้างและความยาวเท่าไร จึงจะทำให้เสียเงินค่าใช้จ่ายในการทำรั้วน้อยที่สุด และเป็นจำนวนเท่าไร