บทที่ 9
เทคนิคการอินทิเกรต

เนื่องจากการอินทิเกรตมักจะทำกันโดยการหาปฏิยานุพันธ์เสียก่อน แล้วใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสบทที่สอง การหาปฏิยานุพันธ์จึงเป็นส่วนหนึ่งของการอินทิเกรต บางทีเราก็เรียกการหาปฏิยานุพันธ์ว่า การอินทิเกรต ด้วยเหตุนี้เราจึงยืมเครื่องหมายอินทิกรัลมาใช้ในการเขียนแสดงปฏิยานุพันธ์ ในบทนี้ เราจะได้เรียนรู้วิธีการเบื้องต้นบางประการเกี่ยวกับการหาปฏิยานุพันธ์ และการอินทิเกรต วิธีการเหล่านี้ ได้แก่

1. วิธีการแทนค่า
2. วิธีแยกเศษส่วนย่อย
3. วิธีอินทิเกรตทีละส่วน

9.1 วิธีอินทิเกรตโดยการแทนค่า

ให้ $F'(x) = f(x)$ หากนำกฎลูกโซ่มาเขียนในรูปของดิฟเฟอเรนเชียล จะได้

$$dF(u(x)) = f(u(x))\,du(x) = f(u(x))u'(x)dx$$

หากอ่านสมการที่สองถอยหลัง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(u(x))u'(x)dx &= f(u(x))\,du(x) \\ &= f(u)du \end{aligned}$$

เราจึงได้ว่า

$$\boxed{\int f(u(x))u'(x)\,dx \;\;=\;\; \int f(u)\,du}$$

สูตร

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx \;\;=\;\; \int f(u)\,du$$

เป็นสูตรที่จะช่วยเราแปลงดิฟเฟอเรนเชียลที่ยุ่งยาก คือ

$$f(u(x))u'(x)dx$$

ให้เป็นดิฟเฟอเรนเชียล $f(u)\,du$ ที่ง่ายขึ้น ซึ่งก็จะช่วยให้การหาปฏิยานุพันธ์ทำได้ง่ายขึ้นด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 9.1

จงอินทิเกรต $\int 6x\sqrt{2+x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2+x^2$ ดังนั้น $du = 2xdx$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int 6x\sqrt{2+x^2}\,dx &= 3\int \sqrt{2+x^2}\,(2xdx) = 3\int \sqrt{u}\,du \\ &= 3\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C = 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 9.2

จงอินทิเกรต $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+9}}$

วิธีทำ ให้ $u = 4x^2+9$ ดังนั้น $du = 8xdx$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+9}} &= \int \frac{\frac{1}{8}du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du \\ &= \frac{1}{8}\left(2u^{\frac{1}{2}}\right) + C = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9} + C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 9.3

จงอินทิเกรต $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$

วิธีทำ ให้ $u = e^x+1$ ดังนั้น $du = e^x dx$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1} &= \int \frac{e^x(e^x dx)}{e^x+1} = \int \frac{(u-1)}{u}\,du \\ &= \int \left(1-\frac{1}{u}\right)du = u - \ln|u| + C \\ &= e^x + 1 - \ln\left|e^x+1\right| + C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 9.4 (แสดงในห้องเรียน)

จงอินทิเกรต

1. $\displaystyle\int \frac{(3+2x)dx}{\sqrt{5+3x}}$
2. $\displaystyle\int \frac{2x^3dx}{\sqrt{4+x^2}}$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln(x)}$
4. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int 2x\sqrt[3]{5+x^2}\,dx$

ในการอินทิเกรต (การคำนวณอินทิกรัลจำกัดเขต) หากเราหาปฏิยานุพันธ์โดยการแทนค่า เราต้องแทนค่ากลับไปเป็นตัวแปรค่าเดิมเสียก่อน จึงค่อยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สอง ตัวอย่างเช่น ในการอินทิเกรต

$$\int_0^4 2x\sqrt{x^2+9}\,dx$$

เราหาปฏิยานุพันธ์ได้โดยการแทนค่า $u = x^2+9$ ซึ่งจะได้ปฏิยานุพันธ์ในพจน์ของ u เราต้องแปลงกลับไปเป็น x แล้วจึงค่อยใช้ทฤษฎีบทหลักมูล มีอีกวิธีที่เราไม่ต้องแปลงกลับไปเป็นตัวแปรเดิม หากแต่เปลี่ยนช่วงของการอินทิเกรตให้เป็นช่วงของตัวแปรใหม่ เช่นในกรณีที่ยกมาเป็นตัวอย่างนี้ จะเห็นว่า เมื่อ $x=0$ ได้ $u=9$ และเมื่อ $x=4$ ได้ $u=25$ ดังนั้น

$$\int_0^4 2x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_9^{25}(..?...)\,du$$

เราเรียกวิธีนี้ว่า **การเปลี่ยนตัวแปรของการอินทิเกรต**

ความถูกต้องของวิธีเปลี่ยนตัวแปรของการอินทิเกรตนั้นรับรองโดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 9.1

ให้ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ g' เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[c,d]$ ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดในพิสัยของ g จะได้ว่า

$$\int_c^d f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(u)\,du$$

ตัวอย่าง 9.5 (แสดงในห้องเรียน)

เมื่อใช้การเปลี่ยนตัวแปร $u = 2 + 3x$ อินทิกรัล $\int_1^2 x^2\sqrt{2+3x}\,dx$ จะกลายเป็นอินทิกรัลใด (ไม่ต้องอินทิเกรตหาคำตอบ)

ตัวอย่าง 9.6

จงอินทิเกรต $\int_0^4 2x\sqrt{x^2+9}\,dx$

วิธีทำ

<u>วิธีที่ 1</u> ให้ $u = x^2 + 9$ ดังนั้น $du = 2xdx$ จึงได้ว่า

$$\int_0^4 2x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_9^{25}\sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big]_9^{25}$$

$$= \frac{250}{3} - \frac{54}{3} = \frac{196}{3}$$ □

<u>วิธีที่ 2</u> ให้ $u = x^2 + 9$ ดังนั้น $du = 2xdx$ จึงได้ว่า

$$\int 2x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + C$$

ดังนั้น $\int_0^4 2x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4 = \frac{250}{3} - \frac{54}{3} = \frac{196}{3}$ □

ตัวอย่าง 9.7 (แสดงในห้องเรียน)

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int_0^3 x\sqrt{x^2+16}\,dx$

2. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln(x)}$

3. $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

4. $\int_0^{12} \frac{2x^3dx}{\sqrt{25+x^2}}$

แบบฝึกหัด 9.1

จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \frac{7x}{x^2-4}\,dx$

2. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3+6x}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

5. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{5}{(1-2x)^3}\,dx$

8. $\displaystyle\int \sqrt{x}\cosh(1+x^{\frac{3}{2}})\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+2x+3x^2}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^3+1}\;x^5\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{1+t^3}}\,dt$

14. $\displaystyle\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t}}\,dt$

15. $\displaystyle\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

16. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(2x-3)^2}$

18. $\displaystyle\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

19. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

20. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx$

9.2 วิธีอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

ฟังก์ชันตรรกยะได้แก่ฟังก์ชันใดๆ ที่เขียนได้เป็นเศษส่วนของฟังก์ชันพหุนาม เช่น

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{(x-3)^2(x+1)(x^2+4)}$$

ถ้าดีกรีของเศษน้อยกว่าดีกรีของส่วน ฟังก์ชันเช่นนี้ เราสามารถแยกเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยในรูปต่อไปนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 2x + 3}{(x-3)^2(x+1)(x^2+4)} \\ &= \frac{A}{(x-3)^2} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)} \end{aligned}$$

โดยที่ $A\ B\ C\ D\ E$ เป็นค่าคงตัวที่เราสามารถหาค่าได้ จะเห็นได้ว่า เมื่อเราแยก f ออกเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้แล้ว การอินทิเกรต f ก็ทำได้โดยการอินทิเกรตแต่ละพจน์ แล้วรวมกันเป็นคำตอบพจน์ต่างๆ ที่ได้จากการแยกเศษส่วนย่อยอาจมีรูปแบบใดแบบหนึ่งในสองรูปต่อไปนี้

$$(i)\quad \frac{A}{(ax+b)^k} \qquad\qquad (ii)\quad \frac{Dx+E}{(ax^2+bx+c)^k}$$

โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มบวก

ในรูปแบบ (ii) นั้นจะเป็นกรณีที่พจน์ที่เป็นส่วนนั้น แยกแฟคเตอร์ไม่ได้ แต่จะแปลงได้เป็น $ax^2 + bx + c = v^2 + \mathrm{constant}^2$

ตัวอย่างเช่น

$$4x^2 + 12x + 13 = (2x+3)^2 + 2^2$$

ในการอินทิเกรตพจน์ในรูป (ii) เราจำเป็นต้องมีปฏิยานุพันธ์ของ

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

เพื่อการนี้ เรานิยามฟังก์ชัน $\mathrm{atn}(x)$ ดังนี้

$$\mathrm{atn}(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส เราเห็นได้ว่า $\mathrm{atn}(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

หมายเหตุ

ในที่นี้ ฟังก์ชัน atn เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยอินทิกรัลไม่จำกัดเขต เช่นเดียวกับฟังก์ชัน ln เราอาจประมาณค่าของมันได้โดยอาศัยเกณฑ์ของซิมป์สัน หากคำนวณดูจะพบว่าค่าของ $\operatorname{atn}(x)$ เท่ากับค่าของ $\arctan(x)$ ในรายวิชา 2301114 เราจะได้เรียนเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณ และจะได้เห็นว่า atn นี้ ก็คือ arctan นั่นเอง แต่ในรายวิชานี้เราจะเรียกว่า atn ไปพลางก่อน

เราอาจแสดงได้ว่า

$$\int \frac{1}{v^2+a^2}\,dv = \frac{1}{a}\operatorname{atn}(\frac{v}{a}) + C$$

และจะถือว่านี่เป็นสูตรๆ หนึ่ง

เมื่อเราทราบว่า atn คือ arctan แล้ว สูตรก็จะเป็น

$$\boxed{\int \frac{1}{v^2+a^2}\,dv = \frac{1}{a}\arctan(\frac{v}{a}) + C}$$

ตัวอย่าง 9.8

จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+3}{(x-3)^2(x+1)(x^2+4)}dx$

แนววิธีทำ

$$\frac{x^3-2x+3}{(x-3)^2(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{(x-3)^2} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)}$$

(แสดงการหาค่า A B C D E และการอินทิเกรตในห้องเรียน)

ตัวอย่าง 9.9

จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-3)(x+1)}dx$

วิธีทำ

$$\frac{x+2}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$x+2 = A(x+1) + B(x-3)$$

เมื่อ $x=-1$ จะได้ว่า $1 = B(-4)$ นั่นคือ $B = -\dfrac{1}{4}$

เมื่อ $x=3$ จะได้ว่า $5 = A(4)$ นั่นคือ $A = \dfrac{5}{4}$

ดังนั้น

$$\int \frac{x+2}{(x-3)(x+1)}\,dx = \int \frac{5}{4(x-3)}\,dx - \int \frac{1}{4(x+1)}\,dx$$
$$= \frac{5}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C \qquad \square$$

ตัวอย่าง 9.10 (แสดงในห้องเรียน)

จงอินทิเกรต

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(x-1)^2(x+2)}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+4)}dx$

แบบฝึกหัด 9.2

จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{x-5}dx$

4. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{(x+1)^2}dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}dy$

8. $\displaystyle\int \frac{10}{(t-1)(t^2+9)}dt$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}dx$

10. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+4}dx$

11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)^3}dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x^2+2x+4)^2}dx$

9.3 วิธีอินทิเกรตทีละส่วน

หากนำสูตรดิฟเฟอเรนชิเอตผลคูณมาเขียนในรูปของดิฟเฟอเรนเชียลจะได้

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

ซึ่ง อาจเขียนเสียใหม่เป็น

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

เมื่อหาปฏิยานุพันธ์ จะได้ว่า

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

สูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ เป็นสูตรที่จะช่วยเราอินทิเกรต $u\,dv$ ทีละส่วน คือ ได้ uv มาส่วนหนึ่ง แต่ยังค้าง $\int v\,du$ อยู่อีกส่วนหนึ่ง ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างแสดงการอินทิเกรตทีละส่วน

ตัวอย่าง 9.11
จงอินทิเกรต $\int xe^{2x}\,dx$

แนววิธีทำ
ลำดับแรก เราจะต้องพิจารณา $xe^{2x}dx$ ว่าเป็น $u\,dv$ ปัญหาก็คือ จะให้อะไรเป็น u และอะไรเป็น dv เรามีไม่กี่ทางเลือก ทดลองดูทีละทางเลือก $u = x,\ \ u = xe^{2x},\ \ u = e^{2x}$
โดยให้ dv เป็นส่วนที่เหลือ

วิธีทำ ให้ $u = x \quad dv = e^{2x}dx$
อินทิเกรต dv ได้ $v = \dfrac{e^{2x}}{2} + C$ แทนในสูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\,dx &= (x)(\frac{e^{2x}}{2} + C) - \int (\frac{e^{2x}}{2} + C)\,d(x)\\ &= x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx \\ &= x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C'\end{aligned}$$

□

หมายเหตุ

ค่า C ในปฏิยานุพันธ์ ของ dv นั้นจะตัดทอนกันเองเสมอไป เราใช้ปฏิยานุพันธ์ใดปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ dv ก็ได้

ตัวอย่าง 9.12 (แสดงในห้องเรียน)

จงอินทิเกรต

1. $\int x^2 e^{-3x}\,dx$
2. $\int x2^x\,dx$
3. $\int \ln(x)\,dx$
4. $\int x\ln(x)\,dx$
5. $\int \ln(x+2)\,dx$

ในบางกรณีเราต้องทำการอินทิเกรตทีละส่วนในรูปแบบเดียวกันซ้ำแล้วซ้ำอีกหลายๆ ครั้ง เช่นถ้าเราจะอินทิเกรต

$$\int x^{10} e^{-5x}\,dx$$

เราคงต้องทำการอินทิเกรต $\int x^n e^{-5x}\,dx$

ในกรณี $n = 10, 9, 8, \ldots, 2, 1, 0$ เราควรที่จะหาสูตรลดค่า n ลง ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int x^n e^{ax}\,dx &= x^n\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) - \int \left(\frac{e^{ax}}{a}\right) nx^{n-1}\,dx \\ &= \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx\end{aligned}$$

เราเรียกสูตรเช่นนี้ว่า **สูตรลดทอน** เมื่อได้สูตรลดทอนข้างบนนี้แล้ว เราก็จะหาคำตอบของ $\int x^{10}e^{-5x}\,dx$ ได้ไม่ยาก

การหาสูตรลดทอนในกรณีที่กล่าวมานั้นเราทำได้อย่างตรงไปตรงมา บางกรณีต้องมีการพลิกแพลง เช่นในการหาสูตร ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx &= \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} \\ &\quad + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 9.13 (แสดงในห้องเรียน)

โดยใช้สูตรลดทอนที่มีอยู่แล้ว หรือสร้างสูตรลดทอนขึ้นใช้เอง จงอินทิเกรต

1. $\int x^3e^{-x}\,dx$
2. $\int x^3 5^x\,dx$
3. $\int \frac{1}{(x^2+4)^3}\,dx$
4. $\int \frac{1}{(x^2-9)^3}\,dx$

แบบฝึกหัด 9.3

จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int xe^{-x}\,dx$
2. $\int (\ln x)^2\,dx$
3. $\int re^{\frac{r}{2}}\,dr$
4. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
5. $\int \ln(2x+1)\,dx$
6. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$
7. $\int x5^x\,dx$
8. $\int x^4(\ln x)^2\,dx$

แบบฝึกหัดระคน

จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int x^5e^{x^2}\,dx$
2. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}\,dx$
3. $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$
4. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$
5. $\int \ln(x^2-x+2)\,dx$
6. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$
7. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$
8. $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$
9. $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$
10. $\int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$