เฉลยแบบฝึกหัด 3.1

1.1 การคำนวณหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บู ของ $f(x)=x^2$ บนช่วง $[0,c]$ เมื่อ $c>0$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[0,c]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i=1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1},x_i]=[(i-1)\frac{c}{n},\frac{ic}{n}]$

ซึ่งได้ว่า ค่าน้อยที่สุดของช่วงคือ $m_i=\left(\frac{(i-1)c}{n}\right)^2$ และ ค่ามากสุดของช่วงคือ $M_i=\left(\frac{ic}{n}\right)^2$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บู คือ

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\{\frac{(i-1)^2c^3}{n^3}\}=\frac{c^3}{n^3}(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6})$$

และผลบวกบนแบบดาร์บู คือ

$$U_n=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(\frac{i^2c^3}{n^3})=\frac{c^3}{n^3}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}L_n=\frac{c^3}{3}$ และ $\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{c^3}{3}$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{c^3}{3}$ □

1.1 การคำนวณหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บู ของ $g(x)=x^2+1$ บนช่วง $[0,c]$ เมื่อ $c>0$

วิธีทำ แบ่งช่วง $[0,c]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i=1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1},x_i]=[(i-1)\frac{c}{n},\frac{ic}{n}]$

ซึ่งได้ว่า ค่าน้อยที่สุดของช่วงคือ $m_i=\frac{(i-1)^2c^2}{n^2}+1$ และค่ามากสุดของช่วงคือ $M_i=\frac{i^2c^2}{n^2}+1$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บู คือ

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\{\frac{(i-1)^2c^3}{n^3}+\frac{c}{n}\}=\frac{c^3}{n^3}(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6})+c$$

และผลบวกบนแบบดาร์บู คือ

$$U_n=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(\frac{i^2c^3}{n^3}+\frac{c}{n})=\frac{c^3}{n^3}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})+c$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}L_n=\frac{c^3}{3}+c$ และ $\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{c^3}{3}+c$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{c^3}{3}+c$ □

1.2 การคำนวณหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บู ของ $f(x)=x^2$ บนช่วง $[c,0]$ เมื่อ $c<0$

<u>วิธีทำ</u> แบ่งช่วง $[c,0]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{-c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i=1,\dots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1},x_i]=[\frac{c(n-i+1)}{n},\frac{c(n-i)}{n}]$

ซึ่งได้ว่าค่าน้อยที่สุดของช่วง คือ $m_i=\frac{c^2(n-i)^2}{n^2}$, ค่ามากสุดของช่วงคือ $M_i=\frac{c^2(n-i+1)^2}{n^2}$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บู คือ

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(\frac{-(n-i)^2c^3}{n^3})=-\frac{c^3}{n^3}(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6})$$

และผลบวกบนแบบดาร์บู คือ

$$U_n=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(\frac{-(n-i+1)^2c^3}{n^3})=-\frac{c^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}L_n=-\frac{c^3}{3}$ และ $\lim_{n\to\infty}U_n=-\frac{c^3}{3}$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $-\frac{c^3}{3}$ □

1.2 การคำนวณหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บู ของ $g(x)=x^2+1$ บนช่วง $[c,0]$ เมื่อ $c<0$

<u>วิธีทำ</u> แบ่งช่วง $[c,0]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{-c}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i=1,\dots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1},x_i]=[\frac{c(n-i+1)}{n},\frac{c(n-i)}{n}]$

ซึ่งได้ว่าค่าน้อยที่สุดของช่วง คือ $m_i=\frac{c^2(n-i)^2}{n^2}+1$

และค่ามากสุดของช่วงคือ $M_i=\frac{c^2(n-i+1)^2}{n^2}+1$

ดังนั้น ผลบวกล่างแบบดาร์บู คือ

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(\frac{-(n-i)^2c^3}{n^3}-\frac{c}{n})=-\frac{c^3}{n^3}(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6})-c$$

และผลบวกบนแบบดาร์บู คือ

$$U_n=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(\frac{-(n-i+1)^2c^3}{n^3}-\frac{c}{n})=-\frac{c^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-c$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}L_n=\frac{-c^3}{3}-c$ และ $\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{-c^3}{3}-c$

เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{-c^3}{3}-c$ □

1.3 การคำนวณหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บู ของ $f(x) = x^2$ บนช่วง $[-c, c]$ เมื่อ $c > 0$

วิธีทำ ต้องแบ่งช่วงคิดเป็น $[0, c]$ และ $[-c, 0]$ เมื่อ $c > 0$ เนื่องจากค่า m_i และ M_i ของทั้งสองช่วงไม่เท่ากัน ซึ่ง $[0, c]$ เหมือนกับข้อ 1.1 และ $[-c, 0]$ คล้ายกับข้อ 1.2 (ต่างกันตรงค่า c ในข้อ 1.2 น้อยกว่า 0) ในที่นี้ขอละรายละเอียดไว้ให้นิสิตลองทำแสดงเป็นแบบฝึกหัด
จะได้ว่า ผลบวกล่างแบบดาร์บู คือ

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{c^3}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right) + \frac{c^3}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right) \\ &= \frac{c^3}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3}\right) \end{aligned}$$

และผลบวกบนแบบดาร์บู คือ

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{c^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{c^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{c^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{2}{3}c^3$ และ $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{2}{3}c^3$
เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $\frac{2}{3}c^3$ □

1.3 การคำนวณหาผลบวกบนแบบดาร์บูและผลบวกล่างแบบดาร์บู ของ $g(x) = x^2 + 1$ บนช่วง $[-c, c]$ เมื่อ $c > 0$

วิธีทำ ต้องแบ่งช่วงคิดเป็น $[0, c]$ และ $[-c, 0]$ เมื่อ $c > 0$ เนื่องจากค่า m_i และ M_i ของทั้งสองช่วงไม่เท่ากัน ซึ่ง $[0, c]$ เหมือนกับข้อ 1.1 และ $[-c, 0]$ คล้ายกับข้อ 1.2 (ต่างกันตรงค่า c ในข้อ 1.2 น้อยกว่า 0) ในที่นี้ขอละรายละเอียดไว้ให้นิสิตลองทำแสดงเป็นแบบฝึกหัด
จะได้ว่า ผลบวกล่างแบบดาร์บู คือ

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{c^3}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right) + c + \frac{c^3}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right) + c \\ &= \frac{c^3}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{3}\right) + 2c \end{aligned}$$

และผลบวกบนแบบดาร์บู คือ

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{c^3}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + c + \frac{c^3}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + c \\ &= \frac{c^3}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\right) + 2c \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} L_n = 2(\frac{c^3}{3} + c)$ และ $\lim_{n\to\infty} U_n = 2(\frac{c^3}{3} + c)$
เพราะฉะนั้น ค่าอินทิกรัลเท่ากับ $2(\frac{c^3}{3} + c)$ □

2. แบ่งช่วง $[0,5]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{5}{n}$ และ

สำหรับแต่ละ $i = 1,\ldots,n$ ช่วงที่ i คือ $[x_{i-1}, x_i] = [(i-1)\frac{5}{n}, \frac{i5}{n}]$

เนื่องจาก t_i^* เป็นจุดทางขวาของแต่ละช่วงย่อย นั่นคือ $t_i^* = x_i$

ดังนั้น $f(t_i^*) = \dfrac{\frac{5i}{n}+1}{\sqrt{3\left(\frac{5i}{n}\right)^2+1}}$

เพราะฉะนั้น สูตรผลบวกรีมันน์ที่ต้องการ คือ

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{5i}{n}+1}{\sqrt{3\left(\frac{5i}{n}\right)^2+1}}\right)\frac{5}{n} \qquad \square$$

3. แบ่งช่วง $[a,b]$ เป็น n ช่วงเท่าๆ กัน จะได้ว่าแต่ละช่วงกว้าง $\frac{2}{n}$

ดังนั้น $b - a = 2$

สังเกตจากสูตรผลบวกรีมันน์ จะได้ว่าฟังก์ชันที่ใช้คือ $f(x) = 7 + x^3$ และ $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$

ดังนั้น เราได้ตามมาว่า $a = 1$ และ $b = 3$

ซึ่งลิมิตของผลบวกรีมันน์นี้คือ $\int_1^3 \left(7 + x^3\right) dx$ $\square$