เฉลยแบบฝึกหัด 4.1

ข้อ 1.

บทนิยามสำหรับหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด x หรือ $f'(x)$ มีสองแบบซึ่งสมมูลกัน สามารถเลือกใช้อย่างใดอย่างหนึ่งได้ คือ $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ และ $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

ในเฉลยแบบฝึกหัดนี้ จะแสดงการหาอนุพันธ์โดยใช้ทั้งสองบทนิยาม

1.1 <u>วิธีที่ 1</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^4-2x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}2[\frac{((x+h)^2-x^2)((x+h)^2-x^2)}{h}] \\ &= \lim_{h\to 0}2(2x+h)(2x^2+2xh+h^2)=8x^3 \end{aligned}$$

<u>วิธีที่ 2</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c}\frac{2x^4-2c^4}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c}\frac{2(x^2+c^2)(x+c)(x-c)}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c}2(x^2+c^2)(x+c)=8c^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x)=8x^3$

1.2 <u>วิธีที่ 1</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+1-2x-1}{h} \\ &= 2 \end{aligned}$$

<u>วิธีที่ 2</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c}\frac{2x+1-2c-1}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c}\frac{2(x-c)}{x-c} = 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 2$

1.3 <u>วิธีที่ 1</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}\frac{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

<u>วิธีที่ 2</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{c}}{x-c} \\ &= \lim_{x\to c}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{(x-c)(\sqrt{x}+\sqrt{c})} \\ &= \lim_{x\to c}\frac{(x-c)}{(x-c)(\sqrt{x}+\sqrt{c})} \\ &= \lim_{x\to c}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1.4 <u>วิธีที่ 1</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h})^3-(\sqrt[3]{x})^3}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

<u>วิธีที่ 2</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{c}}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})}{(x-c)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-(\sqrt[3]{c})^3}{(x-c)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{x-c}{(x-c)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$$

ดังนั้น $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

1.5 <u>วิธีที่ 1</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+3-x^2-3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

<u>วิธีที่ 2</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{x^2+3-c^2-3}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x+c)}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}(x+c) = 2c$$

ดังนั้น $f'(x) = 2x$

1.6 <u>วิธีที่ 1</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3+3(x+h)-2-x^3-3x+2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(x+h)^2+x(x+h)+x^2+3$$
$$= 3x^2+3$$

<u>วิธีที่ 2</u> โดยใช้บทนิยาม $f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{x^3+3x-2-c^3-3c+2}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x^2+xc+c^2)+3(x-c)}{x-c}$$
$$= \lim_{x\to c}x^2+xc+c^2+3$$
$$= 3c^2+3$$

ดังนั้น $f'(x) = 3x^2+3$

ข้อ 3.

3.1 $f'(x) = 12x^2+\frac{10}{x^3}$

3.2 $f'(x) = 3x^2-3\sqrt{x}$

3.3 $f'(x) = \frac{15x}{\sqrt{1+3x^2}}$

3.4 $f'(x) = \frac{(-2)(5-x^2)-(3-2x)(-2x)}{(5-x^2)^2} = \frac{-10-6x-4x^2}{(5-x^2)^2}$

3.5 $h'(x) = 2x^{\frac{-5}{2}}-7x^{-4}$

3.6 $f'(x) = (3x^2)\sqrt{1+x^2}+(1+x^3)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ข้อ 4.

4.1. $f'(x) = (8x-9)(x^2 - \frac{x}{4} - 2x)^3$

4.2. $f'(x) = \frac{15}{(4-5x)^2}$

4.3. $f'(x) = \frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

4.4. $f'(x) = \frac{15}{4\sqrt{x}}(3\sqrt{x}-2)^{\frac{3}{2}}$

4.5. $f'(x) = \frac{3x}{\sqrt[4]{(6-2x^2)^7}}$

4.6. $f'(x) = \frac{1}{2}(3-x)^4(x^2+5x)^{\frac{-1}{2}}(2x+5) - 4(x^2+5x)^{\frac{1}{2}}(3-x)^3$

4.7. $f'(t) = (t^3 - 2t + 1)(-\frac{1}{t^2} - 2t) + (\frac{1}{t} - t^2)(3t^2 - 2)$

4.8. $f'(s) = \dfrac{\frac{1}{3}(4s^{-1} + \frac{2}{3}s^{-5})^2(2s^5 - 4s)^{\frac{-2}{3}}(10s^4 - 4) - 2\sqrt[3]{2s^5 - 4s}\ (4s^{-1} + \frac{2}{3}s^{-5})(-4s^{-2} - \frac{10}{3}s^{-6})}{(4s^{-1} + \frac{2}{3}s^{-5})^3}$

4.9.
$$g'(x) = \frac{(x^3-2)(5-2x^2)}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}[-4x(x^3-2) + 3x^2(5-2x^2)]$$
$$= \frac{5x^3 - 4x^2 - 2x^5 - 10}{2\sqrt{x+1}} + (15x^2 + 8x - 10x^4)\sqrt{x+1}$$

4.10. $h'(y) = -9y^{-4} + 2y^{-\frac{3}{2}}$

4.11. $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} - 4x^{\frac{-1}{3}}$

4.12. $\frac{dy}{dx} = -1$