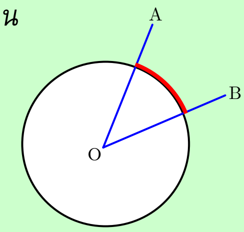
บทที่ 11
การดิฟเฟอเรนชิเอตและการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณและฟังก์ชันตรีโกณผกผัน

ฟังก์ชันตรีโกณพัฒนามาจากอัตราส่วนตรีโกณ ซึ่งมีค่าขึ้นอยู่กับขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก การวัดขนาดของมุมนั้นเราวัดได้ด้วยความยาวส่วนโค้งของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดยอดของมุม เช่นมุม AOB ในรูปขวามือ ขนาดของมุมนี้วัดได้ด้วยความยาวส่วนโค้งของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยจดศูนย์กลางที่ O

เราจึงต้องเรียนรู้วิธีคำนวณหาความยาวเส้นโค้งกันเสียก่อน

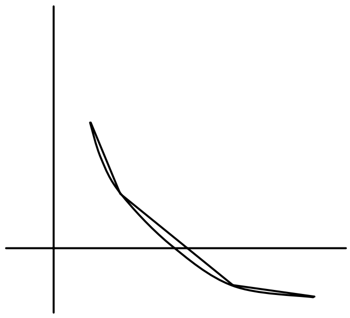


11.1 ความยาวเส้นโค้งและพื้นที่ส่วนของวงกลม

เส้นโค้งที่เราจะพิจารณาหาความยาวในที่นี้ จะไม่จำกัดเฉพาะส่วนโค้งของวงกลมเท่านั้น หากแต่จะครอบคลุมเส้นโค้งที่เป็นกราฟของฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ f' มีความต่อเนื่องในช่วง $[a,b]$ เราจะพิจารณาหาสูตรสำหรับใช้ในการคำนวณความยาวของเส้นโค้ง $y=f(x)$ ส่วนที่อยู่ในช่วง $[a,b]$

ให้ $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ เป็นการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย



เราจะประมาณความยาวเส้นโค้งส่วนที่อยู่ในช่วงย่อยแต่ละช่วงด้วยความยาวของเส้นตรงที่โยงจุดหัวกับจุดท้ายของเส้นโค้งในช่วงนั้นๆ ดังรูปขวามือ

หากแบ่งช่วงละเอียดขึ้นผลบวกจะมีค่าใกล้ความยาวเส้นโค้งยิ่งขึ้น ผลบวกดังกล่าวก็คือ

$$\sum\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

โดยการใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมกับพจน์ $(f(x_i)-f(x_{i-1}))$ แล้วแยกแฟคเตอร์ (x_i-x_{i-1}) ออกนอกเครื่องหมายรู้ท จะได้ผลบวกเป็น

$$\sum \sqrt{1+(f'(x^*_i))^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

ซึ่งเห็นได้ว่าเป็นผลบวกรีมันน์ของ $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ บนช่วง $[a,b]$

ผลบวกนี้จึงมีลิมิตเป็น

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

เราจึงได้ว่า

> ความยาวเส้นโค้ง (กราฟของ f) ส่วนที่อยู่ในช่วง $[a,b]$
>
> $$= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

หมายเหตุ

ที่กำหนดไว้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ f' เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องนั้น ก็เพื่อให้

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} \tag{11.1}$$

เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ เงื่อนไขที่อ่อนกว่าข้อกำหนดดังกล่าวที่ยังคงทำให้ (11.1) เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ก็มี เช่น กำหนดว่า f' มีขอบเขตและมีจุดที่ไม่ต่อเนื่องเพียงจำนวนจำกัด เป็นต้น

ตัวอย่าง 11.1.1 จงประมาณความยาวเส้นโค้ง $y = x^2$ ส่วนที่อยู่ในช่วง [1,3] โดยใช้เกณฑ์ของซิมป์สันในการอินทิเกรต

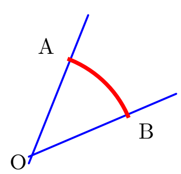
วิธีทำ ในที่นี้ $f(x) = x^2$ จะได้ว่า $f'(x) = 2x$

ดังนั้น ความยาวเส้นโค้ง คือ $\int_1^3 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx \approx 8.268145901$ ■

> **บทนิยาม 11.1.1** สำหรับมุมใดๆ **ขนาดของมุม**นั้นก็คือ ความยาวของส่วนโค้งของวงกลมรัศมี 1 หน่วยจุดศูนย์กลางที่จุดยอดของมุม ที่อยู่ระหว่างแขนทั้งสองของมุม เราเรียกหน่วยของการวัดนี้ว่า**เรเดียน** ส่วนของวงกลมที่อยู่ระหว่างแขนของมุมที่จุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมเป็น **เซกเตอร์**หนึ่งของวงกลมวงนั้น

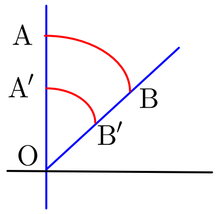
รูปขวามือเป็นตัวอย่างหนึ่งของเซกเตอร์ ในรูปนี้ OA กับ OB ก็คือรัศมีสองเส้นที่เป็นแขนของมุมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

มุมภายนอกก็ทำให้เกิดเซกเตอร์อีกเซกเตอร์หนึ่ง



ข้อสังเกต

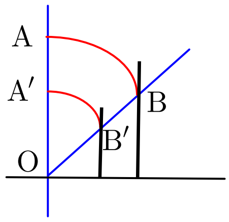
ในรูปขวามือ AOB เป็นเซกเตอร์ของวงกลมที่มีรัศมียาว R (คือ OA=OB=R)



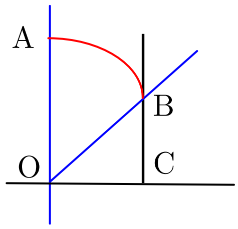
สมมติว่ามุม AOB มีขนาด θ เรเดียน ดังนั้นเมื่อเขียนวงกลมรัศมี 1 หน่วย ที่มีจุดศูนย์กลางที่ O ตัดแขนของมุมที่ A' กับ B' ส่วนโค้ง $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ ก็มีความยาว θ

เราจะได้ว่าส่วนโค้ง AB มีความยาว θR และ เซกเตอร์ OAB มีพื้นที่ $\frac{1}{2}\theta R^2$

ต่อไปนี้เป็นแนวทางพิจารณาหาสูตรทั้งสองนี้



สำหรับสูตรแรก ความยาวส่วนโค้ง AB $=$ θR เราพิจารณาได้จากรูปเดิม แต่ลากเส้นแนวดิ่งจาก B กับ B' มาตั้งฉากกับแกน X สมมติว่าจุดเชิงเส้นตั้งฉากมีพิกัดเป็น b กับ b' ตามลำดับ เราคำนวณความยาวส่วนโค้ง AB กับ $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ ได้โดยการอินทิเกรตบนช่วง [0,b] กับ $[0, \mathrm{b}']$ ตามลำดับ จากผลลัพธ์ทั้งสองเราจะได้สูตรที่ต้องการ

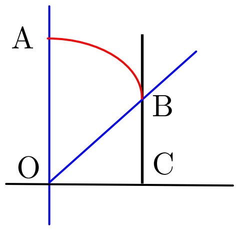


สำหรับสูตรที่สอง พื้นที่เซกเตอร์ OAB $= \frac{1}{2}\theta R^2$

เราพิจารณาได้จากรูปขวามือจะเห็นได้ว่า

พื้นที่เซกเตอร์ OAB = พื้นที่ OABC - พื้นที่ OBC

OBC เป็นรูปสามเหลี่ยม จึงคำนวณหาพื้นที่ได้โดยใช้สูตรพื้นที่รูปสามเหลี่ยม



ส่วน พื้นที่ OABC นั้นหาได้โดยการอินทิเกรต

$$\sqrt{R^2 - x^2}$$

บนช่วง [0, b] และเมื่อใช้การอินทิเกรตทีละส่วน จะได้พจน์หนึ่งที่มีความยาวส่วนโค้ง AB เป็นแฟคเตอร์ เมื่อทำเป็นผลสำเร็จ ก็จะได้สูตรที่ต้องการ

รายละเอียด ให้นิสิตทำเป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 11.1

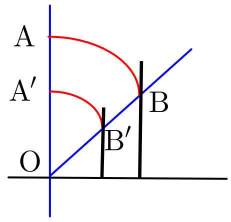
1. ขวามือเป็นรูปดังที่กล่าวมาข้างต้น

(a) จงเขียนความยาว A'B' เป็นอินทิกรัล

(b) จงเขียนความยาว AB เป็นอินทิกรัล

(c) ใช้การเปลี่ยนตัวแปรของการอินทิเกรตใน ข้อ 1.2 ให้ได้อินทิกรัลในข้อ 1.1

(d) ใช้ 1.1-1.3 อธิบายให้ได้สูตรแรก



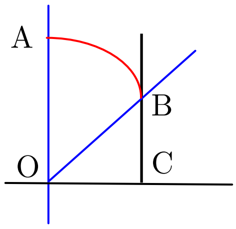
2. ขวามือเป็นรูปดังที่กล่าวมาข้างต้นสำหรับสูตรที่สอง

(a) จงใช้สูตรหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม OBC

(b) จงเขียนพื้นที่ OABC เป็น อินทิกรัล

(c) ทำการอินทิเกรตทีละส่วนกับอินทิกรัลใน 2.2

(d) ใช้ 2.1 กับ 2.3 หาพื้นที่ของ OAB และแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ก็คือสูตรที่สอง



3. จากที่นิยามไว้ว่า π คือพื้นที่ของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย จงใช้นิยามนี้แสดงการพิจารณาตอบคำถามต่อไปนี้

(a) เส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยยาวเท่าใด

(b) มุมฉากมีขนาดกี่เรเดียน

(c) เส้นรอบวงของวงกลมรัศมี R มีความยาวเท่าใด

11.2 สูตรดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันตรีโกณ

ฟังก์ชันตรีโกณเกี่ยวข้องกันด้วยเอกลักษณ์ต่างๆ เมื่อเรามีสูตรดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันตรีโกณฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่ง เราก็จะหาสูตรดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันตรีโกณอื่นๆที่เหลือได้โดยอาศัยเอกลักษณ์ต่างๆ เหล่านั้น ในที่นี้ เราจะพิจารณาหาสูตรสำหรับดิฟเฟอเรนชิเอต sine แล้วจึงใช้ผลลัพธ์ที่ได้หาสูตรสำหรับดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันตรีโกณอื่นๆ

ในการนี้ เราจะใช้คุณสมบัติของ sine ที่ว่า

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

ซึ่งได้จากอสมการ

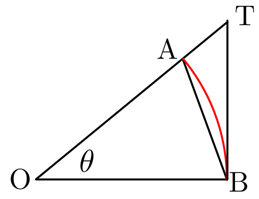
$$\cos\theta \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le 1$$

กับความต่อเนื่องของ cosine ซึ่งทำให้เราได้ว่า

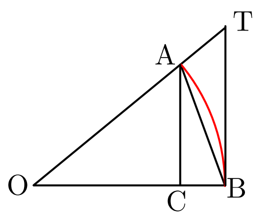
$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$

ต่อไปนี้จะแสดงการพิจารณาให้ได้อสมการดังกล่าว

เราจะพิจารณาเซกเตอร์ของวงกลมรัศมี 1 หน่วยที่มีมุมที่จุดศูนย์กลาง θ เปรียบเทียบกับรูปสามเหลี่ยมสองรูป รูปหนึ่งบรรจุภายในเซกเตอร์ อีกรูปหนึ่งล้อมเซกเตอร์ ในรูปขวามือ สามเหลี่ยม OAB บรรจุอยู่ภายในเซกเตอร์ OAB และสามเหลี่ยม OTB ล้อมเซกเตอร์ OAB จึงเปรียบเทียบพื้นที่กันได้ว่า



พื้นที่สามเหลี่ยม OAB $\leq$ พื้นที่เซกเตอร์ OAB และ พื้นที่เซกเตอร์ OAB $\leq$ พื้นที่สามเหลี่ยม OTB



ในที่นี้มุม OBT เป็นมุมฉาก จึงได้ $\mathrm{BT} = \tan\theta$

สามเหลี่ยม OTB จึงมีพื้นที่ $= \frac{1}{2}\tan\theta$

ลาก AC ตั้งฉากกับ OB ที่ C ได้ส่วนสูงของสามเหลี่ยม OAB คือ $\mathrm{AC} = \sin\theta$

สามเหลี่ยม OAB จึงมีพื้นที่ $= \frac{1}{2}\sin\theta$ และเซกเตอร์ OAB มีพื้นที่ $= \frac{1}{2}\theta$

อสมการทั้งสองจึงกลายเป็น

$$\frac{1}{2}\sin\theta \leq \frac{1}{2}\theta \quad \text{และ} \quad \frac{1}{2}\theta \leq \frac{1}{2}\tan\theta \quad \text{ตามลำดับ}$$

จากอสมการทั้งสอง เราได้ว่า

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1 \quad \text{และ} \quad \cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta}$$

ซึ่งรวมกันเป็นอสมการข้างต้นที่เราที่ต้องการ ดังนั้นเราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\cos\theta &\leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1\\
\lim_{\theta\to 0}\cos\theta &\leq \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1\\
1 &\leq \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1
\end{aligned}$$

คือได้ว่า

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1}$$

ต่อไปนี้จะพิจารณาหาสูตรดิฟเฟอเรนชิเอต sine คือหาสูตรสำหรับ $\sin'(x)$ ในการนี้ เราต้องหาลิมิต

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

ซึ่งทำได้ดังต่อไปนี้

1) หาผลต่าง $\sin(x+h)-\sin(x)$ โดยการใช้เอกลักษณ์ตรีโกณ ซึ่งจะได้ว่า

$$\sin(x+h)-\sin(x) = 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})$$

2) หาเศษส่วน $\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})\}\,/\,h\; = \cos(x+\frac{h}{2})\{\sin(\frac{h}{2})/(\frac{h}{2})\}$$

3) หาลิมิตของเศษส่วนในข้อ 2) เป็นค่าของ $\sin'(x)$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

สำหรับฟังก์ชัน v ใด ๆที่ดิฟเฟอเรนชิเอตได้ เราจึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d\sin(v(x))}{dx} &= \frac{d\sin(v(x))}{dv(x)}\frac{dv(x)}{dx}\\ &= \cos(v(x))\frac{dv(x)}{dx}\end{aligned}$$

จึงได้เป็นสูตรว่า

$$\frac{d\sin(v)}{dx} = \cos(v)\frac{dv}{dx}$$

เมื่อได้สูตรดิฟเฟอเรนชิเอต sine แล้ว เราก็หาสูตรดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันตรีโกณอื่นๆเช่น cosine และ tangent ได้โดยใช้เอกลักษณ์ที่เขียนฟังก์ชันเหล่านั้นในพจน์ของ sine :-

$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

(แสดงการหาสูตร $\cos'(x)$ *กับ* $\tan'(x)$ *ในชั้นเรียน)*

รวมสูตรดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันตรีโกณ:

1) $\dfrac{d\sin(v)}{dx} = \cos(v)\dfrac{dv}{dx}$	4) $\dfrac{d\csc(v)}{dx} = -\csc(v)\mathrm{ctn}(v)\dfrac{dv}{dx}$
2) $\dfrac{d\cos(v)}{dx} = -\sin(v)\dfrac{dv}{dx}$	5) $\dfrac{d\sec(v)}{dx} = \sec(v)\tan(v)\dfrac{dv}{dx}$
3) $\dfrac{d\tan(v)}{dx} = \sec^2(v)\dfrac{dv}{dx}$	6) $\dfrac{d\mathrm{ctn}(v)}{dx} = -\csc^2(v)\dfrac{dv}{dx}$

ตัวอย่าง **11.2.1**

1. จงหาสูตรเทเลอร์พร้อมเศษเหลือของ $\cos(x)$ รอบ 0 (วัด x เป็นเรเดียน)
2. สำหรับ x ที่มีค่าเป็นบวกและไม่เกิน 1 หากต้องการให้เศษเหลือมีค่าไม่เกิน 0.0005 พจน์สุดท้ายของสูตรเทเลอร์คืออะไร
3. จงประมาณ cosine ของ 1 เรเดียน โดยการใช้สูตรในข้อ 2.

ตัวอย่าง **11.2.2** กำหนดให้ $f(x) = x - \cos(x), \quad 0 \le x \le 4\pi$

1. จงพิจารณาว่า f เพิ่มขึ้นหรือลดลงในช่วงใดบ้าง
2. จงพิจารณาว่ากราฟของ f มีลักษณะเว้าล่างหรือเว้าบนในช่วงใดบ้าง
3. จงร่างกราฟของ f
4. ถ้ากราฟของ f ตัดแกน x จงใช้วิธีของนิวตันประมาณรากของสมการ x - $\cos(x) = 0$

ตัวอย่าง 11.2.3 จงดิฟเฟอเรนชิเอต

1. $f(x) = x^2\sin(x)$
2. $f(x) = \sin(x^2)$
3. $f(x) = \sin^2(x)$
4. $f(x) = \sin(e^x)$
5. $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{1+x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{2-\sin(x)}{2-\cos(x)}$
7. $f(x) = x\tan(x)$
8. $f(x) = \sec(2x) + \tan(2x)$
9. จงแสดงว่าสูตรของเทเลอร์พร้อมด้วยเศษเหลือของฟังก์ชัน sine รอบจุด 0 เป็นดังต่อไปนี้

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} + (-1)^{(k+1)}\frac{\sin(c)x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

โดยที่ c อยู่ระหว่าง 0 กับ x

10. กำหนดให้ $f(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{2} \qquad 0 \leq x \leq 4\pi$

1) จงพิจารณาว่า f เพิ่มขึ้นหรือลดลงในช่วงใดบ้าง

2) จงพิจารณาว่ากราฟของ f มีลักษณะเว้าล่างหรือเว้าบนในช่วงใดบ้าง

3) จงร่างกราฟของ f

4) ถ้ากราฟของ f ตัดแกน x จงใช้วิธีของนิวตันประมาณรากของสมการ $\sin(x) - \dfrac{x}{2} = 0$

แบบฝึกหัด 11.2

1. จงดิฟเฟอเรนชิเอต

(a) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

(b) $f(x) = \cos(x) - 4\sin(5x)$

(c) $f(x) = \tan^2(x) + \sin(x^2)$

(d) $f(x) = \sin(5x^2)$

(e) $f(x) = \dfrac{2\sin(2e^x - 1)}{x}$

(f) $f(x) = \dfrac{\tan(2x)}{\sin(x) + \cos(x)}$

(g) $f(x) = \cos^2(\sin(x))$

(h) $f(x) = \cos(\tan(x))$

(i) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

(j) $f(x) = x\csc^3(x)$

(k) $f(x) = \dfrac{\csc(x)}{1 - \sin(x)}$

(l) $f(x) = x^2\sin(2x + 3)$

(m) $f(x) = \tan^2(x^2) - \cot^2(1 - x^2)$

(n) $f(x) = \sqrt{1 + \cos(x^2)}$

(o) $f(x) = 3\sec^2(x) - \sec(x)\csc^2(x)$

(p) $f(x) = e^{\sin(2x)}$

(q) $f(x) = \sec(x^2 \ln x)$

(r) $f(x) = \cot(2 - 3x)$

(s) $f(x) = \sqrt[3]{\tan^2(2x)}$

(t) $f(x) = 5^{2\sec(x^5)}$

2. สำหรับแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \cos(2x) - \dfrac{x^2}{4}$
2. $f(x) = \tan(x^2)$

(a) จงพิจารณาว่า f เพิ่มขึ้นหรือลดลงในช่วงใดบ้าง

(b) จงพิจารณาว่ากราฟของ f มีลักษณะเว้าล่างหรือเว้าบนในช่วงใดบ้าง

(c) จงร่างกราฟของ f

(d) ถ้ากราฟของ f ตัดแกน x จงใช้วิธีของนิวตันประมาณรากของสมการฟังก์ชัน

11.3 การดิฟเฟอเรนซิเอตฟังก์ชันผกผัน

ในหัวข้อต่อไป เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณผกผันและหาสูตรดิฟเฟอเรนซิเอตฟังก์ชันเหล่านั้น ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการดิฟเฟอเรนซิเอตได้ของฟังก์ชันผกผันโดยทั่วๆ ไป และสูตรสำหรับดิฟเฟอเรนซิเอตฟังก์ชันผกผันเสียก่อน เพื่อจะได้ใช้ในการดิฟเฟอเรนซิเอตฟังก์ชันตรีโกณผกผันในหัวข้อถัดไป

ทฤษฎีบท 11.3.1 *ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a,b]$ และมีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ ฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ย่อมเป็นฟังก์ชันเพิ่มที่มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ ด้วย และถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนซิเอตได้ที่ x ใน (a,b) และ $f'(x) \neq 0$ ย่อมได้ว่า f^{-1} ก็เป็นฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนซิเอตได้ที่ $f(x)$ และได้ว่า*

$$f^{-1\,\prime}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

ทฤษฎีบท 11.3.2 *ถ้า f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a,b]$ และมีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ ฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ย่อมเป็นฟังก์ชันลดที่มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ ด้วย และถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนซิเอตได้ที่ x ใน (a,b) และ $f'(x) \neq 0$ ย่อมได้ว่า f^{-1} ก็เป็นฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนซิเอตได้ที่ $f(x)$ และได้ว่า*

$$f^{-1\,\prime}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

ข้อสังเกต ถ้าเราเขียน $y = f(x)$ เราจะได้ว่า $x = f^{-1}(y)$ เห็นได้ว่า $f^{-1\,\prime}(f(x))$ ก็คือ $\dfrac{dx}{dy}$

ดังนั้นสูตรในทฤษฎีบททั้งสองก็คือ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ *สูตรนี้เป็นสูตรที่จำไว้ใช้ได้ง่าย*

ตัวอย่าง 11.3.1 ให้ $f(x) = x^2$ โดยที่ $x \geq 0$ จงแสดงการพิจารณาหาอนุพันธ์ของ f^{-1}

วิธีทำ ในที่นี้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มที่มีความต่อเนื่องและมี $f'(x) \neq 0$ ใน $(0,+\infty)$ จึงใช้ทฤษฎีบท 11.3.1 ได้ เขียน $y = x^2$ แล้วใช้สูตร จะได้ว่า $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ ■

ตัวอย่าง 11.3.2

1. ให้ $f(x) = x^2$ โดยที่ $x \leq 0$ จงแสดงการพิจารณาหาอนุพันธ์ของ f^{-1}
2. ให้ $f(x) = x^3$ โดยที่ $-\infty < x < +\infty$ จงพิจารณาว่า f^{-1} ดิฟเฟอเรนซิเอตไม่ได้ที่จุดใดบ้าง จงหาอนุพันธ์ของ f^{-1} ที่จุดซึ่ง f^{-1} ดิฟเฟอเรนซิเอตได้
3. จงใช้สูตรดิฟเฟอเรนซิเอตฟังก์ชันผกผันหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของ $\ln(x)$

แบบฝึกหัด 11.3

จงหา $(f^{-1})'(a)$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และจำนวนจริง a ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - \dfrac{4}{x}, \quad a = 6$

2. $f(x) = x^3 + 2x - 1, \quad a = 2$

3. $f(x) = 2x^5 + x^3 + 1, \quad a = -2$

4. $f(x) = \sqrt{x-4}, \quad a = 2$

5. $f(x) = 3 - 4x, \quad a = 1$

6. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad a = 1$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = \dfrac{1}{8}$

8. $f(x) = \ln(x^2+1), \quad a = 0$

11.4 การดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันตรีโกณผกผัน

ฟังก์ชันตรีโกณแต่ละฟังก์ชันล้วนไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ความสัมพันธ์ผกผันของมันจึงไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้าเราจำกัดโดเมนของแต่ละฟังก์ชันให้แคบลง เช่น

ถ้ากำหนดให้
$$f(x) = \sin(x), \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

เราจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ยิ่งกว่านั้น f ยังเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไขของทฤษฎีบท 11.3.1 อีกด้วย ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของ f จึงดิฟเฟอเรนชิเอตได้ และใช้สูตรหาอนุพันธ์ที่ให้ไว้ได้

สำหรับฟังก์ชันตรีโกณอื่นๆก็เช่นกัน เราอาจกำหนดโดเมนให้แคบลงให้ใช้ทฤษฎีบท 11.3.1 ได้ หรือไม่ก็ใช้ทฤษฎีบท 11.3.2 ได้ ฟังก์ชันตรีโกณผกผันจึงหมายถึง ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณที่ถูกจำกัดโดเมนให้แคบลงดังที่กล่าวมาแล้ว เราต้องเข้าใจและระลึกไว้ว่า f^{-1} ไม่ใช่ $\sin^{-1}$ เพราะ $\sin^{-1}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน เราจึงไม่ใช้สัญลักษณ์ $\sin^{-1}$ เขียนเพื่อแสดงถึง f^{-1} สัญลักษณ์ที่เราจะใช้คือ **arcsin**

ดังนั้น ถ้า $\sin(\theta) = x$ เราย่อมได้ว่า $\arcsin(x) = \theta$ โดยที่ในที่นี้ละไว้เป็นที่เข้ากันว่า $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

หมายเหตุ อันที่จริงการจำกัดโดเมนของ sine ให้ได้ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งนั้น มีช่วงอื่นๆที่ใช้ได้อีกมากมาย แต่ใช่ว่าต่างคนจะกำหนดเอาเองตามชอบ เพื่อให้ทฤษฎีใช้ได้ร่วมกันเป็นสากล นักคณิตศาสตร์กำหนดความหมายของฟังก์ชันตรีโกณผกผันไว้ดังนี้

(1) $\arcsin(x) = \theta$ หมายความว่า $\sin(\theta) = x$ โดยที่ $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\arccos(x) = \theta$ หมายความว่า $\cos(\theta) = x$ โดยที่ $0 \le \theta \le \pi$

(3) $\arctan(x) = \theta$ หมายความว่า $\tan(\theta) = x$ โดยที่ $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

(4) $\operatorname{arcctn}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$

(5) $\operatorname{arcsec}(x) = \arccos(1/x), \quad |x| \ge 1$

(6) $\operatorname{arccsc}(x) = \arcsin(1/x), \quad |x| \ge 1$

การดิฟเฟอเรนชิเอต arcsine ทำได้ดังนี้

$$\theta = \arcsin(x)$$
$$x = \sin(\theta)$$
$$\frac{dx}{d\theta} = \cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$$

ใช้สูตร ได้ $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

นั่นคือ ได้ว่า

(1) $\dfrac{d}{dx}\arcsin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$

สูตรดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันตรีโกณผกผันอื่นๆได้แก่

(2) $\dfrac{d}{dx}\arccos(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$

(3) $\dfrac{d}{dx}\arctan(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(4) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcctn}(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

(5) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$

$$(6) \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccsc}(x) = \frac{-1}{|\,x\,|\sqrt{x^2-1}}, \quad |\,x\,| > 1$$

จะละการหาสูตรเหล่านี้ไว้เป็นแบบฝึกหัด

อนึ่งเมื่อใช้กฎลูกโซ่ประกอบกับสูตรเหล่านี้เราจะได้สูตรที่ทั่วไปกว่า เช่น

$$\frac{d}{dx}\arctan(v) = \frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{dx}$$

ตัวอย่าง 11.4.1 สำหรับแต่ละฟังก์ชัน f ต่อไปนี้ให้ถือว่าโดเมนของ f ประกอบด้วย x ทั้งหลายที่สูตรที่กำหนดให้มีความหมาย ในแต่ละข้อจงหา $f'(x)$

1. $f(x) = \arcsin(2x)$
2. $f(x) = \arccos(x^2)$
3. $f(x) = \arctan(\tan^2(x))$
4. $f(x) = \sqrt{x} - \arctan(\sqrt{x})$
5. $f(x) = \arccos(1/x)$
6. $f(x) = \arcsin(\sin(x) - \cos(x))$
7. $f(x) = \ln(\arccos(1/\sqrt{x}))$

แบบฝึกหัด 11.4

แต่ละฟังก์ชัน f ต่อไปนี้ให้ถือว่าโดเมนของ f ประกอบด้วย x ทั้งหลายที่สูตรกำหนดให้มีความหมาย ในแต่ละข้อจงหา $f'(x)$

1. $f(x) = e^{2\arccos(\frac{x}{2})}$

2. $f(x) = \operatorname{arc\,csc}(\ln x) - \ln x$

3. $f(x) = \cos(\arcsin^2 x)$

4. $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$

5. $f(x) = \arcsin^2 x + \arccos^2 x$

6. $f(x) = \operatorname{arc\,cot}(\frac{2}{x}) + \arctan(\frac{x}{2})$

7. $f(x) = \tan^2(\arccos\sqrt{x} + \ln(x))$

8. $f(x) = (\cos\sqrt{x})(\arccos\sqrt{x})$

9. $f(x) = \arctan(e^x)$

10. $f(x) = 3^{\arcsin(x^2)}$

11. $f(x) = \arccos(x^2)$

12. $f(x) = e^{-x}\operatorname{arc\,sec}(e^{-x})$

13. $f(x) = \operatorname{arc\,csc}(x^2+1)$

14. $f(x) = \sin(x^{\arccos x})$

15. $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$

16. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arc\,sec}(x)}$

17. $f(x) = \ln(\arccos(x^2 + 1))$

18. $f(x) = \arccos(\ln(x^2 + 1))$

19. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,cot}(x^2)\sin(\sqrt{x})}{e^{x+1}\cos(2x)}$

20. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,csc}(2x)\cos(x^2)}{3^{x^2}\arctan(x+1)}$

11.5 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณ

จากสูตรดิฟเฟอเรนชิเอตฟังก์ชันตรีโกณที่รวบรวมไว้ข้างต้น เราได้สูตรดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้ ตามลำดับ

1) $d\sin(v) = \cos(v)dv$

2) $d\cos(v) = -\sin(v)dv$

3) $d\tan(v) = \sec^2(v)dv$

4) $d\csc(v) = -\csc(v)\mathrm{ctn}(v)dv$

5) $d\sec(v) = \sec(v)\tan(v)dv$

6) $d\,\mathrm{ctn}(v) = -\csc^2(v)dv$

และจากสูตรดิฟเฟอเรนเชียลเหล่านี้ เราได้สูตรอินทิเกรตต่อไปนี้

1) $\int \cos(v)\,dv = \sin(v) + C$

2) $\int \sin(v)\,dv = -\cos(v) + C$

3) $\int \sec^2(v)dv = \tan(v) + C$

4) $\int \csc(v)\mathrm{ctn}(v)dv = -\csc(v) + C$

5) $\int \sec(v)\tan(v)dv = \sec(v) + C$

6) $\int \csc^2(v)dv = -\mathrm{ctn}(v) + C$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างแสดงการใช้สูตร และจะให้โจทย์แบบฝึกหัดที่ใกล้เคียงคู่กันไป

ตัวอย่าง 11.5.1 จงอินทิเกรต $\int \sin(2x)\,dx$

วิธีทำ ให้ $v = 2x$

$$\int \sin(2x)\,dx = \int \sin(v)\frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}(-\cos(v) + C) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C'$$

■

ตัวอย่าง 11.5.2 จงอินทิเกรต

$1.\int \cos(3x+1)\,dx \qquad 2.\int \sin(\frac{\pi}{6}-2x)\,dx$

$3.\int \sec^2(\pi x)\,dx \qquad 4.\int \csc(\pi x)\text{ctn}(\pi x)\,dx$

ตัวอย่าง 11.5.3 จงอินทิเกรต $\int \cos(4\theta)\sin(2\theta)\,d\theta$

แนวคิด

เนื่องจากเราเขียนผลคูณ $\sin(A)\cos(B)$ ได้เป็น $\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$

ดังนั้น $\sin(2\theta)\cos(4\theta) = \frac{1}{2}(\sin(6\theta)-\sin(2\theta))$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sin(2\theta)\cos(4\theta)d\theta &= \int \frac{1}{2}(\sin(6\theta)-\sin(2\,\theta))d\theta \\ &= \int \frac{1}{2}(\sin(6\theta)d\theta - \int \frac{1}{2}\sin(2\theta))d\theta \\ &= ? \qquad \text{(ให้นิสิตทำต่อ)}\end{aligned}$$ ■

ตัวอย่าง 11.5.4 จงอินทิเกรต

$1.\ \int \sin(5x)\cos(x)\,dx \qquad 2.\int \cos(3x)\cos(x)\,dx$

$3.\ \int \sin(x)\sin(3x)\,dx$

แนวคิดที่ใช้ในการอินทิเกรตในตัวอย่าง 11.5.3 นั้น สามารถใช้กับการอินทิเกรตที่มี sine หรือ cosine เป็นแฟคเตอร์อยู่หลายแฟคเตอร์ก็ได้ เช่น

ตัวอย่าง 11.5.5 จงอินทิเกรต $\int \sin(x)\cos(2x)\sin(3x)\,dx$

ตัวอย่าง 11.5.6 จงอินทิเกรต $\int \sin^3(\theta)\cos(\theta)d\theta$

แนวคิด

เนื่องจาก $\cos(\theta)d\theta = d\sin(\theta)$ จึงได้ว่า $\int \sin^3(\theta)\cos(\theta)d\theta = \int \sin^3(\theta)\ d\sin(\theta) = \int u^3\,du$

วิธีทำ ให้ $u = \sin(\theta)$ ดังนั้น $du = \cos(\theta)d\theta$

ดังนั้น $\int \sin^3(\theta)\cos(\theta)d\theta = \int u^3du = \frac{u^4}{4}+C = \frac{1}{4}\sin^4(\theta)+C$ ■

ตัวอย่าง 11.5.7 จงอินทิเกรต

1. $\int \sin^5(x)\cos(x)\,dx$ 2. $\int \cos^4(x)\sin(x)\,dx$
3. $\int \tan^3(x)\sec^2(x)\,dx$ 4. $\int \tan(x)\sec^6(x)\,dx$

ตัวอย่าง 11.5.8 จงอินทิเกรต $\int \cos^3(\theta)\sin^5(\theta)\,d\theta$

แนวคิด

เนื่องจาก $\cos(\theta)d\theta = d\sin(\theta)$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \cos^3(\theta)\sin^5(\theta)d\theta &= \int \cos^2(\theta)\sin^5(\theta)\cos(\theta)\,d\theta\\ &= \int (1-\sin^2(\theta))\sin^5(\theta)\cos(\theta)d\theta\\ &= \int (1-\sin^2(\theta))\sin^5(\theta)\ d\sin(\theta)\end{aligned}$$

วิธีทำ ให้ $u = \sin(\theta)$

$$\begin{aligned}\int \cos^3(\theta)\sin^5(\theta)d\theta = \int \cos^2(\theta)\sin^5(\theta)\cos(\theta)d\theta &= \int (1-\sin^2(\theta))\sin^5(\theta)\,d\sin(\theta)\\ &= \int (1-u^2)u^5\,du \ = ?\ \text{(ให้นิสิตทำต่อ)}\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างและโจทย์แบบฝึกหัดต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วเป็นตัวอย่างของการอินทิเกรตในรูป

$$\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx$$

$$\int \sec^m(x)\tan^n(x)\,dx$$

$$\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx$$

อภิปรายในชั้นเรียนว่าวิธีการที่ใช้ในตัวอย่างใช้ได้กับการอินทิเกรตเหล่านี้เพียงบางส่วน มีกรณีที่ใช้วิธีการในตัวอย่างไม่ได้ !

สำหรับ $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\,dx$ ในกรณีที่ ทั้ง m และ n เป็นเลขคู่ เราใช้เอกลักษณ์

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

ดังในตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่าง 11.5.9 จงอินทิเกรต $\int \sin^2(\theta)\,d\theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sin^2(\theta)\,d\theta &= \int \left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right\} d\theta = \int \frac{1}{2}\,d\theta - \int \frac{1}{2}\cos(2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin(2\theta)+C\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 11.5.10 จงอินทิเกรต $\int \sec(\theta)\,d\theta$

แนวคิด

วิธีนี้อาศัยกลเม็ดเล็กน้อย สังเกตว่า

$$\begin{aligned}\sec(\theta)\,d\theta &= \sec(\theta)\frac{\sec(\theta)}{\sec(\theta)}\,d\theta = \frac{d\tan(\theta)}{\sec(\theta)}\\ \sec(\theta)\,d\theta &= \sec(\theta)\frac{\tan(\theta)}{\tan(\theta)}\,d\theta = \frac{d\sec(\theta)}{\tan(\theta)}\end{aligned}$$

จึงเห็นได้ว่า

$$\begin{aligned}\sec(\theta)\,d\theta &= \sec(\theta)\frac{(\sec(\theta)+\tan(\theta))}{(\sec(\theta)+\tan(\theta))}\,d\theta\\ &= \frac{\left(\sec^2(\theta)+\sec(\theta)\tan(\theta)\right)d\theta}{(\sec(\theta)+\tan(\theta))} = \frac{d\left(\tan(\theta)+\sec(\theta)\right)}{(\sec(\theta)+\tan(\theta))}\end{aligned}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \sec(\theta)\,d\theta &= \int \sec(\theta)\frac{(\sec(\theta)+\tan(\theta))}{(\sec(\theta)+\tan(\theta))}\,d\theta\\ &= \int \frac{d\left(\tan(\theta)+\sec(\theta)\right)}{(\sec(\theta)+\tan(\theta))}\\ &= \ln\left|\sec(\theta)+\tan(\theta)\right|+C\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 11.5.11 จงอินทิเกรต $\int \sec^3(\theta)\,d\theta$

แนวคิด

ใช้การอินทิเกรตทีละส่วน โดยให้ $dv = \sec^2(\theta)\,d\theta$ *ต้องมีการพลิกแพลงเล็กน้อย* ■

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันตรีโกณ เช่น

$$\int \frac{\sin(\theta)\,d\theta}{3\sin(\theta)+4\cos(\theta)}$$

เราทำได้โดยการแทนค่า $u = \tan(\frac{\theta}{2})$

ในการแทนค่านี้ จะได้ว่า

$$\sin(\theta) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$d\theta = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

ตัวอย่าง 11.5.12 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{\sin(\theta)\,d\theta}{3\sin(\theta)+4\cos(\theta)}$

วิธีทำ ให้ $u = \tan(\frac{\theta}{2})$ จะได้ว่า

$$\sin(\theta) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos(\theta) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad d\theta = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

เมื่อแทนค่าลงไปและจัดพจน์ จะได้

$$\int \frac{\sin(\theta)\,d\theta}{3\sin(\theta)+4\cos(\theta)} = -2\int \frac{u\,du}{(2u+1)(u-2)(1-u)(1+u)}$$

ซึ่งทำ (เป็นแบบฝึกหัด) ได้โดยการแยกเศษส่วนย่อย ■

ตัวอย่าง 11.5.13 จงอินทิเกรต $\int \sec(\theta)\,d\theta$ โดยการแทนค่าด้วย $u = \tan(\frac{\theta}{2})$

วิธีทำ $\displaystyle\int \sec(\theta)\,d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos(\theta)} = \int \frac{2du}{(1-u)(1+u)} = \ln\frac{|1+u|}{|1-u|} + C$

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{(1+u)^2}{1-u^2} = \frac{1+u^2}{1-u^2} + \frac{2u}{1-u^2} = \sec(\theta) + \tan(\theta)$$ ■

แบบฝึกหัด 11.5

จงหาค่าของการอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int e^x \sin^4(e^x)\cos^2(e^x)dx$

2. $\int (\sin 6x)(\cos 4x)dx$

3. $\int \sin^2(x)\cos^3(x)dx$

4. $\int \sin^3(x)\cos^3(x)dx$

5. $\int (2\sin x + 3\cos x)dx$

6. $\int (\tan^2 x + 1)dx$

7. $\int \sec^3(x)\tan^2(x)dx$

8. $\int e^x \cos^5(5+e^x)dx$

9. $\int (1 - \cos ec(x)\cot(x))dx$

10. $\int (x^2 - \sin x)dx$

11. $\int (2\sin x - 5e^x)dx$

12. $\int (x^2 + \sec x^2)dx$

13. $\int (\sec^2 x - \sin x)dx$

14. $\int (\cos x + 3^x)dx$

15. $\int e^{2x}\sin(3e^{2x})\cos(e^{2x})dx$

16. $\int \sin(2x)\sin(x)\cos(x)dx$

17. $\int \sec x(\tan x - 2\sec x)dx$

18. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

19. $\int (\frac{4}{x} + \sec^2 x)dx$

20. $\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}dx$

11.6 การอินทิเกรตโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณ

ในหัวข้อนี้เราจะอินทิเกรตฟังก์ชันต่างๆ โดยการใช้วิธีการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณ เช่นถ้าฟังก์ชันที่เราจะอินทิเกรตมีแฟคเตอร์ $\sqrt{a^2 - v^2}$ ซึ่งติดรากที่สองอยู่ เราก็อาจใช้การแทนค่า $v = a\sin(\theta)$ ซึ่งจะทำให้แฟคเตอร์ดังกล่าวไม่ติดรากที่สอง

ตัวอย่าง 11.6.1 จงอินทิเกรต $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}$ $(a > 0)$

วิธีทำ ให้ $v = a\sin(\theta)$ ดังนั้นเราได้ว่า

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \int \frac{a\cos(\theta)\ d\theta}{a\cos(\theta)} = \int d\theta = \theta + C$$

แต่เนื่องจาก $\sin(\theta) = \dfrac{v}{a}$ จึงได้ว่า $\theta = \arcsin\left(\dfrac{v}{a}\right)$

จึงได้คำตอบว่า $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin\left(\frac{v}{a}\right) + C$ ■

หมายเหตุ

เนื่องจากในที่นี้เราใช้ฟังก์ชัน arcsin การแทนค่า $v = \sin(\theta)$ นั้นจึงถือได้ว่า $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ จึงได้ $\cos(\theta) > 0$ ผลลัพธ์ที่ว่า $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin\left(\frac{v}{a}\right) + C$ ถือเป็นสูตรอินทิเกรตสูตรหนึ่ง จะจำไว้ใช้ก็ได้ หรือจะอินทิเกรตโดยการแทนค่าดังแสดงไว้ในตัวอย่างก็ได้ อย่างไรก็ตาม การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณเป็นวิธีที่ใช้ได้กว้างขวางกว่า จึงต้องเรียนรู้ไว้ หัวข้อจะแสดงตัวอย่างการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณต่างๆ

ตัวอย่าง 11.6.2 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{dv}{a^2 + v^2}$ $(a > 0)$

วิธีทำ ให้ $v = a\tan(\theta)$ ดังนั้นเราได้ว่า

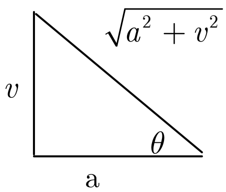
$$\int \frac{dv}{a^2 + v^2} = \int \frac{a\ \sec^2(\theta)\ d\theta}{a^2 + a^2\tan^2(\theta)} = \int \frac{a\ \sec^2(\theta)\ d\theta}{a^2 \sec^2(\theta)}$$
$$= \int \frac{1}{a}\ d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{v}{a}\right) + C$$

ผลลัพธ์นี้เป็นสูตรหนึ่งที่ควรจำไว้ใช้ (เคยใช้มาแล้ว!) ■

ตัวอย่าง 11.6.3 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 + v^2}}$ $(a > 0)$

วิธีทำ ให้ $v = a\tan(\theta)$

ดังนั้นเราได้ว่า



$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} = \int \frac{a\ \sec^2(\theta)\ d\theta}{a\sec(\theta)} = \int \sec(\theta)\, d\theta$$
$$= \ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + v^2}}{a} + \frac{v}{a}\right| + C$$
$$= \ln\left|\sqrt{a^2 + v^2} + v\right| - \ln(a) + C \quad ■$$
$$= \ln\left|\sqrt{a^2 + v^2} + v\right| + C'$$

ตัวอย่าง 11.6.4 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - a^2}} \quad (a > 0)$

วิธีทำ ให้ $v = a\sec(\theta)$

ดังนั้นเราได้ว่า

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta}{a\,|\tan(\theta)|} = \ldots$$

(อภิปรายวิธีจัดการกับค่าสัมบูรณ์ ในชั้นเรียน) ■

ตัวอย่าง 11.6.5 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2 + 6x + 13}$

วิธีทำ สังเกตว่า $x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 2^2$ จึงควรกำหนดการแทนค่า $x + 3 = 2\tan(\theta)$

(แสดงวิธีทำในชั้นเรียน ถึงคำตอบ และแสดงการตรวจสอบคำตอบ) ■

ตัวอย่าง 11.6.6 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$

วิธีทำ สังเกตว่า $5 + 4x - x^2 = 3^2 - (x-2)^2$ จึงควรกำหนดการแทนค่า $x - 2 = 3\sin(\theta)$

(ร่วมกันทำในชั้นเรียน แล้วตรวจสอบคำตอบ) ■

ตัวอย่าง 11.6.7 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{(x+2)\ dx}{\sqrt{x^2 + 10x - 75}}$

วิธีทำ สังเกตว่า $x^2 + 10x - 75 = (x+5)^2 - 10^2$ จึงควรกำหนดการแทนค่า $x + 5 = 10\sec(\theta)$

(ร่วมกันทำในชั้นเรียน แล้วตรวจสอบคำตอบ) ■

ตัวอย่าง 11.6.8 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 + 4}}$

วิธีทำ สังเกตว่า $9x^2 + 4 = (3x)^2 + 2^2$ จึงควรกำหนดการแทนค่า $3x = 2\tan(\theta)$

(ร่วมกันทำในชั้นเรียน แล้วตรวจสอบคำตอบ) ■

ตัวอย่าง 11.6.9 จงอินทิเกรต

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 25}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$
3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 + 6x + 25}$
4. $\displaystyle\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{5 + 2x + x^2}}$
5. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x}}$

แบบฝึกหัด 11.6

จงหาค่าของการอินทิเกรตดังต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
2. $\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}dx$
3. $\int \frac{1}{4x\sqrt{x^2-4}}dx$
4. $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{25+e^{2x}}}$
6. $\int (\frac{1}{25+4x^2})dx$
7. $\int \frac{dx}{2+9x^2}$
8. $\int \frac{x}{x^4+16}dx$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$
10. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$
11. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}dx$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}dx$
13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$

11.7 เทคนิคการอินทิเกรตอื่น ๆ

การอินทิเกรตที่ทำมาในหัวข้อต่าง ๆ ก่อนหน้านี้ อันที่จริงเป็นการหาปฏิยานุพันธ์ นิสิตได้เห็นประโยชน์มาบ้างแล้ว อาจจำแนกประโยชน์ได้เป็นสองประเภท ดังนี้

1. ใช้คำนวณอินทิกรัลจำกัดเขต เช่นใช้ในการคำณวณ พื้นที่ ปริมาตร งาน โมเมนต์
2. ใช้หาผลเฉลยของสมการดิฟเฟอเรนเชียล ซึ่งใช้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ

การอินทิเกรตให้ได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นสูตรนั้นใช่ว่าจะทำได้เสมอไป ขึ้นอยู่กับว่าเรามีฟังก์ชันใดไว้ใช้บ้าง เช่น ถ้าเรายังไม่มีฟังก์ชัน ln เราก็ยังทำอินทิเกรต

$$\int \frac{dx}{x}$$

ไม่ได้ เป็นต้น

เมื่อพบกับฟังก์ชันที่อินทิเกรตออกมาเป็นสูตรไม่ได้ เราก็ใช้วิธีเชิงตัวเลข (numerical method) เช่น การใช้เกณฑ์ของซิมป์สัน การอินทิเกรตนั้นบางกรณีเราต้องใช้เทคนิคต่าง ๆ หลายแบบประกอบกัน ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างโจทย์ระคน *(ร่วมทำกันในชั้นเรียน)*

ตัวอย่าง 11.7.1 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

วิธีทำ เขียนใหม่ได้เป็น $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$ แล้วใช้การแทนค่า $u = e^x$

ตอบ $\arctan(e^x) + C$ ■

ตัวอย่าง 11.7.2 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^x + e^{-x}}$

วิธีทำ ใช้การแทนค่า $u = e^x$

ตอบ $\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$ ■

ตัวอย่าง 11.7.3 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int e^x \sin(2x)\,dx$

วิธีทำ ลองใช้การอินทิเกรตทีละส่วน

$$dv = e^x dx \;? \qquad dv = \sin(2x)\,dx \;?$$

ตอบ $\dfrac{1}{5}\big(e^x\sin(2x) - 2e^x\cos(2x)\big) + C$ ■

ตัวอย่าง 11.7.4 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int x\cos(3x)\,dx$

วิธีทำ ใช้การอินทิเกรตทีละส่วน $dv = \cos(3x)\,dx$

ตอบ $\dfrac{1}{3}x\sin(3x) + \dfrac{1}{9}\cos(3x) + C$ ■

ตัวอย่าง 11.7.5 จงอินทิเกรต $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx$

วิธีทำ ใช้การอินทิเกรตทีละส่วน $dv = dx$

ตอบ $x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$ ■

ตัวอย่าง 11.7.6 จงอินทิเกรต

1. $\displaystyle\int \arctan(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int x\arcsin(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-e^{-2x}}}$
6. $\displaystyle\int \frac{3dx}{\sqrt{9-x^2}}$
7. $\displaystyle\int x^2\sin(3x)\,dx$
8. $\displaystyle\int x^2e^{-x}\sin(3x)\,dx$

แบบฝึกหัด 11.7

จงอินทิเกรต

1. $\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

2. $\int x\arcsin x dx$

3. $\int \frac{(1-\cos x)^{\frac{3}{5}}}{(1+\cos x)^{\frac{8}{5}}}dx$

4. $\int \frac{\cos^5 x\sin^3 x}{1+\cos 2x}dx$

5. $\int \sin(\arctan x)dx$

6. $\int \frac{x\ln x}{4-12x^2+9x^4}dx$

7. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$

8. $\int \arctan(1+\sqrt{x})dx$

9. $\int x\ln(1+x^3)dx$

10. $\int \frac{xe^{2x}}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx$

11. $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$

12. $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

13. $\int \frac{\arccos x}{x^3}dx$

14. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$

15. $\int x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

16. $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$

17. $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^2}dx$

18. $\int \frac{\cos ec^3 \frac{x}{2}}{\cot\frac{x}{2}}dx$

19. $\int \frac{1}{(3+5\cos x)(2+\sin x)}dx$

20. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2x\cos 2x dx$