# บทที่ 12
# อินทิกรัลไม่ตรงแบบ

ในเรื่องอินทิกรัลที่นิสิตได้ศึกษามาแล้วนั้น ฟังก์ชันที่เรานำมาอินทิเกรตต้องมีขอบเขต ช่วงของการอินทิเกรตก็ต้องเป็นช่วงที่มีขอบเขต แต่ในการประยุกต์ใช้อินทิกรัลในบางกรณี เราต้องทำบนช่วงที่ไม่มีขอบเขต หรือต้องทำกับฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขต หรือทั้งสองอย่าง เรารวมเรียกอินทิกรัลในกรณีดังกล่าวนั้นว่าเป็น **อินทิกรัลไม่ตรงแบบ** (improper integrals)

## 12.1 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง

**บทนิยาม 12.1.1**

1. ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุม ช่วง $[a,+\infty)$ และถ้า $f$ อินทิเกรตได้บนทุกๆช่วง $[a,b]$ ที่ $b>a$ เรานิยามอินทิกรัลของ $f$ บน $[a,+\infty)$ ว่าคือ
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
และเรากล่าวว่า**อินทิกรัลลู่เข้า**(converge)ถ้าลิมิตมีค่าจำกัด มิเช่นนั้นเรากล่าวว่า**อินทิกรัลลู่ออก**(diverge)

2. ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุม ช่วง $(-\infty,b]$ และถ้า $f$ อินทิเกรตได้บนทุกๆช่วง $[a,b]$ ที่ $a<b$ เรานิยามอินทิกรัลของ $f$ บน $(-\infty,b]$ ว่าคือ
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
และเรากล่าวว่า**อินทิกรัลลู่เข้า**(converge)ถ้าลิมิตมีค่าจำกัด มิเช่นนั้นเรากล่าวว่า**อินทิกรัลลู่ออก**(diverge)

3. ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมช่วง $(-\infty,+\infty)$ และถ้าผลบวก $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ มีความหมาย เรานิยามอินทิกรัลของ $f$ บน $(-\infty,+\infty)$ ว่าคือ
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$
เรากล่าวว่า**อินทิกรัลทางซ้ายมือลู่เข้า**ก็ต่อเมื่ออินทิกรัลทั้งสองทางขวามือลู่เข้าเท่านั้น มิเช่นนั้นเรากล่าวว่า**อินทิกรัลนั้นลู่ออก**

**ตัวอย่าง 12.1.1** จงหาค่าของ $\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$ และพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} e^{-2x}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-2x}}{-2}\Bigg|_{x=0}^{x=b} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-2b}}{-2}-\frac{e^{0}}{-2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2e^{2b}}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$ ลู่เข้า ■

**ตัวอย่าง 12.1.2** จงหาค่าของ $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ และพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

ให้ $u = x^2$ , $dv = e^{-x}dx$ จะได้ว่า $du = 2xdx$ , $v = -e^{-x}$

ดังนั้น $\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \int e^{-x}2xdx$

พิจารณา $\int e^{-x}2xdx$ โดยอินทิเกรตทีละส่วน ( $u = x , dv = e^{-x}dx$ จะได้ว่า $du = dx , v = -e^{-x}$ )

ฉะนั้น $2\int e^{-x}xdx = 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right] = 2\left[-xe^{-x} + e^{-x}\right] + c$

ดังนั้น $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b} x^2e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{-x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=b} = 2$ ลู่เข้า ■

**ตัวอย่าง 12.1.3** จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ และพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

เนื่องจาก $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{o}\frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

$$\int\limits_{-\infty}^{o}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\arctan(x)\Big|_{x=a}^{x=o} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_{0}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to+\infty}\arctan(x)\Big|_{x=a}^{x=o} = \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$ ลู่เข้า ■

**ตัวอย่าง 12.1.4** จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ และพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

เนื่องจาก $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} \tag{12.1}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\int_{a}^{\infty} \frac{2xdx}{1+x^2} \quad (\text{ให้ } u = 1+x^2 \text{ จะได้ } du = 2xdx\,)$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{x=a}^{x=0} = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\ln(1+0) - \frac{1}{2}\ln\left(1+a^2\right) = -\infty$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{1+x^2}$ ลู่ออก และ จาก (12.1) ได้ว่า $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$ ลู่ออก ■

**ตัวอย่าง 12.1.5** ให้ $p$ เป็นจำนวนบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ ลู่เข้าเมื่อ } p > 1 \text{ และลู่ออกเมื่อ } p \le 1$$

**แนวคิด**

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_{x=1}^{x=b} & , p \ne 1 \\ \lim\limits_{b\to\infty} \ln|x|\Big|_{x=1}^{x=b} & , p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{b^{-p+1}}{-p+1} - \dfrac{1}{-p+1} & , p \ne 1 \\ \lim\limits_{b\to\infty} \ln|b| - 0 & , p = 1 \end{cases}$$

ถ้า $p < 1$ อินทิกรัลลู่เข้า ถ้า $p \ge 1$ อินทิกรัลลู่ออก ■

อินทิกรัลไม่ตรงแบบที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นกรณีที่ฟังก์ชันที่เรานำมาอินทิเกรตต้องมีขอบเขต แต่ช่วงของการอินทิเกรตไม่มีขอบเขต เราเรียกอินทิกรัลไม่ตรงแบบในกรณีเช่นนี้ว่า **อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง** (improper integral of the first kind)

ลำดับต่อไปจะกล่าวถึง **อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่สอง** (improper integral of the second kind) ซึ่งเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบในกรณีที่ช่วงของการอินทิเกรตมีขอบเขต แต่ฟังก์ชันไม่มีขอบเขต

## แบบฝึกหัด 12.1

จงพิจารณาว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาค่าของอินทิกรัล

**1.** $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

**2.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x\,dx$

**3.** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

**4.** $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

**5.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+2^x}dx$

**6.** $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$

**7.** $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$

**8.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

**9.** $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

**10.** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$

**11.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx$

**12.** $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+e^{\sqrt{x}})^2}\,dx$

**13.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{3-2x}\,dx$

**14.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{3x}dx$

**15.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

**16.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-x)^{\frac{5}{2}}}\,dx$

**17.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{3-2e^x}\,dx$

**18.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-8)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

**19.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2x^2+2x+1}dx$

**20.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x+1|}{x^2+1}\,dx$

**21.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

**22.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$

**23.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

**24.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

## 12.2 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

**บทนิยาม 12.2.1**

1. ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุม ช่วง $(a,b]$ และถ้า $f$ อินทิเกรตได้บนทุกๆช่วง $[c,b]$ ที่ $a<c<b$ เรานิยามอินทิกรัลของ $f$ บน $(a,b]$ ว่าคือ
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$
และเรากล่าวว่า**อินทิกรัลลู่เข้า**(converge)ถ้าลิมิตมีค่าจำกัด มิเช่นนั้นเรากล่าวว่า**อินทิกรัลลู่ออก**(diverge)

2. ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุม ช่วง $[a,b)$และถ้า $f$ อินทิเกรตได้บนทุกๆช่วง $[a,c]$ ที่ $a<c<b$ เรานิยามอินทิกรัลของ $f$ บน $[a,b)$ ว่าคือ
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$
และเรากล่าวว่า**อินทิกรัลลู่เข้า**(converge)ถ้าลิมิตมีค่าจำกัด มิเช่นนั้นเรากล่าวว่า**อินทิกรัลลู่ออก**(diverge)

3. ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนครอบคลุมช่วง $[a,c)$ กับ $(c,b]$ และถ้าผลบวก
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
มีความหมาย เรานิยามอินทิกรัลของ $f$ บน $[a,b]$ ว่าคือ
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
เรากล่าวว่า**อินทิกรัลทางซ้ายมือลู่เข้า**ก็ต่อเมื่ออินทิกรัลทั้งสองทางขวามือลู่เข้าเท่านั้น มิเช่นนั้นเรากล่าวว่า**อินทิกรัลนั้นลู่ออก**

**ตัวอย่าง 12.2.1** จงหาค่าของ $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ และจงพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือ ลู่ออก

**วิธีทำ** ให้ $u = x^2-1$ จะได้ $du = 2xdx$

$$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to 1^+}\frac{1}{2}\int_b^2 \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$= \lim_{b\to 1^+}\frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(2)\Big|_{x=b}^{x=2} = \lim_{b\to 1^+}\left[\sqrt{3}-\sqrt{b^2-1}\right] = \sqrt{3}$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{3} \text{ ลู่เข้า}$$

■

**ตัวอย่าง 12.2.2** จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ และจงพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือ ลู่ออก

**วิธีทำ**

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1^-}\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{x=0}^{x=b} = \lim_{b\to 1^-}\left[-\sqrt{1-b^2}-(-1)\right] = 1 \text{ ลู่เข้า}$$ ■

**ตัวอย่าง 12.2.3** จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ และจงพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือ ลู่ออก

**วิธีทำ** เนื่องจาก $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_{-1}^0 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to -1^+}\int_b^0 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to -1^+}\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{x=0}^{x=b}$$

$$= \lim_{b\to 1^-}\left[-\sqrt{1-b^2}-(-1)\right] = 1$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1^-}\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{x=0}^{x=b}$$

$$= \lim_{b\to 1^-}\left[-\sqrt{1-b^2}-(-1)\right] = 1$$

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1+1 = 2 \text{ ลู่เข้า}$$ ■

**ตัวอย่าง 12.2.4** จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ และจงพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือ ลู่ออก

**วิธีทำ** $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0^-}\int_{-1}^c \frac{dx}{x^2} + \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0^-} -\frac{1}{x}\Big|_{x=-1}^{x=c} + \lim_{c\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_{x=c}^{x=1}$$

$$= \lim_{c\to 0^-}\left(-\frac{1}{c}-1\right) + \lim_{c\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{c}\right) = \infty + \infty \text{ ลู่ออก}$$ ■

## แบบฝึกหัด 12.2

จงพิจารณาว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาค่าของอินทิกรัล

**1.** $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

**2.** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**3.** $\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$

**4.** $\int_0^4 \frac{1}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

**5.** $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

**6.** $\int_0^1 x\ln x\,dx$

**7.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}}\,dx$

**8.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 x\,dx$

**9.** $\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx$

**10.** $\int_0^1 \ln x\,dx$

**11.** $\int_0^4 \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

**12.** $\int_e^\infty \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$

**13.** $\int_2^4 \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$

**14.** $\int_0^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$

**15.** $\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

**16.** $\int_{-2}^7 \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$

**17.** $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$

**18.** $\int_2^4 \frac{1}{(x-3)^7}\,dx$

**19.** $\int_0^3 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

**20.** $\int_1^3 \frac{x}{(x^2-4)^3}\,dx$

**21.** $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$

**22.** $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

**23.** $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

**24.** $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{1}{5}}}\,dx$

## 12.3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดผสม

อินทิกรัลไม่ตรงแบบนั้น นอกจากชนิดที่หนึ่งกับชนิดที่สองแล้ว ยังมีชนิดผสมด้วย ตัวอย่างเช่น

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}}$$

ในการอินทิเกรตอินทิกรัลนี้ เราต้องแบ่งเป็นสองช่วงเช่นแบ่งเป็น

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}}$$

**ตัวอย่าง 12.3.1** จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}}$ และจงพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือ ลู่ออก

**วิธีทำ**

เนื่องจาก $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}}$

พิจารณา $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,|1+x|}$

ให้ $u = \sqrt{x}$ จะได้ $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,|1+x|} = \int \frac{2du}{(1+u^2)} = 2\arctan u + c = 2\arctan\sqrt{x} + c$

จะได้ว่า

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} = \lim_{b\to 0^+}[2\arctan\sqrt{x}]\Big|_{x=b}^{x=1} = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} = \lim_{b\to \infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} = \lim_{b\to \infty}[2\arctan\sqrt{x}]\Big|_{x=1}^{x=b} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$\displaystyle\therefore \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2x^2+x^3}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ ลู่เข้า ■

**ตัวอย่าง 12.3.2** จงหาค่าของ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ และจงพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือ ลู่ออก

**วิธีทำ**

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x^2} + \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{a\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_{x=a}^{x=1} + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=b} = \lim_{a\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{a}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = \infty \quad \text{ลู่ออก}$$

■

**ตัวอย่าง 12.3.3** จงหาค่าของ $\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ และจงพิจารณาว่าอินทิกรัลลู่เข้าหรือ ลู่ออก

**วิธีทำ**

เนื่องจาก $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + \int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$

ให้ $u = x^2 - 1$ จะได้ $du = 2xdx$ ดังนั้น

$$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to 1^+} \frac{1}{2}\int_b^2 \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to 1^+} \frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(2)\Big|_{x=b}^{x=2} = \lim_{b\to 1^+}\left[\sqrt{3}-\sqrt{b^2-1}\right] = \sqrt{3}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to \infty} \frac{1}{2}\int_2^b \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to \infty} \frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(2)\Big|_{x=2}^{x=b} = \lim_{b\to \infty}\left[\sqrt{b^2-1}-\sqrt{3}\right] = \infty$$

ฉะนั้น $\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$ ลู่ออก

■

**ตัวอย่าง 12.3.4** จงแสดงการคำนวณค่าของ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+2x+x^2}$

**วิธีทำ**

เนื่องจาก $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+2x+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{2+2x+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{2+2x+x^2}$

พิจารณา $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{2+2x+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{2+2x+x^2}$

ให้ $x + 1 = \tan\theta \qquad dx = \sec^2\theta d\theta$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{2+2x+x^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan^2\theta+1} = \theta + c = \arctan(x+1) + c$

ฉะนั้น $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 \frac{dx}{2+2x+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \arctan(x+1)\Big|_{x=a}^{x=0} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

และ $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int\limits_0^a \frac{dx}{2+2x+x^2} = \lim_{a\to\infty} \arctan(x+1)\Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+2x+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{2+2x+x^2} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{2+2x+x^2} = \frac{5\pi}{4}$$ ■

**ตัวอย่าง 12.3.5** จงแสดงการคำนวณค่าของ $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

**วิธีทำ**

เนื่องจาก $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

พิจารณา $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x^2-2x+1\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

ให้ $x-1=\sin\theta$ จะได้ว่า $dx=\cos\theta d\theta$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \theta + c = \arcsin(x-1)+c$

จะได้ว่า $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{a\to0^+}\int\limits_a^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{a\to0^+} \arcsin(x-1)\Big|_{x=a}^{x=1} = \frac{\pi}{2}$

และ $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{a\to2^-}\int\limits_1^a \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{a\to2^-} \arcsin(x-1)\Big|_{x=1}^{x=a} = \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \pi$ ■

**ข้อสังเกต** ถ้า $f,g$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $0\le f(x)\le g(x)$ ทุกๆ $x$ เราจะได้ว่าอินทิกรัลของ $g$ มีค่ามากกว่าของ $f$ ดังนั้น

1) ถ้าอินทิกรัลของ $g$ ลู่เข้า อินทิกรัลของ $f$ ย่อมลู่เข้าด้วย

2) ถ้าอินทิกรัลของ $f$ ลู่ออก อินทิกรัลของ $g$ ย่อมลู่ออกด้วย

*เราอาจใช้ข้อสังเกตเหล่านี้ทดสอบการลู่ของอินทิกรัลไม่ตรงแบบโดยไม่ต้องคำนวณหาค่าอินทิกรัลนั้น*

**ตัวอย่าง 12.3.6** จงพิจารณาว่า $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^5+3}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

พิจารณา $0 \le \frac{1}{x^5+3} \le \frac{1}{x^5}$

เนื่องจาก $\int\limits_7^{\infty} \frac{1}{x^5}\,dx$ ลู่เข้า เพราะฉะนั้น $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^5+3}$ ลู่เข้า ■

**ตัวอย่าง 12.3.7** จงพิจารณาว่า $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+5}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

พิจารณา $0 \le \frac{1}{x^4+x^2+5} \le \frac{1}{x^4}$

เนื่องจาก $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$ ลู่เข้า เพราะฉะนั้น $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+5}$ ลู่เข้า ■

**ตัวอย่าง 12.3.8** จงพิจารณาว่า $\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

พิจารณา $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} \le \frac{x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}$

เนื่องจาก $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ลู่เข้า เพราะฉะนั้น $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ ลู่เข้า ■

**ตัวอย่าง 12.3.9** จงพิจารณาว่า $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

พิจารณา $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \le \frac{1}{\sqrt{x+x}} \le \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ (เนื่องจาก $x \ge 4 > 2$)

เนื่องจาก $\int\limits_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ลู่ออก เพราะฉะนั้น $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ ลู่ออก ■

**ตัวอย่าง 12.3.10** จงพิจารณาว่า $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

สังเกตว่า $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \int_1^{4} \frac{dx}{\sqrt{x+2}} + \int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ ลู่ออก (จาก ตัวอย่าง 12.3.9 ) เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ ลู่ออก ■

**ตัวอย่าง 12.3.11** จงพิจารณาว่า $\displaystyle\int_8^{\infty} \frac{dx}{x^5-8}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

เนื่องจาก $x \geq 8$ ดังนั้น $\dfrac{x^5}{2} - 8 \geq 0$

จะได้ว่า $\displaystyle\frac{1}{x^5-8} = \frac{1}{\frac{x^5}{2} + \left(\frac{x^5}{2} - 8\right)} \leq \frac{1}{\frac{x^5}{2}} = \frac{2}{x^5}$

เนื่องจาก $\displaystyle\int_8^{\infty} \frac{2\,dx}{x^5} = 2\int_8^{\infty} \frac{1}{x^5}dx$ ลู่เข้า เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_8^{\infty} \frac{dx}{x^5-8}$ ลู่เข้า ■

**ตัวอย่าง 12.3.12** จงพิจารณาว่า $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

**วิธีทำ**

เนื่องจาก $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{2} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}}$

พิจารณา $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}} = \lim_{a\to 1^+} \int_z^{2} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}}$

สังเกตว่า $\displaystyle\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

ดังนั้น $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{a\to 1^+} \int_a^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{a\to 1^+} 2\sqrt{x-1}\Big|_{x=a}^{x=2} = \lim_{a\to 1^+} 2 - 2\sqrt{a-1} = 2$

ต่อมาพิจารณา $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}}$

เนื่องจาก $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2-1}} \le \dfrac{1}{x\cdot\sqrt{\dfrac{x^2}{2}+\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)}} \le \dfrac{1}{x\sqrt{\dfrac{x^2}{2}}} \le \dfrac{\sqrt{2}}{x^2}$

และ $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{2}}{x^2}\,dx = \sqrt{2}\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}}$ ลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}} + \int_2^\infty \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-1}}$ ลู่เข้า ■

## แบบฝึกหัด 12.3

จงพิจารณาว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาค่าของอินทิกรัล

**1.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}dx$

**2.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

**3.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$

**4.** $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$

**5.** $\displaystyle\int_0^\infty x^{-0.1}dx$

**6.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx$

**7.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx$

**8.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$

**9.** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{(x+7)\sqrt{x-2}}\,dx$

**10.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$

**11.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

**12.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{x-1}}\,dx$