บทที่ 13

สมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้น

ในบทนี้เป็นการศึกษาสมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นประเภทต่างๆ โดยใน §13.1 จะศึกษา**สมการดิฟเฟอเรนเชียลเชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง**ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

และต่อมา จะได้ศึกษาวิธีหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับสูงกว่าหนึ่ง **สมการเชิงเส้นอันดับที่ n** ได้แก่สมการที่เขียนได้ในรูป

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y = q(x) \tag{13.1}$$

ในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะกรณีที่ฟังก์ชัน $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$, เป็นฟังก์ชันที่มีค่าคงตัว และ n มีค่า 2 หรือ 3

ในกรณีที่ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันศูนย์ เรากล่าวว่าสมการ (13.1) เป็น**สมการเอกพันธุ์** ซึ่งจะแบ่งศึกษาสามตอน คือใน §13.2 §13.3 และ §13.4 ส่วนในกรณีที่ $q(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันศูนย์ เรากล่าวว่าสมการ (13.1) เป็น**สมการไม่เอกพันธุ์** ซึ่งจะศึกษาใน §13.5

13.1 สมการเชิงเส้น (อันดับที่หนึ่ง)

เรากล่าวว่า $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ เป็นสมการเชิงเส้น ถ้าเราสามารถจัดพจน์เสียใหม่ให้อยู่ในรูป

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

ตัวอย่างเช่น

(1) $N'(t) = rN(t)$

(2) $l'(t) = k(c - l(t))$

(3) $x\dfrac{dy}{dx} + (x+1)y = 0$

(4) $xy' + y = e^x$

ในกรณีที่ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันศูนย์ เช่นในกรณี (1) กับ (3) เรากล่าวว่าสมการเป็น**สมการเอกพันธุ์** (homogeneous equation) สมการเชิงเส้นเป็นชนิดของสมการที่มีประโยชน์ในหลายๆ ด้าน มีการศึกษากันมากและมีสูตรสำหรับหาผลเฉลยอยู่แล้วเป็นอย่างดี สูตรดังกล่าวคือ

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\{\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\} \tag{13.2}$$

หรืออีกนัยหนึ่ง

$$y = e^{-h(x)}\{\int Q(x)e^{h(x)}\,dx + C\} \tag{13.3}$$

โดยที่

$$h(x) = \int P(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 13.1.1 จงแสดงใช้สูตรผลเฉลยของสมการเชิงเส้น หาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้ แล้วหาผลเฉลยเฉพาะที่สอดคล้องเงื่อนไขที่กำหนดให้

1. $y' + xy = x^2$, $y = 5$ เมื่อ $x = 0$
2. $xy' + y = \dfrac{\ln x}{x}$, $y = 3$ เมื่อ $x = 1$

ตัวอย่าง 13.1.2 (Michaelis-Menton equation)

การ process drug ของร่างกายเป็นไปตามสมการ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-Kx}{A+x}$$

โดยที่ x เป็นความเข้มข้นของ drug ในร่างกายในขณะเวลา t K กับ A เป็นค่าคงตัวที่ขึ้นอยู่กับชนิดของ drug

สำหรับ drug บางอย่าง $A >> x$ ในกรณีเช่นนี้เราประมาณสมการได้เป็น

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-Kx}{A} \tag{13.4}$$

สมมติว่ามีการให้ drug อย่างต่อเนื่องเป็นเวลา 12 ชั่วโมงในอัตรา 10 มิลลิกรัมต่อนาที แล้วหยุด อัตราการไหลเข้าของ drug จึงเป็น

$$\begin{aligned} D(t) &= 10 \quad 0 \le t \le 12, \\ &= 0 \qquad t > 12 \end{aligned} \tag{13.5}$$

สมมติว่าการ process drug เป็นไปตามสมการเชิงเส้นข้างบนและเป็นไปตาม

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x \tag{13.6}$$

ให้ $y(t)$ เป็นความเข้มข้นของ drug ในผู้ที่ได้รับdrug ดังกล่าว ดังนั้น เราย่อมได้ว่า

$$\frac{dy}{dt} = D(t) - 0.1y \tag{13.7}$$

หรืออีกนัยหนึ่ง

$$\frac{dy}{dt} + 0.1y = D(t) \tag{13.8}$$

เรา assume ว่าเมื่อเริ่มต้นนั้นยังไม่มี drug ในร่างกาย ดังนั้น $y(0) = 0$

จากนี้เราก็จะหาผลเฉลยของสมการได้

(แสดงวิธีทำในห้องเรียน)

ตัวอย่าง 13.1.3

1. ถังใบหนึ่งมีน้ำเกลืออยู่ 100 ลิตร น้ำเกลือดังกล่าวนี้มีเกลือละลายอยู่ 0.3 กก.ต่อลิตร เติมน้ำจืดลงไปในถัง และขณะเดียวกันปล่อยน้ำเกลือออกจากถังด้วยอัตราเดียวกัน และคนให้น้ำเกลือในถังผสมกันดีตลอดเวลา จงหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับความเข้มข้นของน้ำเกลือ แล้วแก้สมการหาสูตรของความเข้มข้นของน้ำเกลือในถังในขณะเวลาใด ๆ
2. ถังใบหนึ่งมีน้ำจืดอยู่ 200 ลิตร เติมน้ำเกลือที่มีเกลือละลายอยู่ 0.25 กก.ต่อลิตรในอัตรา 4 ลิตรต่อนาที โดยคนให้ผสมกันดีตลอดเวลา เมื่อเวลาผ่านไป 30 นาที จึงเปลี่ยนจากการเติมน้ำเกลือเป็นการเติมน้ำจืดในอัตราเดียวกัน จงหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลสำหรับความเข้มข้นของน้ำเกลือในถัง แล้วแก้สมการหาสูตรของความเข้มข้นของน้ำเกลือในถังในขณะเวลาใด ๆ

แบบฝึกหัด 13.1

1. ในแต่ละข้อ จงแสดงว่าผลเฉลยทั่วไปเป็นคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนดให้

	สมการดิฟเฟอเรนเชียล	ผลเฉลยทั่วไป
1.1	$y' = 4y$	$y = ce^{4x}$
1.2	$3y' + 4y = e^x$	$y = e^{-x}$
1.3	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{y^2 - 1}$	$y^2 - 2\ln y = x^2$
1.4	$y'' + y = \tan x$	$y = -\cos x \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$

2. ในแต่ละข้อ จงแสดงว่าผลเฉลยเฉพาะเป็นคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลและเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้

	สมการดิฟเฟอเรนเชียล	ผลเฉลยเฉพาะ
2.1	$2y + y' = 2\sin(2x) - 1;\quad y(\frac{\pi}{4}) = 0$	$y = \sin x \cos x - \cos^2 x$
2.2	$y' = x + 4\sin x;\quad y(0) = -2$	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4\cos x + 2$
2.3	$y' = -4xy;\quad y(0) = 6$	$y = 6e^{-2x^2}$

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้

3.1. $y' = \dfrac{5x}{y}$

3.2. $(1+x^2)y' - 2xy = 0$

3.3. $y' + xy = 100x$

3.4. $xy' - 2y = x^2$

3.5. $y' + y = e^x$

3.6. $y' - y\tan\theta = 1; \quad \dfrac{-\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

3.7. $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 3x + 4$

3.8. $(y+1)\cos x \;\; dx - dy = 0$

3.9. $(x-1)y' + y = x^2 - 1$

3.10. $y' - 3x^2y = e^{x^3}$

4. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียลและเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

4.1. $y'\cos^2 x + y - 1 = 0$, $y(0) = 5$

4.2. $y' + y\tan x = \sec x + \cos x$, $y(0) = 1$

4.3. $y' + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = 0$, $y(2) = 2$

4.4. $xdy = (x+y+2)dx$, $y(1) = 10$

13.2 สมการเอกพันธุ์ตอนที่ 1

สมการเอกพันธุ์อันดับที่สองที่สัมประสิทธิ์คงตัวได้แก่ สมการในรูป

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

วิธีหาผลเฉลยทั่วไปของสมการในรูปนี้ทำได้โดยการสมมติว่า

$$y = e^{rx}$$

เป็นผลเฉลย เมื่อแทนลงในสมการก็จะทำให้เราได้ค่าของ r ที่ทำให้ y ดังกล่าวปีนผลเฉลย

ตัวอย่างเช่นเมื่อแทน $y = e^{rx}$ ลงในสมการ

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \tag{13.9}$$

จะได้ว่า

$$r^2e^{rx} + 5re^{rx} + 6e^{rx} = 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$(r^2 + 5r + 6)e^{rx} = 0$$

$$(r^2 + 5r + 6) = 0$$

ได้ว่า r ต้องเท่ากับ -2 หรือ -3

เมื่อทดลองแทน $y = e^{-2x}$, $y = e^{-3x}$ ลงในสมการ (13.9) จะพบว่าสมการเป็นจริง แสดงว่าฟังก์ชันทั้งสองนั้นเป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าว ผลเฉลยที่ได้มานี้เป็นผลเฉลยเฉพาะ ซึ่ง(ต่อไป) เราจะสามารถนำไปประกอบเป็นผลเฉลยทั่วไป

ทฤษฎีบท 13.2.1 *ถ้า $y_1(x)$, $y_2(x)$ เป็นผลเฉลยของ*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{13.10}$$

จะได้ว่า $y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$ ก็เป็นผลเฉลยของ สมการ (13.10) ด้วย (โดยที่ C_1, C_2 เป็นค่าคงตัว) และถ้า $y_1(x)$, $y_2(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นต่อกัน (คือไม่มีค่าคงตัว k_1, k_2 ใดๆ ที่ทำให้ $k_1\,y_1(x) + k_2\,y_2(x)$ เป็นฟังก์ชันศูนย์) จะได้ว่า $y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

กรณีตัวอย่างข้างต้น ฟังก์ชัน $y = e^{-2x}$ กับ $y = e^{-3x}$ ไม่ขึ้นต่อกัน ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า

$$y = C_1e^{-2x} + C_2\,e^{-3x}$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

หมายเหตุ

ในตัวอย่างที่กล่าวมานั้นเราหาค่า r จากสมการ

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

ได้ว่า r เท่ากับ -2 หรือ -3 ซึ่งเป็น**ค่าที่ต่างกัน**สองค่า *เราจึงได้ผลเฉลยที่ไม่ขึ้นต่อกันสองฟังก์ชัน* ซึ่งประกอบกันได้เป็นผลเฉลยทั่วไปพอดี ในบางกรณีเราอาจได้ r เพียงค่าเดียว ในกรณีเช่นนั้นเราต้องหาผลเฉลยที่ไม่ขึ้นต่อกันโดยวิธีอื่น

ตัวอย่าง 13.2.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$(a) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

$$(b) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

$$(c) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

วิธีทำ

$(a)\ \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$

หา r ได้จากสมการ $r^2 + r - 6 = 0$ นั่นคือ $(r-3)(r-2) = 0$ จะได้ว่า $r = -3, 2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$ ■

$(b)\ \dfrac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$

หา r ได้จากสมการ $r^2 - 9 = 0$ นั่นคือ $r = 3, -3$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ ■

$(c)\ \dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

หา r ได้จากสมการ $r^2 - 5r + 4 = 0$ นั่นคือ $(r-4)(r-1) = 0$ จะได้ว่า $r = 1, 4$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{x} + c_2e^{4x}$ ■

หมายเหตุ ในกรณีที่ *คำตอบของสมการ* $r^2 + ar + b = 0$ *เป็นจำนวนเชิงซ้อน* เราสามารถจัดรูปผลเฉลยทั่วไปโดยใช้

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ตัวอย่าง 13.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$

วิธีทำ

หา r ได้จากสมการ $r^2 + 16 = 0$ ดังนั้น $r = 4i, -4i$

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{4ix} + c_2e^{-4ix} \\ &= c_1[\cos(4x) + i\sin(4x)] + c_2[\cos(-4x) + i\sin(-4x)] \\ &= c_1[\cos(4x) + i\sin(4x)] + c_2[\cos(4x) - i\sin(4x)] \\ &= (c_1 + c_2)\cos(4x) + (c_1i - c_2i)\sin(4x) \\ &= A\cos(4x) + B\sin(4x) \end{aligned}$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = A\cos(4x) + B\sin(4x)$ ■

ตัวอย่าง 13.2.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$

วิธีทำ

หา r ได้จากสมการ $r^2 - 4r + 13 = 0$ ดังนั้น $r = 2 + 3i, 2 - 3i$

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{(2+3i)x} + c_2e^{(2-3i)x} \\ &= c_1e^{2x} \cdot e^{(3x)i} + c_2e^{2x} \cdot e^{(-3x)i} \\ &= e^{2x}\left[c_1e^{3xi} + c_2e^{-3xi}\right] \\ &= e^{2x}[A\cos(3x) + B\sin(3x)] \end{aligned}$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{2x}[A\cos(3x) + B\sin(3x)]$ ■

ตัวอย่าง 13.2.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

วิธีทำ

หา r ได้จากสมการ $r^2 + 9 = 0$ ดังนั้น $r = 3i, -3i$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = A\cos(3x) + B\sin(3x)$ ■

ตัวอย่าง 13.2.5 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ เมื่อ $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

วิธีทำ

หา r ได้จากสมการ $r^2 - 4r + 5 = 0$ ดังนั้น $r = 2 + i, 2 - i$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{2x}\left[A\cos(x) + B\sin(x)\right]$

$2 = y(0) = e^{2(0)}\left[A\cos(0) + B\sin(0)\right] = A$

$y' = 2e^{2x}\left[A\cos(x) + B\sin(x)\right] + e^{2x}[-A\sin(x) + B\cos(x)]$

$y'(0) = y' = 2e^{2(0)}\left[A\cos(0) + B\sin(0)\right] + e^{2(0)}[-A\sin(0) + B\cos(0)] = 2A + B$

ดังนั้น $1 = 2A + B = 2(2) + B$ นั่นคือ $B = -3$

ผลเฉลยเฉพาะคือ $y = e^{2x}\left[2\cos(x) - 3\sin(x)\right]$ ■

แบบฝึกหัด 13.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้

   1.1. $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$

   1.2. $y'' - 6y' + 13y = 0$

   1.3. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียลและเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   2.1. $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   2.2. $y'' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

13.3 สมการเอกพันธ์ุ ตอนที่ 2

วิธีหาผลเฉลยของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

ที่กล่าวไว้ใน §13.2 นั้นเป็นวิธีที่ทำได้ง่าย แต่มีข้อจำกัด คือทำได้เฉพาะกรณีที่*รากทั้งสองของสมการ*

$$r^2 + ar + b = 0$$

ต้องมีค่าต่างกัน

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาอีกวิธีหนึ่งซึ่งไม่มีข้อจำกัดดังกล่าว นอกจากนั้นวิธีที่จะกล่าวถึงนี้ ยังสามารถนำไปใช้กับสมการไม่เอกพันธ์ุอีกด้วย วิธีใหม่นี้ก็ต้องอาศัยสมการ

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$

เช่นกัน เราเรียกสมการนี้ว่า**สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)** ของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

จะให้แนวคิดของวิธีใหม่นี้ด้วยตัวอย่าง

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

เราเขียนสมการนี้เสียใหม่เป็น

$$y'' - 2y' - 3y' + 6y = 0$$
$$y'' - 2y' - 3\left(y' - 2y\right) = 0$$
$$\left(y' - 2y\right)' - 3\left(y' - 2y\right) = 0$$

ถ้าสมมติให้ $u = y' - 2y$ จะได้ว่า

$$u' - 3u = 0$$

จากสมการ $u' - 3u = 0$ เราจะได้ฟังก์ชัน u และเมื่อนำมาใช้กับข้อสมมติ ก็จะได้สมการ

$$y' - 2y = u$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับที่หนึ่งที่เราศึกษาใน §13.1

เมื่อหา y ได้ เราก็ได้ผลเฉลยที่ต้องการวิธีการที่กล่าวมานั้นจุดสำคัญอยู่ตรงที่เราเขียน

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

ได้เป็น

$$\left(y' - 2y\right)' - 3\left(y' - 2y\right) = 0$$

เราจึงทราบว่าควรสมมติ $u = y' - 2y$

ปัญหาจึงมีว่า ในกรณีอื่นๆ เราจะเขียนสมการในทำนองเดียวกันได้อย่างไร หรือไม่

คำตอบก็คือ เราเขียนได้เสมอ และอาจวิเคราะห์หาวิธีทำได้ดังนี้

สมมติว่าเขียน $y'' + ay' + by = 0$ ได้เป็น

$$\left(y' - r'y\right)' - r''\left(y' - r'y\right) = 0$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์กัน จะได้ว่า

$$-\left(r' + r''\right) = a \qquad .....(1)$$
$$r''r' = b \qquad .....(2)$$

เมื่อหา r'' จากสมการ (2) แล้วนำไปแทนในสมการ (1) จะได้ว่า

$$(r')^2 + ar' + b = 0$$

คือได้ว่า r' เป็นรากหนึ่งของสมการลักษณะเฉพาะ

$$r^2 + ar + b = 0$$

ของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่กำหนดให้

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราหา r' จากสมการ (2) ไปแทนในสมการ (1) เราจะเห็นได้ว่า r'' ก็เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะด้วยเช่นกัน

จากการวิเคราะห์ที่กล่าวมาแล้วนั้น เรานำมาสังเคราะห์เป็นวิธีหาผลเฉลยของสมการ

$$y'' + ay' + b = 0$$

ได้ดังต่อไปนี้

1) หารากของสมการลักษณะเฉพาะ $r^2 + ar + b = 0$

2) ใช้ราก r' รากหนึ่งมากำหนดให้ $u = y' - r'y$

3) ได้ $y'' = u' + r'y$

4) แทน y'' ที่ได้ในสมการที่โจทย์กำหนดให้ แล้วจัดพจน์ y' กับ y ที่เหลือให้อยู่ในรูป $y' - r'y$ แล้วแทนด้วย u ซึ่งจะได้สมการใน u

5) หาผลเฉลยของสมการใน u

6) นำ u ที่ได้มาสร้างสมการ $y' - r'y = u$ แล้วหาผลเฉลย ผลเฉลยที่ได้ก็คือคำตอบของโจทย์

ตัวอย่าง 13.3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $y'' - 6y' + 9y = 0$

วิธีทำ

เขียนสมการได้เป็น
$$y'' - 3y' - 3y' + 9y = 0$$
$$(y' - 3y)' - 3(y' - 3y) = 0$$

ให้ $u = y' - 3y$

ดังนั้น
$$u' - 3u = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง โดยมี
$$p(x) = -3 \quad q(x) = 0$$

ดังนั้น
$$h(x) = \int p(x)dx = -3x$$

จะได้ว่า
$$u = e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)}q(x)dx + c_1\right] = e^{3x}\left[\int e^{-3x} \cdot 0dx + c_1\right] = c_1e^{3x}$$

แทนค่า u ได้ว่า
$$y' - 3y = c_1e^{3x}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งเหมือนกัน โดยมี
$$p(x) = -3 \qquad q(x) = c_1e^{3x}$$
$$h(x) = \int p(x)dx = \int -3dx = -3x$$

ดังนั้น
$$y = e^{3x}\left[\int e^{-3x} \cdot c_1e^{3x}dx + c_2\right]$$

นั่นคือ ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{3x}\left[c_1x + c_2\right]$ ■

ข้อสรุปการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ดีกรีสอง

กำหนดให้ r_1 กับ r_2 เป็นรากของสมการ $r^2+ar+b=0$ แล้วผลเฉลยของสมการ $y''+ay'+by=0$ ในพจน์ของ r_1 กับ r_2 สามารถแยกพิจารณาในกรณีต่อไปนี้

ก) $r_1 \neq r_2$ **และเป็นจำนวนจริง**

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$

ข) $r_1 \neq r_2$ **และเป็นจำนวนเชิงซ้อน**

ให้ $r_1=a+bi$ และ $r_2=a-bi$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=e^{ax}[A\cos(bx)+B\sin(bx)]$

ค) $r_1=r_2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=e^{r_1x}[c_1x+c_2]$

ตัวอย่าง 13.3.2 จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

(a) $y''+6y'+9y=0$

(b) $y''-4y'+4y=0$

วิธีทำ

(a) $y''+6y'+9y=0$

หา r ได้จากสมการ $r^2+6r+9=0$ นั่นคือ $(r+3)^2=0$ ดังนั้น $r=-3,-3$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=e^{-3x}[c_1x+c_2]$ ■

(b) $y''-4y'+4y=0$

หา r ได้จากสมการ $r^2-4r+4=0$ นั่นคือ $(r-2)^2=0$ ดังนั้น $r=2,2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=e^{2x}[c_1x+c_2]$ ■

แบบฝึกหัด 13.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการดิฟเฟอเรนเชียลต่อไปนี้
   1.1. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
   1.2. $4y'' - 20y' + 25y = 0$
   1.3. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + y = 0$
   1.4. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 0$
   1.5. $4y'' + y = 0$
2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการดิฟเฟอเรนเชียลและเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   2.1. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 3$
   2.2. $2y'' + 5y' + 3y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$
   2.3. $y'' + 16y = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = -3$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 4$
   2.4. $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

13.4 สมการเอกพันธุ์ ตอนที่ 3

ในตอนที่สามนี้ เราจะพิจารณาหาผลเฉลยของ

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0 \tag{13.11}$$

โดยพิจารณาในแนวของตัวอย่าง 13.2.1 เพื่อจะได้สรุปเป็นกฎไว้ใช้สมการลักษณะเฉพาะของสมการ (13.11) คือ

$$r^3 + ar^2 + br + c = 0 \tag{13.12}$$

สมการนี้มีรากสามค่า r', r'', r''' ซึ่งอาจซ้ำกันบ้างก็เป็นได้ เราอาจเขียนสมการ (13.11) ในพจน์ของ r', r'', r''' ได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ใน (13.12) กับ

$$(r - r')(r - r'')(r - r''') = 0 \tag{13.13}$$

เมื่อได้ค่า a, b, c ในพจน์ของ r', r'', r''' แล้ว เราก็นำไปเขียนสมการ (13.11) เสียใหม่ ก็จะได้เป็น

$$y''' - (r' + r'' + r''')y'' + (r'r'' + r''r''')y' - r'r''r'''y = 0$$

$$(y'-r'y)'' \quad - \quad \ldots \quad + \quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad = 0 \tag{13.14}$$

โดยการกำหนดให้

$$y'-r'y=u \tag{13.15}$$

เราจะเขียนสมการ (13.14) ได้เป็นสมการในตัวแปร u ซึ่งจะได้เป็น

$$u'-(r''+r''')u'+r''r'''u=0 \tag{13.16}$$

$$(u'-r''u)'-r'''(u'-r''u)=0$$

และเมื่อกำหนดให้

$$u'-r'''u=v \tag{13.17}$$

ก็จะได้ว่าสมการ (13.16) กลายเป็น

$$v'-r'''v=0 \tag{13.18}$$

เมื่อหาผลเฉลยของ (13.18) ได้ นำ v ที่ได้ไปแทนใน (13.17) ก็จะหา u ได้ และเมื่อนำไปแทนใน (13.15) ก็จะหา y ได้ y ที่ได้นี้ย่อมเป็นผลเฉลยของสมการ (13.11)

แต่ละขั้นตอนที่กล่าวมานี้ล้วนใช้ความรู้เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง

โดยวิธีข้างต้น สรุปเป็นกฎในการหาผลเฉลยได้ดังนี้

ข้อสรุปการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ดีกรีสาม

กำหนดให้ r_1 , r_2 และ r_3 เป็นรากของสมการ $r^3+ar^2+br+c=0$ แล้วผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ดีกรี 3 $y'''+ay''+by'+cy=0$ ในพจน์ของ r_1 , r_2 และ r_3 สามารถแยกพิจารณาในกรณีต่อไปนี้

ก) $r_1 \neq r_2 \neq r_3$ **เป็นจำนวนจริง**

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+c_3e^{r_3x}$

ข) r_1 **เป็นจำนวนจริง และ** $r_2 \neq r_3$ **เป็นจำนวนเชิงซ้อน**

ให้ $r_2=a+bi$ และ $r_3=a-bi$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{r_1x}+e^{ax}[A\cos(bx)+B\sin(bx)]$

ค) $r_1=r_2 \neq r_3$ **เป็นจำนวนจริง**

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=c_1e^{r_3x}+e^{r_1x}[c_2x+c_3]$

ง) $r_1=r_2=r_3$ **เป็นจำนวนจริง**

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y=e^{r_1x}[c_1x^2+c_2x+c_3]$

ตัวอย่าง 13.4.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

(a) $y''' - 7y' + 6y = 0$

(b) $y''' - 7y'' + 25y' - 39y = 0$

(c) $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$

(d) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

(e) $5y''' - 6y'' + 12y' = 0$

วิธีทำ

(a) $y''' - 7y' + 6y = 0$

หา r ได้จากสมการ $r^3 - 7r + 6 = 0$ ดังนั้น $r = 2, -3, 1$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} + c_3e^{x}$ ■

(b) $y''' - 7y'' + 25y' - 39y = 0$

หา r ได้จากสมการ $r^3 - 7r^2 + 25r - 39 = 0$ ดังนั้น $r = 3, 2+3i, 2-3i$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{3x} + e^{2x}\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right]$ ■

(c) $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$

หา r ได้จากสมการ $r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$ ดังนั้น $r = 3, 2, 2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{3x} + e^{2x}\left[c_2x + c_3\right]$ ■

(d) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

หา r ได้จากสมการ $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$ ดังนั้น $r = 2, 2, 2$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{2x}\left[c_1x^2 + c_2x + c_3\right]$ ■

(e) $5y''' - 6y'' + 12y' = 0$

หา r ได้จากสมการ $5r^3 - 6r^2 + 12r = 0$ ดังนั้น $r = 0, 0.6 + 1.4283i, 0.6 - 1.4283i$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 + e^{0.6x}\left[A\cos(1.4283x) + B\sin(1.4283x)\right]$ ■

แบบฝึกหัด 13.4

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ต่อไปนี้

1. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$
2. $y''' - y'' + 3y' + 5y = 0$
3. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$
4. $y''' - 8y'' + 21y' - 18y = 0$
5. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$
6. $2y''' - 5y'' + 17y = 0$
7. $y''' - 13y'' + 12y = 0$
8. $y''' + 9y' = 0$
9. $y''' = 0$

13.5 สมการไม่เอกพันธุ์

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาหาผลเฉลยของ

$$y'' + ay' + by = q(x) \tag{13.19}$$

กับ

$$y''' + ay'' + by' + cy = q(x) \tag{13.20}$$

โดยใช้วิธีการเดียวกันกับที่ใช้กับสมการเอกพันธุ์ที่กล่าวมาในหัวข้อก่อน

ในที่นี้จะกล่าวถึงวิธีการนี้โดยใช้สมการอันดับที่สองเป็นตัวอย่างเป็นส่วนใหญ่ การหาผลเฉลยของสมการอันดับที่สามก็ทำได้ในทำนองเดียวกัน

สำหรับสมการ (13.19) นั้นเราสามารถสร้างสมการลักษณะเฉพาะของสมการเอกพันธุ์ของมัน

$$r^2 + a\,r + b = 0 \tag{13.21}$$

เมื่อหาราก r' กับ r'' ของสมการนี้ได้แล้ว เราก็อาจเขียนสมการ (13.19) เสียใหม่ในรูป

$$(y' - r'y)' - r''(y' - r'y) = g(x) \tag{13.22}$$

และเมื่อใช้การแทนค่า

$$y' - r'y = u \tag{13.23}$$

สมการ (13.22) ก็กลายเป็น

$$u' - r''u = g(x) \tag{13.24}$$

สมการ (13.24) เป็นสมการเชิงเส้นที่เราทราบวิธีหาผลเฉลยมาแล้ว(จากภาคการศึกษาต้น)

เมื่อนำผลเฉลย u ของสมการ (13.24) แทนในสมการ (13.23) แล้วหาผลเฉลยของสมการ (13.23) ก็จะได้ผลเฉลยของสมการ (13.19)

ตัวอย่าง 13.5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - 5y' + 6y = 5\,e^{-4x}$$

วิธีทำ แบบที่ 1

จัดรูปได้ $$(y' - 2y)' - 3(y' - 2y) = 5e^{-4x}$$

ให้ $u = y' - 2y$ ดังนั้น $$u' - 3u = 5e^{-4x}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งโดยที่ $p(x) = -3$ $q(x) = 5e^{-4x}$

ดังนั้น $$u = e^{-h(x)}\left[\int e^{h(x)}q(x)dx + c'\right] = e^{3x}\left[\int e^{-3x}5e^{-4x}dx + c'\right] = e^{3x}\left[\frac{5e^{-7x}}{-7} + c_1\right]$$

$$= \frac{-5}{7}e^{-4x} + c_1e^{3x}$$

แทนค่า u จะได้ $$y' - 2y = \frac{-5}{7}e^{-4x} + c_1e^{3x}$$

ดังนั้น $$y = e^{2x}\left[\int e^{-2x}\left(\frac{-5}{7}e^{-4x} + c_1e^{3x}\right) + c_2\right] = e^{2x}\left[\frac{5}{42}e^{-6x} + c_1e^{x} + c_2\right]$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = \dfrac{5}{42}e^{-4x} + c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$ ■

ข้อสังเกต ให้สังเกตว่าสองพจน์สุดท้ายในผลเฉลย คือ

$$y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$$

เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

ส่วนพจน์แรกเพียงพจน์เดียวคือ $y_p = \frac{5}{42}e^{-4x}$ นั้น เห็นได้ว่าเป็นผลเฉลยเช่นกัน หากแต่เป็นผลเฉลยเฉพาะ (ที่ได้จากการกำหนดให้ $c_1 = c_2 = 0$) เห็นได้ว่าเราเขียนผลเฉลยทั่วไปของ

$$y'' - 5y' + 6y = 5e^{-4x}$$

ได้ในรูป

$$y = y_p + y_h$$

โดยที่ y_h เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y'' - 5y' + 6y = 0$ และ

y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะหนึ่งของ $y'' - 5y' + 6y = 5e^{-4x}$

ทฤษฎีบท 13.5.1 *เราย่อมเขียนผลเฉลยทั่วไปของ*

$$y'' + ay' + by = q(x) \tag{13.25}$$

ได้ในรูป

$$y = y_p + y_h$$

โดยที่ y_p *เป็นผลเฉลยเฉพาะหนึ่งของสมการ (13.25) และ* y_h *เป็นผลเฉลยทั่วไปของ*

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{13.26}$$

เสมอไป

การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (13.25) จึงอาจทำได้โดย

1) หาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (13.25) มาผลเฉลยหนึ่ง

2) หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (13.26)

3) นำมาบวกกันเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (13.25)

ในบางกรณีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (13.25) นั้นอาจทำได้ง่ายๆ (โดยไม่ต้องอินทิเกรต) เช่นในกรณีที่ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าในรูป $q(x) = Ke^{mx}$ เช่นในตัวอย่าง 13.5.1 เป็นต้น

ในกรณีของตัวอย่าง 13.5.1 นั้น *ค่า m ซึ่งต่างจากรากทั้งสองของสมการลักษณะเฉพาะ* เราได้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูปเดียวกันกับ $q(x)$ แต่ต่างกันที่สัมประสิทธิ์

หากเราทราบมาก่อนว่าผลเฉลยเฉพาะหนึ่งของ

$$y'' - 5y' + 6y = 5e^{-4x}$$

อยู่มีสูตรในรูป $y_p = ke^{-4x}$ เราก็อาจหาค่าของสัมประสิทธิ์ k ได้โดยการแทนลงไปในสมการ (13.25) *ก็จะหาค่า k ได้โดยง่าย!* ดังนี้

ตัวอย่าง 13.5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - 5y' + 6y = 5\,e^{-4x}$$

วิธีทำ แบบที่ 2

หา r ได้จากสมการ $r^2 - 5r + 6 = 0$ ดังนั้น $r = 2, 3$

$\therefore y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$

ให้ $y_p = ke^{-4x}$ ดังนั้น $y_p{}' = -4ke^{-4x}$ และ $y_p{}'' = 16ke^{-4x}$

จะได้ว่า
$$16ke^{-4x} - 5(-4ke^{-4x}) + 6(ke^{-4x}) = 5e^{-4x}$$
$$(16k + 20k + 6k)e^{-4x} = 5e^{-4x}$$

ดังนั้น $42k = 5$ นั่นคือ $k = \dfrac{5}{42}$

$\therefore y_p = \dfrac{5}{42}e^{-4x}$

$\therefore y = y_p + y_h = \dfrac{5}{42}e^{-4x} + c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ ■

อย่างไรก็ตาม กรณีที่ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าในรูป $q(x) = Ke^{mx}$ แต่ *ค่า m **ไม่**ต่างจากรากทั้งสองของสมการลักษณะเฉพาะ* เราไม่สามารถให้ $y_p = ke^{mx}$ ได้ดังตัวอย่าง 13.5.1 แต่สามารถกำหนด y_p ได้ตามข้อสรุปต่อไปนี้

ข้อสรุปในการหา y_p สำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ $y'' + ay' + by = Ke^{mx}$

การหา y_p สำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ $y'' + ay' + by = Ke^{mx}$ เมื่อ r_1 กับ r_2 เป็นรากของสมการ $r^2 + ar + b = 0$ สามารถแยกพิจารณาในกรณีต่อไปนี้

(ก) กรณี $r_1 \neq r_2$

(ก-1) $m \neq r_1$ และ $m \neq r_2$ ให้ $y_p = ke^{mx}$

(ก-2) $m = r_1$ หรือ $m = r_2$ ให้ $y_p = kxe^{mx}$

(ข) กรณี $r_1 = r_2$

(ข-1) $m \neq r_1, r_2$ ให้ $y_p = ke^{mx}$

(ข-2) $m = r_1 = r_2$ ให้ $y_p = kx^2 e^{mx}$

ตัวอย่าง 13.5.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - 5y' + 6y = 5e^{-4x} + 3e^{7x}$$

วิธีทำ เหมือน ตัวอย่าง 13.5.1 ได้ $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

สำหรับผลเฉลยเฉพาะ เราแยกคิดเป็นสองส่วน

หา y_{p_1} จาก $y'' - 5y' + 6y = 5e^{-4x}$

โดย ตัวอย่าง 13.5.1 $y_{p_1} = \dfrac{5}{42} e^{-4x}$

หา y_{p_2} จาก $y'' - 5y' + 6y = 3e^{7x}$

ให้ $y_{p_2} = ke^{7x}$ ดังนั้น $y_{p_2}{}' = 7ke^{7x}$ และ $y_{p_2}{}'' = 49ke^{7x}$

นั่นคือ $49ke^{7x} - 35ke^{7x} + 6ke^{7x} = 3e^{7x}$

ดังนั้น $k = \dfrac{3}{20}$

$\therefore y_{p_2} = \dfrac{3}{20} e^{7x}$

ฉะนั้น $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \dfrac{5}{42} e^{-4x} + \dfrac{3}{20} e^{7x}$

ผลเฉลยทั่วไปของ $y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \dfrac{5}{42} e^{-4x} + \dfrac{3}{20} e^{7x}$ ■

ข้อสังเกต ในกรณี (ก-1) $m \neq r_1$ และ $m \neq r_2$ ต้องการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ $Ay'' + By' + Cy = De^{mx}$ เมื่อ r_1 กับ r_2 เป็นรากของสมการ $Ar^2 + Br + C = 0$

ให้ $y_p = ke^{mx}$

ดังนั้น $y' = kme^{mx}$ และ $y'' = km^2 e^{mx}$

จะได้ว่า $Am^2ke^{mx} + Bmke^{mx} + Cke^{mx} = De^{mx}$

นั่นคือ $k(Am^2 + Bm + C) = D$

ฉะนั้น $$k = \frac{D}{Am^2 + Bm + C}$$

เช่น ต้องการหา y_p สำหรับ $y'' - 5y' + 6y = 3e^{7x}$

เนื่องจาก $A = 1 \quad B = -5 \quad C = 6 \quad D = 3 \quad m = 7$ ดังนั้น $k = \frac{3}{20}$

ตัวอย่าง 13.5.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - 5y' + 6y = 4\cos(3x)$$

ทบทวน

$$\sin A = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i} \quad \text{และ} \quad \cos A = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}$$

วิธีทำ เขียนสมการใหม่ได้เป็น $y'' - 5y' + 6y = 4\left[\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}\right] = 2e^{i3x} + 2e^{-i3x}$

เหมือน ตัวอย่าง 13.5.1 ได้ $y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$

หา y_{p_1} จาก $y'' - 5y' + 6y = 2e^{i3x}$

แทนค่า $A = 1 \quad B = -5 \quad C = 6 \quad D = 2 \quad m = 3i$ ได้ $k = \frac{2}{3 - 15i}$

ดังนั้น $y_{p_1} = \frac{2}{3 - 15i}e^{i3x}$

หา y_{p_2} จาก $y'' - 5y' + 6y = 2e^{-i3x}$

แทนค่า $A = 1 \quad B = -5 \quad C = 6 \quad D = 2 \quad m = -3i$ ได้ $k = \frac{2}{3 + 15i}$

ดังนั้น $y_{p_2} = \frac{2}{3 + 15i}e^{-i3x}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{2}{3 - 15i}e^{i3x} + \frac{2}{3 + 15i}e^{-i3x}$ ■

ข้อสรุปในการหา y_p สำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ $y'' + ay' + by = kx^n e^{mx}$

การหา y_p สำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ $y'' + ay' + by = kx^n e^{mx}$ เมื่อ r_1 กับ r_2 เป็นรากของสมการ $r^2 + ar + b = 0$ สามารถแยกพิจารณาในกรณีต่อไปนี้

(ก) กรณี $m \neq r_1$ และ $m \neq r_2$

ให้ $y_p = e^{mx}[k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0]$

(ข) กรณี $m = r_1$ และ $m \neq r_2$

ให้ $y_p = xe^{mx}[k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0]$

(ค) กรณี $m = r_1 = r_2$

ให้ $y_p = x^2 e^{mx}[k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0]$

ตัวอย่าง 13.5.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y' - 2y = x^2$$

วิธีทำ

เขียนใหม่ได้เป็น $y'' + y' - 2y = x^2 e^{(0)x}$

หา y_h โดย $r^2 + r - 2 = 0$ นั่นคือ $r = -2, 1$

ดังนั้น $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$

ให้ $y_p = e^{(0)x}[k_2 x^2 + k_1 x + k_0] = k_2 x^2 + k_1 x + k_0$

จะได้ $y' = 2k_2 x + k_1$ และ $y'' = 2k_2$

ดังนั้น $2k_2 + 2k_2 x + k_1 - 2(k_2 x^2 + k_1 x + k_0) = x^2$

จัดรูป และเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า $k_0 = -\frac{3}{4}$, $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$

นั่นคือ $y_p = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ∎

แบบฝึกหัด 13.5

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์ต่อไปนี้
   1.1. $y'' - 5y' + 6y = 12x^2$
   1.2. $y'' + 4y = e^{3x}$
   1.3. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$
   1.4. $y'' + y' - 6y = 2e^{3x} + 3e^{2x}$
   1.5. $y'' + 6y' + 19y = 2e^{3x}$
   1.6. $y'' - 4y' + 4y = 4\sin(2x)$
   1.7. $y'' + 25y = 3e^{2x}$
   1.8. $y'' - 4y' + 13y = 3e^{2x}$
   1.9. $y'' - 25y = 3\cos(5x)$
   1.10. $y'' + y' - 6y = 3x^2$
   1.11. $y'' - 4y' + 13y = 2\cos(3x)$
   1.12. $y'' + y' - 2y = \sin x$
   1.13. $y'' - 5y' + 6y = 2x^2e^{3x}$
   1.14. $y'' - 5y' + 6y = 3x^2e^{x}$
   1.15. $y'' - 5y' + 6y = xe^{x} + xe^{2x}$
   1.16. $y'' + y = 3e^{-x} + \sin x$
2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์และเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   2.1. $y'' + y = e^{x} + x^3 \quad , \; y(0) = 2 \quad , \; y'(0) = 0$
   2.2. $y'' - y = xe^{x} \quad , \; y(0) = 2 \quad , \; y'(0) = 1$