บทที่ 14
ฟังก์ชันของหลายตัวแปร

การศึกษาที่กล่าวมาแล้วเป็นการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณในลักษณะที่ค่าของปริมาณหนึ่งขึ้นอยู่กับอีกปริมาณหนึ่ง เราจึงแทนความสัมพันธ์เช่นนั้นได้ด้วยฟังก์ชันของตัวแปรเพียงหนึ่งตัว ในการศึกษาบางเรื่อง อาจมีปริมาณมากกว่าสองปริมาณที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันในรูปต่างๆ ในบทนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ในรูปที่ปริมาณหนึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณต่างๆ หลายปริมาณ เช่น ถ้าให้ A เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความกว้างและความยาวเป็น x และ y ตามลำดับ ค่าของ A ย่อมขึ้นอยู่กับค่าของ x กับ y

$$A = xy$$

หรือ ถ้าให้ V เป็นปริมาตรของกล่องที่มีความกว้าง ความยาว และความสูงเป็น x, y และ z ตามลำดับ ค่าของ V ก็ขึ้นอยู่กับ x, y และ z

$$V = xyz$$

ในตัวอย่างที่กล่าวมานี้

A เป็นฟังก์ชันของ x, y (สองตัวแปร) และ V เป็นฟังก์ชันของ x, y, z (สามตัวแปร)

ในการศึกษาฟังก์ชันของสองตัวแปร เราถือว่าโดเมนของฟังก์ชันเป็นเซตของคู่อันดับของจำนวนจริง คือเป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (ในที่นี้ $\mathbb{R}=$ เซตของจำนวนจริง) ตัวอย่างเช่น

$$f = \big\{((x,y), xy) \mid x > 0, y > 0\big\}$$

เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ ซึ่งมีค่าที่จุด (x,y) ใดๆ $f(x,y) = xy$ เป็นต้น

ในกรณีของฟังก์ชันของสามตัวแปรโดเมนของฟังก์ชันก็เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ เช่น

$$g = \big\{((x,y,z), xyz) \mid x > 0, y > 0, z > 0\big\}$$

เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $(0,+\infty)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ ซึ่งมีค่าที่จุด (x,y,z) ใดๆ เป็น $g(x,y,z) = xyz$ เป็นต้น

เรื่องราวของฟังก์ชันหลายตัวแปรนั้น โดยทั่วๆ ไปก็เหมือนกันกับฟังก์ชันของสองตัวแปร ดังนั้นเราจะศึกษาเรื่องฟังก์ชันของสองตัวแปรกันเสียก่อน แล้วจึงค่อยศึกษาฟังก์ชันหลายตัวแปรโดยทั่วๆไป

14.1 โดเมนของฟังก์ชันของสองตัวแปร

เราจะใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{R}^2$ เขียนแทน $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชันใดๆ ของสองตัวแปรจึงเป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}^2$ การศึกษาฟังก์ชันของสองตัวแปรที่จะกล่าวถึงนี้ จะเป็นไปในทำนองเดียวกันกับที่เราทำกับฟังก์ชันของตัวแปรเดียว เราจะมุ่งไปที่การดิฟเฟอเรนชิเอต ในการนี้เราจำต้องเข้าใจเรื่องที่เกี่ยวข้องด้วย เรื่องเหล่านี้ได้แก่

ลิมิตของลำดับใน $\mathbb{R}^2$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันของสองตัวแปร

ลิมิตของฟังก์ชันของสองตัวแปร

ฟังก์ชันเชิงเส้นของสองตัวแปร

ในการศึกษาเรื่องดังกล่าวมานั้น เราต้องใช้การคำนวณใน $\mathbb{R}^2$ (พีชคณิตของ $\mathbb{R}^2$) ซึ่งได้แก่

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$$c(x, y) = (cx, cy)$$

$$|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ซึ่งจะได้ว่า ระยะระหว่าง (x_1, y_1) กับ (x_2, y_2) เท่ากับ $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|$

■ ลิมิตของลำดับใน $\mathbb{R}^2$

บทนิยาม 14.1.1 ให้ $\{(x_n, y_n)\}$ เป็นลำดับใดๆ ใน $\mathbb{R}^2$

ถ้ามีจำนวนจริง x, y ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ และ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ เรากล่าวว่า $\{(x_n, y_n)\}$ **ลู่เข้าหา** (x, y)

มิเช่นนั้นเรากล่าวว่า $\{(x_n, y_n)\}$ **ลู่ออก**

ตัวอย่างเช่น

$$\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\} \text{ ลู่เข้าหา } (0,0)$$

$$\{(\frac{1}{n}, 0)\} \text{ ลู่เข้าหา } (0,0)$$

$$\{(1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})\} \text{ ลู่เข้าหา } (1,2)$$

$$\{(1, 2 + \frac{1}{n})\} \text{ ลู่เข้าหา } (1,2)$$

$$\{(n, 0)\} \text{ ลู่ออก}$$

เป็นต้น

14.2 ความต่อเนื่องและลิมิตของฟังก์ชันของสองตัวแปร

บทนิยาม 14.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตย่อยของ $\mathbb{R}^2$ ไปยัง $\mathbb{R}$

ให้ (a,b) เป็นจุดซึ่งมีลำดับ $\{(x_n,y_n)\}$ ของจุดในโดเมนของ f ซึ่ง

$$(x_n,y_n) \neq (a,b) \qquad (14.1)$$

และ

$$\{(x_n,y_n)\} \text{ ลู่เข้าหา } (a,b) \qquad (14.2)$$

อย่างน้อยลำดับหนึ่ง

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = L$ สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{(x_n,y_n)\}$ ที่สอดคล้อง (14.1) และ (14.2) เรากล่าวว่า L **เป็นลิมิตของ f เมื่อ (x,y) เข้าใกล้ (a,b)** และเขียนแสดงด้วย

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

ตัวอย่าง 14.2.1 ให้ $f(x,y) = 2+3xy$ จงแสดงว่า

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 20$$

วิธีทำ ให้ $\{(x_n,y_n)\}$ เป็นลำดับใดๆ ซึ่งสอดคล้อง (14.1) และ (14.2) เห็นได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}(2+3x_ny_n) = = \lim_{n\to\infty} 2 + 3\lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n = 2+3(2)(3) = 20$$

■

ตัวอย่าง 14.2.2 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \quad (x,y)\neq(0,0)$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีลิมิต

แนววิธีทำ หาลำดับ $\{(x_n,y_n)\}$ ต่างๆ ที่สอดคล้อง (14.1) และ (14.2) ที่ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$ มีค่าต่างๆ กัน

วิธีทำ I. ให้ $\{(x_n,y_n)\}$ เป็นลำดับ$\left\{\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ จะเห็นว่าสอดคล้องกับ (14.1) และ (14.2)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_ny_n}{{x_n}^2+{y_n}^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

II. ให้ $\{(x_n, y_n)\}$ เป็นลำดับ $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right\}$ จะเห็นว่าสอดคล้องกับ (14.1) และ (14.2)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{{x_n}^2 + {y_n}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีลิมิต ■

ข้อสังเกต

เนื่องจากเรานิยามลิมิตของฟังก์ชันของสองตัวแปรด้วยลิมิตของลำดับ ดังนั้นเราก็อาจใช้กฎของลิมิตของลำดับพิสูจน์กฎทำนองเดียวกันสำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปร เช่น

ลิมิตของผลบวกเท่ากับผลบวกของลิมิต

ลิมิตของผลคูณเท่ากับผลคูณของลิมิต

ลิมิตของผลหารเท่ากับผลหารของลิมิต ถ้า ลิมิตของตัวหารไม่เป็นศูนย์

การเปรียบเทียบลิมิต(อสมการ)

นอกจากนั้น หาก $f(x,y)$ มีค่าขึ้นอยู่กับ x เพียงตัวเดียว เช่น $f(x,y) = g(x)$ เราก็จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{x\to a} g(x)$$

ถ้าลิมิตด้านขวามือ (ของเครื่องหมายเท่ากับ) มีค่า และทำนองเดียวกันสำหรับ $f(x,y)$ ที่มีค่าขึ้นอยู่กับ y เพียงตัวเดียว

ตัวอย่าง 14.2.3 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{1 + x^2 + y^2}$ จงแสดงการพิจารณาหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$

วิธีทำ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x^2 y = \left(\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x^2\right)\cdot\left(\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} y\right) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 \cdot \lim\limits_{y\to 2} y = 2$

และ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 1 + x^2 + y^2 = 1 + 1^2 + 2^2 = 6$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2 y}{1 + x^2 + y^2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ ■

ตัวอย่าง 14.2.4 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| = \left|\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}\right| \cdot |y| \leq 1 \cdot y$

ดังนั้น $$-|y| \le \frac{x^2y}{x^2+y^2} \le |y|$$

นั่นคือ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -|y| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|$$

จะได้ว่า $$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \le 0$$

ฉะนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ ■

ข้อสังเกต การแสดงว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีลิมิตนั้น เช่นในตัวอย่าง 14.2.2 เราพิจารณาลำดับ $\{(x_n, y_n)\}$ ซึ่งลู่เข้า $(0,0)$ ให้เป็น $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ จะเห็นว่า $x_n = y_n$ ทุก n ซึ่งอาจเขียนอธิบายลักษณะของลำดับโดยการบอกความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y นั่นคือ พิจารณา $(x,y)\to(0,0)$ ในทิศ $y = x$ นั่นเอง หรือ พิจารณาลำดับที่สองในตัวอย่างเดียวกันคือ $\{(x_n, y_n)\}$เป็นลำดับ $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right\}$ ซึ่งจะมีความหมายเดียวกับพิจารณา $(x,y)\to(0,0)$ ในทิศ $y = 2x$

ตัวอย่าง 14.2.5 จงแสดงการพิจารณาหาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) หรือแสดงว่าไม่มีลิมิต

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+2y^2}$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+3y^3}{x^2+y^2}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4+x^2}{y^4-x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2y-2x^2}{xy-2x}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{y}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2-y^6}$

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+2y^2}$ ไม่มีลิมิต

I. พิจารณา $(x,y)\to(0,0)$ ในทิศ $y = x$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

II. พิจารณา $(x,y)\to(0,0)$ ในทิศ $y = 2x$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}} \frac{xy}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+2(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{9x^2} = \frac{2}{9}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+2y^2}$ ไม่มีลิมิต ■

วิธีทำ 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+3y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{3y^2}{x^2+y^2}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 + \frac{3y^2}{x^2+y^2} = 1 + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^2}{x^2+y^2}$$

พิจารณา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3y^2}{x^2+y^2}$

เนื่องจาก $\left|\dfrac{3y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |3y| \le 1 \cdot |3y|$

ดังนั้น
$$-|3y| \le \frac{3y^3}{x^2+y^2} \le |3y|$$

นั่นคือ
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -|3y| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^3}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |3y|$$

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^3}{x^2+y^2} \le 0$$

ฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3y^2}{x^2+y^2} = 0$ นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+3y^2}{x^2+y^2} = 1$ ■

วิธีทำ 3. จะแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4+x^2}{y^4-x^2}$ ไม่มีลิมิต

I. พิจารณา $(x,y)\to(0,0)$ ในทิศ $x=y$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{y^4+x^2}{y^4-x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4+y^2}{y^4-y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2+1}{y^2-1} = -1$$

II. พิจารณา $(x,y)\to(0,0)$ ในทิศ $y=\sqrt{2x}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\sqrt{2x}}} \frac{y^4+x^2}{y^4-x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\left(\sqrt{2x}\right)^4+x^2}{\left(\sqrt{2x}\right)^4-x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$$ ■

วิธีทำ 4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2y-2x^2}{xy-2x}$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2y-2x^2}{xy-2x} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2(y-2)}{x(y-2)} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} x = 1$$

■

วิธีทำ 5. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{y}$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{y} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{y}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{2y}{y\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)} = 1$$

■

วิธีทำ 6. จะแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2-y^6}$ ไม่มีลิมิต

I. พิจารณา $(x,y)\to(0,0)$ ในทิศ $x=y$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{xy^3}{x^2-y^6} = \lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^2-y^6} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1-y^4} = 0$$

II. พิจารณา $(x,y)\to(0,0)$ ในทิศ $x=2y^3$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=2y^3}} \frac{xy^3}{x^2-y^6} = \lim_{y\to 0}\frac{2y^6}{4y^6-y^6} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1-y^4} = \frac{2}{3}$$

■

บทนิยาม 14.2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตย่อยของ $\mathbb{R}^2$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ให้ (a,b) ป็นจุดในโดเมนของ f

ถ้าปรากฏว่า

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = f(a,b)$$

สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{(x_n,y_n)\}$ ที่ลู่เข้าหา (a,b) เรากล่าวว่า f **มีความต่อเนื่องที่** (a,b)

หมายเหตุ กฎของลิมิตเกี่ยวกับ ผลบวก ผลคูณ และผลหาร จึงใช้ได้กับความต่อเนื่องด้วย นอกจากนั้น กฎเกี่ยวกับฟังก์ชันประกอบก็ใช้ได้คือ

(1) ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ (a,b) และ $\lim\limits_{s\to c} u(s)=a,\quad \lim\limits_{t\to d} v(t)=b$

จะได้ว่า $\lim\limits_{(s,t)\to(c,d)} f\big(u(s),v(t)\big) = (a,b)$