$$f(x,y) = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$g(x,y) = 0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

โดยทั่วๆ ไปได้อย่างไร

วิธีการที่จะกล่าวถึงนี้เป็นวิธีการของนิวตัน ซึ่งทำได้โดยใช้ดิฟเฟอเรนเชียลประมาณ $f(x,y)$กับ $g(x,y)$ ด้วยฟังก์ชันที่พจน์ x, y มีกำลังไม่เกินหนึ่ง แล้วหารากของสมการที่ได้จากการประมาณดังกล่าว

วิธีการก็คือ

1) เราเลือกค่าประมาณ (x_0, y_0) มาคู่หนึ่ง

2) ใช้ดิฟเฟอเรนเชียลที่จุดนั้นประมาณ f กับ g ด้วย f^* กับ g^* ตามลำดับ

3) แก้ระบบสมการ

$$f^*(x,y) = 0 \quad \ldots\ldots(1^*)$$

$$g^*(x,y) = 0 \quad \ldots\ldots(2^*)$$

4) ใช้รากที่ได้เป็นค่าประมาณคู่ใหม่ แล้ว ทำข้อ 1) - 4) ด้วยค่าประมาณคู่ใหม่ จนได้ค่าประมาณที่ดีพอ

วิธีทำโดยสังเขปมีดังนี้

ดิฟเฟอเรนเชียลของ f ที่ (x_0, y_0) คือ

$$df(x_0,y_0)(h,k) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}k$$

จึงได้ค่าประมาณของ $f(x,y)$ เป็น

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) \\ &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \end{aligned}$$

ขวามือก็คือค่าของ f^* ที่กล่าวไว้ข้างต้น

ดังนั้น ฟังก์ชัน f^* ที่ใช้ประมาณ f คือ

$$f^*(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

และในทำนองเดียวกัน g^* ที่ใช้ประมาณ g คือ

$$g^*(x,y) = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

จึงเขียนระบบสมการที่ใช้ประมาณราก

$$f^*(x,y)=0 \quad ......(1^*)$$
$$g^*(x,y)=0 \quad ......(2^*)$$

ได้เป็น . . .

$$f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)=0$$

กับ

$$g(x_0,y_0)+\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)=0$$

ซึ่งจัดพจน์เสียใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)=-f(x_0,y_0) \quad ...(1^{**})$$
$$\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)=-g(x_0,y_0) \quad ...(2^{**})$$

ในระบบสมการที่ได้นี้ พจน์ไม่ทราบค่า คือ

$$x-x_0 \quad \text{กับ} \quad y-y_0$$

เราแก้ระบบสมการนี้ได้โดย**กฎของคราเมอร์**(Cramer)

ตัวอย่าง 14.5.1 จงแสดงการประมาณรากของระบบสมการ

$$y=x^2-4$$
$$x=y^2-1$$

โดยวิธีของนิวตัน และใช้ค่าเริ่มต้นเป็น (2,3)

วิธีทำ ก่อนอื่นเราให้

$$f(x,y)=y-x^2+4=0 \qquad ...(1)$$
$$g(x,y)=x-y^2+1=0 \qquad ...(2)$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x \quad ...(1x^*)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1 \quad ...(1y^*)$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 1 \quad ...(2x^*)$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = -2y \quad ...(2y^*)$$

จากสูตร

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0) = -f(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0) + \frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0) = -g(x_0,y_0)$$

แทนค่าลงในสูตร

$$-2x_0(x-x_0) + (y-y_0) = -(y_0 - {x_0}^2 + 4)$$
$$(x-x_0) - 2y_0(y-y_0) = -(x_0 - {y_0}^2 + 1)$$

โดย กฎของคราเมอร์ เราได้ว่า

$$x = x_0 + \frac{y_0^2 - 2y_0x_0^2 + 8y_0 + x_0 + 1}{4x_0y_0 - 1} \quad ...(1^{**})$$
$$y = y_0 + \frac{x_0^2 - 2x_0y_0^2 + 2x_0 + y_0 + 4}{4x_0y_0 - 1} \quad ...(2^{**})$$

ต่อไปจะแสดงการใช้เครื่องคิดเลขช่วยในการคำนวน

1. ล้างทุกอย่างออกจาก memory โดย กด $\boxed{\text{SHIFT}}$ + $\boxed{\text{MODE}}$, $\boxed{3}$, $\boxed{=}$
2. พิมพ์สูตร (1**) เข้าเครื่อง คือ

$$A = X + (Y \hat{}\, 2 - 2YX \hat{}\, 2 + 8Y + X + 1) \div (4XY - 1)$$

โดยที่ตัวอักษรกดโดย ใช้ปุ่ม $\boxed{\text{ALPHA}}$ + ตัวอักษรสีชมพูที่ต้องการเช่น

$\boxed{\text{ALPHA}}$ + $\boxed{\text{(-)}}$ เราจะได้ตัวอักษร A ออกมา

3. กด $\boxed{\text{CALC}}$ แล้วเครื่องจะถามว่า X? ให้เราใส่ค่า X_0 ลงไปแล้วกด $\boxed{=}$
4. เครื่องจะถามเราต่อว่า Y? ให้เราใส่ค่า Y_0 ลงไปแล้วกด $\boxed{=}$ เราจะได้ค่า A ออกมา

5. พิมพ์สูตร (2**) เข้าเครื่องคือ

$$B = Y + (X \,\hat{}\, 2 - 2XY \,\hat{}\, 2 + 2X + Y + 4) \div (4XY - 1)$$

6. กด $\boxed{\text{CALC}}$ แล้วเครื่องจะถามว่า X? ให้เราใส่ค่า X_0 ลงไปแล้วกด $\boxed{=}$

7. เครื่องจะถามเราต่อว่า Y? ให้เราใส่ค่า Y_0 ลงไปแล้วกด $\boxed{=}$ เราจะได้ค่า B ออกมา

8. นำค่า A ไปใส่ใน X โดย

$$\boxed{\text{RCL}}\ ,\ \boxed{\text{A}}\ ,\ \boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{RCL}}\ ,\ \boxed{\text{X}}$$

และค่า B ไปใส่ใน Y โดย

$$\boxed{\text{RCL}}\ ,\ \boxed{\text{B}}\ ,\ \boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{RCL}}\ ,\ \boxed{\text{Y}}$$

ซึ่งตอนนี้ ค่าใน X คือ X_1 , และ ค่าใน Y คือ Y_1

ต่อมาเป็นการหาค่า X_2 และ Y_2

9. กลับไปที่สูตร A = ……โดย กด $\triangle$

เมื่อพบให้กด $\boxed{\text{CALC}}$ เมื่อถามค่า X? ให้กด $\boxed{=}$

เมื่อถามค่า Y? ให้กด $\boxed{=}$

จะได้ค่า A ใหม่ ซึ่งคือ $X_2 = 2.423498018$

10. กลับไปที่สูตร B = …… แล้วกด $\boxed{\text{CALC}}$ เมื่อถามค่า X? ก็กด $\boxed{=}$

เมื่อถามค่า Y? ให้กด $\boxed{=}$

จะได้ค่า B ใหม่ ซึ่งก็คือ $Y_2 = 1.863691328$

11. กลับไปทำแบบข้อ 8 เก็บค่า X_2 ใน X และ เก็บค่า Y_2 ใน Y

ทำซ้ำข้อ 9-11 เพื่อหาค่า X_3 , Y_3 อีกรอบเป็นค่า X_4 , Y_4 และต่อไปเรื่อย ๆ ได้ค่า X_n ,Y_n และหยุดเมื่อได้ค่า $X_n = X_{n+1}$ และ $Y_n = Y_{n+1}$

12. ทำอีกรอบหาค่า X_3 , Y_3 เราจะได้ค่า

X_3=2.418469398 และ Y_3=1.848968941
X_4=2.418451025 และ Y_4=1.84890536
X_5=2.418451025 และ Y_5=1.848905358
X_6=2.418451025 และ Y_6=1.848905358

ดังนั้น รากของสมการ

$$y = x^2 - 4$$
$$x = y^2 - 1$$

มีค่าประมาณ X=2.418451025 และ Y=1.848905358 ■

ตัวอย่าง 14.5.2 จงแสดงการประมาณรากของระบบสมการ

$$x^2 + y^2 = 25 \quad .....(1)$$
$$x^2 - 2y = 1 \quad .....(2)$$

โดยวิธีของนิวตัน

ก) ใช้ค่าเริ่มต้นเป็น $(2,3)$

ข) ใช้ค่าเริ่มต้นเป็น $(-2,3)$

วิธีทำ พิจารณารากของระบบสมการ

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$g(x,y) = x^2 - 2y - 1 = 0$$

จะได้ว่า $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$

และ $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = -2$

จากกฎของคราเมอร์ จะได้ว่า

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -\left(x_0^2 + y_0^2 - 25\right) & 2y_0 \\ -\left(x_0^2 + 2y_0 - 1\right) & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 2x_0 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2\left(x_0^2 + y_0^2 - 25\right) + 2y_0\left(x_0^2 - 2y_0 - 1\right)}{-4x_0 - 4x_0\,y_0}$$

ดังนั้น $$x = x_0 + \frac{2\left(x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - 25\right) + 2y_0\left(x_0^{\,2} - 2y_0 - 1\right)}{-4x_0 - 4x_0\, y_0}$$

และ $$y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2x_0 & -\left(x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - 25\right) \\ 2x_0 & -\left(x_0^{\,2} - 2y_0 - 1\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 2x_0 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2x_0\left(x_0^{\,2} - 2y_0 - 1\right) + 2x_0\left(x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - 25\right)}{-4x_0 - 4x_0\, y_0}$$

ดังนั้น $$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{-2x_0\left(x_0^{\,2} - 2y_0 - 1\right) + 2x_0\left(x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - 25\right)}{-4x_0 - 4x_0\, y_0} \\ &= y_0 + \frac{4x_0\, y_0 - 48x_0 + 2x_0\, y_0^{\,2}}{-4x_0 - 4x_0\, y_0} = y_0 + \frac{2y_0 + y_0^{\,2} - 24}{-2x_0 - 2y_0} \end{aligned}$$

เมื่อ $\left(x_0\,, y_0\right) = (2,3)$ แทนค่าหา x_1, y_1 และ $x_2, y_2\,, \ldots$ โดยใช้เครื่องคิดเลข

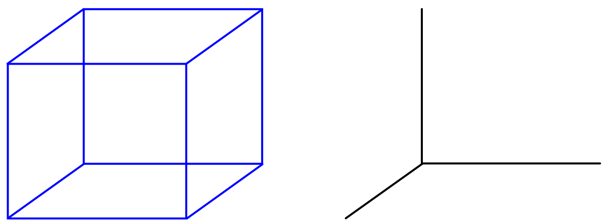
(นิสิตทำต่อเป็นแบบฝึกหัด) ■

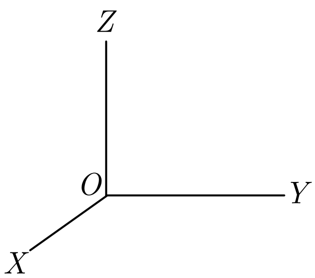
แบบฝึกหัด 14.5

1. จงร่างกราฟของ $y = 2x^2 - 3$ กับ $x = 1 - y^2$
2. จงพิจารณาว่ากราฟทั้งสองตัดกันที่ใดบ้างหรือไม่ หากตัดกัน จงประมาณพิกัดของจุดตัดแต่ละจุดอย่างคร่าวๆ
3. ใช้วิธีของนิวตันประมาณพิกัดของจุดตัดแต่ละจุดโดยใช้ค่าประมาณอย่างคร่าวๆ ในข้อ 2 เป็นจุดเริ่มต้น

14.6 กราฟของฟังก์ชันสองตัวแปร

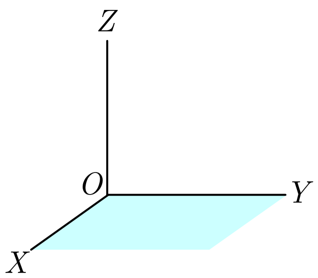
การเขียนกราฟของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรนั้น เราทำบนพื้นราบซึ่งมีสองมิติ โดยใช้แกนพิกัดตั้งฉากกันสองแกน แกนหนึ่งไว้เป็นค่าของตัวแปรอิสระ กับอีกอีกแกนหนึ่งไว้เป็นค่าของตัวแปรตาม (โดยทั่วไปคือ x กับ y ตามลำดับ) ในการเขียนกราฟของฟังก์ชันของสองตัวแปร เราต้องใช้แกนพิกัดที่ตั้งฉากกันสามแกน ซึ่งอาจทำได้ในอวกาศสามมิติ แต่จะทำได้ไม่สะดวก เราจึงนิยมเขียนขึ้นในจินตนาการ แล้วสื่อด้วยภาพในลักษณะของภาพถ่าย ซึ่งถ่ายลงบนพื้นราบสองมิติ ตัวอย่างเช่นในภาพซ้ายมือ แต่ละมุมมีเส้นตั้งฉากกันสามเส้น

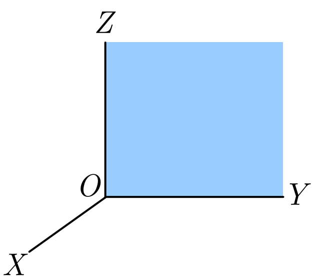


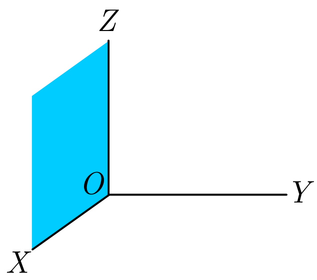


เมื่อลบออกเสียจำนวนหนึ่งก็จะได้ภาพขวามือ เราจึงมองได้ว่าภาพขวามือหมายถึงแกนตั้งฉากกันสามแกน เราจะใช้แกนสามแกนนี้เป็นแกน x แกน y และแกน z ใช้จุดตัดกันเป็น origin O ใช้แกนดิ่งเป็นแกน z ใช้แกนนอนเป็นแกน y ใช้แกนที่เหลือซึ่งเป็นแกนที่ดูเสมือนว่าพุ่งออกมาเป็นแกน x

ในบรรดาแกนทั้งสามนี้ เมื่อพิจารณาทีละสองแกนย่อมมีระนาบ(แผ่นเรียบ) ผ่านระนาบหนึ่ง



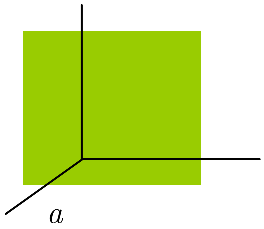




เราเรียกระนาบที่ผ่าน แกน x กับแกน y ว่าระนาบ xy

เราเรียกระนาบที่ผ่าน แกน y กับแกน z ว่าระนาบ yz

เราเรียกระนาบที่ผ่าน แกน x กับแกน z ว่าระนาบ xz



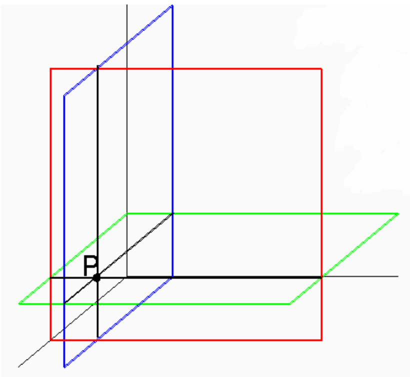
จุดแต่ละจุดในอวกาศสามมิติมีพิกัด (x, y, z) เทียบกับแกนพิกัดดังนี้

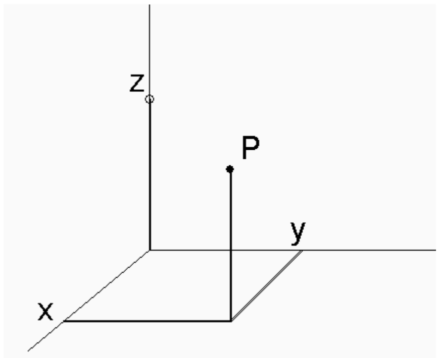
เราถือว่าจุดทุกจุดในระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x ที่จุด a บนแกน x มีค่า x เป็น a และทำนองเดียวกันสำหรับจุดบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y และจุดบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z

เราหาพิกัดของจุดใดๆในอวกาศสามมิติเทียบกับแกนพิกัดชุดใดๆ ได้โดยสร้างระนาบผ่านจุดนั้นสามระนาบ ระนาบหนึ่งตั้งฉากกับแกน x ระนาบหนึ่งตั้งฉากกับแกน y และอีกระนาบหนึ่งตั้งฉากกับแกน z

ค่า x, y, z ที่ระนาบตัดแกนก็คือพิกัดของจุด

ระนาบผ่าน P สามระนาบ ระนาบหนึ่งตั้งฉากกับแกน x ระนาบหนึ่งตั้งฉากกับแกน y และอีกระนาบหนึ่งตั้งฉากกับแกน z





ระนาบทั้งสามที่ผ่าน P ตั้งฉากกับแกนต่างๆ ทั้งสามตัดแกนที่ x, y, z ตามลำดับ P จึงมีพิกัด (x,y,z)

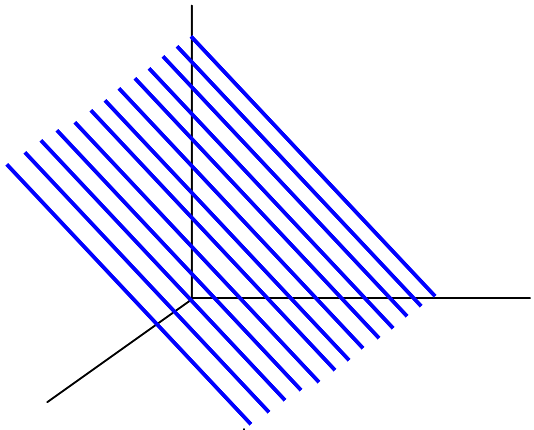
เราเรียกฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่ได้จากการกำหนดอีกตัวแปรหนึ่งให้มีค่าคงตัวว่า **ภาคตัด**(section) ของฟังก์ชัน เราอาจพิจารณาให้เกิดจินตนาการเห็นกราฟของฟังก์ชันของสองตัวแปรได้โดยการเขียนกราฟของภาคตัดต่างๆ ของฟังก์ชันต่อไปนี้ จะแสดงตัวอย่างของกราฟของภาคตัดของฟังก์ชันๆ หนึ่ง สำหรับ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ นั่นคือ กราฟของ $z = f(0,y)$ $z = f(1,y)$ $z = f(2,y)$ $z = f(3,y)$ ...

กราฟของ $z = f(0,y)$ บนระนาบ $x = 0$

กราฟของ $z = f(1,y)$ บนระนาบ $x = 1$

กราฟของ $z = f(2,y)$ บนระนาบ $x = 2$

ฯลฯ



กราฟในตัวอย่างที่ได้เห็นนั้นเป็นระนาบ ฟังก์ชันใดๆ ที่มีสูตรในรูป

$$f(x,y) = ax + by + c$$

ล้วนมีกราฟเป็นระนาบ

ฟังก์ชัน $f*$ กับ $g*$ ที่เราใช้ประมาณ f กับ g ในเรื่องการประมาณรากของสมการต่างก็มีกราฟเป็นระนาบ ระนาบที่ได้มาด้วยวิธีการดังกล่าวเป็นระนาบที่สัมผัสกับกราฟของ f และ g ตามลำดับ ดังนั้นเราจึงมีสูตรสำหรับใช้หาสมการของระนาบสัมผัสของกราฟของ $z = f(x,y)$ ที่จุด (x_0, y_0) เป็น

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

ตัวอย่าง 14.6.1 จงร่างกราฟของภาคตัดของ

$$z = 8 - x^2 - 3y^2$$

โดยระนาบต่อไปนี้

$$x = 0,\ x = 1,\ y = 0 \text{ และ } y = 1$$

ตัวอย่าง 14.6.2 จงหาสมการระนาบสัมผัสของ

$$z = 8 - x^2 - 3y^2$$

ที่จุด (1,1) แล้วจงร่างกราฟของระนาบสัมผัสดังกล่าว

ตัวอย่าง 14.6.3 จงหาว่าจุดใดบนกราฟของ

$$z = 8 - x^2 - 3y^2$$

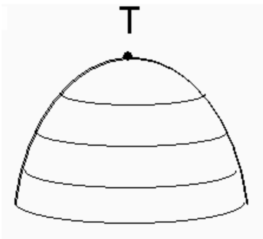
มีระนาบสัมผัสอยู่ในแนวราบ (คือมีสมการในรูป $z = k$)

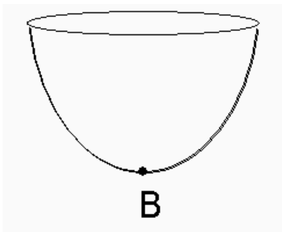
14.7 ค่าสูงสุดค่าต่ำสุดของฟังก์ชันสองตัวแปร

เรานิยามค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันของสองตัวแปรได้ในทำนองเดียวกันกับ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

บทนิยาม 14.7.1 เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) **ที่จุด** (x_0, y_0) ถ้ามีช่วงเปิด (a,b) รอบๆ x_0 กับช่วงเปิด (c,d) รอบๆ y_0 ซึ่ง $f(x,y) \le f(x_0, y_0)$ ทุกๆจุด (x,y) ในส่วนร่วมของ $(a,b)\times(c,d)$ กับโดเมนของ f

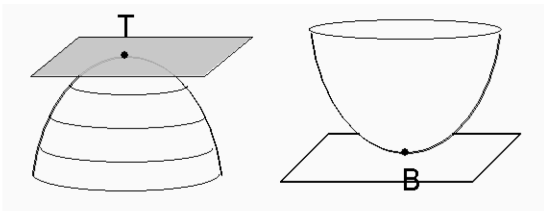
เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum) **ที่จุด** (x_0, y_0) ถ้ามีช่วงเปิด (a,b) รอบๆ x_0 กับช่วงเปิด (c,d) รอบๆ y_0 ซึ่ง $f(x,y) \ge f(x_0, y_0)$ ทุกๆจุด (x,y) ในส่วนร่วมของ $(a,b)\times(c,d)$ กับโดเมนของ f





ข้อสังเกต

ที่จุดซึ่งฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดนั้น ระนาบสัมผัสขนานกับระนาบ xy



จึงมีสมการในรูป $z =$ ค่าคงตัว นั่นคือ ระนาบสัมผัส

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

มีสมการในรูป

$$z = 0x + 0y + c$$

ซึ่งแสดงว่า

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

ทฤษฎีบท 14.7.2 *ถ้า f มีดิฟเฟอเรนเชียลที่ (x_0, y_0) และมีค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดที่จุดนั้น เราต้องได้ว่า*

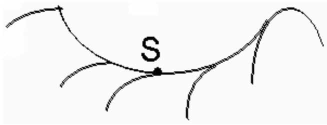
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

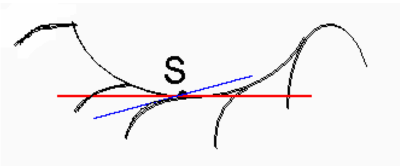
หมายเหตุ

บทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่จริง คือมีฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่มีดิฟเฟอเรนเชียลที่บางจุด (x_0, y_0) และ

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

แต่ค่าที่จุดนั้นไม่ใช่ทั้งค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด เช่นฟังก์ชันที่มีกราฟทางขวามือ





ที่จุด S บนกราฟในรูปนี้ จะเห็นได้ว่าเส้นสัมผัสของภาคตัดหนึ่งอยู่ใต้กราฟ แต่ของอีกภาคตัดหนึ่ง (ในอีกแนวหนึ่ง) อยู่เหนือกราฟ และเส้นสัมผัสทั้งสองมีความชันเป็นศูนย์ แสดงว่าระนาบสัมผัสที่จุดนี้มีสมการในรูป

$z =$ ค่าคงตัว

แต่ที่จุด S ดังกล่าวค่าของฟังก์ชันไม่เป็นทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เราเรียกจุดที่ระนาบสัมผัสอยู่ในแนวราบแต่ไม่เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์และไม่เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ว่า **จุดอานม้า** (saddle point)

ทฤษฎีบท 14.7.3 *ถ้า f มีดิฟเฟอเรนเชียลที่ (x_0, y_0) และอนุพันธ์ ย่อย*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

ให้ $A = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ *และ* $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$

เราจะได้ว่า

1) ถ้า $\Delta < 0$ *จุด* (x_0, y_0) *เป็นจุดอานม้า*

2) ถ้า $\Delta > 0$ *และ $A > 0$ จุด* (x_0, y_0) *เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์*

3) ถ้า $\Delta > 0$ *และ $A < 0$ จุด* (x_0, y_0) *เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์*

4) ถ้า $\Delta = 0$ *ไม่มีข้อสรุป*

หมายเหตุ

จะเห็นได้ว่าที่จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ จุดอานม้า อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรต่างๆ ต้องเป็นศูนย์ทุกตัว เราจึงเรียกจุดเหล่านี้รวมๆ กันว่า **จุดวิกฤต** (critical point)

ตัวอย่าง 14.7.1 จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้ และจงจำแนกว่าเป็นจุดวิกฤตชนิดใด (จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือ จุดอานม้า) และจงหาค่าของฟังก์ชันที่แต่ละจุด

$$1)\quad f(x,y) = 5 + 3x - 2y + 6xy$$

$$2)\quad f(x,y) = 5 - 2x - 6y + x^2 + y^2$$

วิธีทำ 1.) $f(x,y) = 5 + 3x - 2y + 6xy$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 5 + 6y = 0 \qquad \therefore y = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2 + 6x = 0 \qquad \therefore x = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น จุดวิกฤตคือ $(x,y) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

$$A = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3 + 6y) = 0$$

$$B = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2 + 6x) = 6$$

$$C = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2 + 6x) = 0$$

ดังนั้น
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0 - 6^2 = 36 < 0$$

เพราะฉะนั้น $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ เป็นจุดอานม้า

และ $f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) = 5 + 3\left(\frac{1}{3}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ ■

วิธีทำ 2.) $f(x,y) = 5 - 2x - 6y + x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2 + 2x = 0 \qquad \therefore x = 1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -6 + 2y = 0 \qquad \therefore y = 3$$

ดังนั้น จุดวิกฤตคือ $(x,y) = (1,3)$

$$A = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-2+2x) = 2$$

$$B = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-6+2y) = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-6+2y) = 2$$

ดังนั้น
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 4 - 0 = 4 > 0$$

เพราะฉะนั้น $(1,3)$ เป็นจุดต่ำจุดสัมพัทธ์

และ $f(1,3) = 5 - 2(1) - 6(3) + (1)^2 + (3)^2 = -5$ ■

ตัวอย่าง 14.7.2 จงหาค่าต่ำสุดของ $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+y-6)^2$

แนววิธีทำ ฟังก์ชันนี้มีความต่อเนื่องและมีขอบเขตล่าง จึงย่อมมีค่าต่ำสุด ซึ่งก็ต้องเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ฟังก์ชันนี้มีดิฟเฟอเรนเชียลที่ทุกจุด ดังนั้นที่จุดที่มีค่าต่ำสุดต้องมีอนุพันธ์ย่อยเป็นศูนย์ จึงหาค่าต่ำสุดได้จากบรรดาจุดที่มีอนุพันธ์ย่อยเป็นศูนย์

วิธีทำ พิจารณา $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+y-6)^2$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2(x-1) + 2(x+y-6) = 4x + 2y - 14$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2(y-2) + 2(x+y-6) = 2x + 4y - 16$$

ให้
$$4x + 2y - 14 = 0 \qquad \cdots(1)$$

$$2x + 4y - 16 = 0 \qquad \cdots(2)$$

จะได้ว่า
$$(2) \times 2;\ 4x + 8y - 32 = 0 \qquad \cdots(3)$$

$$(3) - (1);\ 6y - 18 = 0$$

$$\therefore y = 13$$

แทนค่า $y = 3$ ใน (1) จะได้ $x = 2$

ดังนั้น จุดวิกฤตคือ $(2,3)$

$$A = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 4, \quad B = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2, \ C = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 4$$

ดังนั้น
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 16 - 4 = 12 > 0$$

ฉะนั้น $(2,3)$ เป็นจุดต่ำจุดสัมพัทธ์

และ $f(2,3) = (2-1)^2 + (3-2)^2 + (2+3-6)^2 = 3$

นั่นคือ ค่าต่ำสุด$= 3$ ■

ตัวอย่าง 14.7.3 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 3y^2 - 15x + 2$$

วิธีทำ

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6xy + 6y$$

$$3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \qquad \cdots(1)$$

$$6xy + 6y = 0 \qquad \cdots(2)$$

นั่นคือ
$$6y(x+1) = 0$$

ดังนั้น
$$y = 0 \quad \text{หรือ} \quad x = -1$$

ถ้า $y = 0$ แทนค่าใน (1); $3x^2 + 3(0)^2 - 25 = 0, \ x = \pm\sqrt{5}$

ถ้า $x = -1$ แทนค่าใน (1); $3(-1)^2 + 3y^2 - 15 = 0, \ y = \pm 2$

ดังนั้นจุดวิกฤตคือ $\left(\sqrt{5},0\right), \left(-\sqrt{5},0\right), (-1,2), (-1,-2)$

$$A = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x$$

$$B = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 6y$$

$$C = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6x + 6$$

จุดวิกฤต	$A=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x$	$B=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = 6y$	$C=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6x+6$	$\Delta = AC-B^2$	
$(\sqrt{5},0)$	$6\sqrt{5}>0$	0	$6\sqrt{5}+6$	$180+36\sqrt{5}>0$	จุดต่ำสุดสัมพัทธ์
$(-\sqrt{5},0)$	$-6\sqrt{5}<0$	0	$-6\sqrt{5}+6$	$180-36\sqrt{5}>0$	จุดสูงสุดสัมพัทธ์
$(-1,2)$	-6	12	0	$-144<0$	จุดอานม้า
$(-1,-2)$	-6	-12	0	$-144<0$	จุดอานม้า

ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $= f\left(\sqrt{5},0\right) = \left(\sqrt{5}\right)^3 + 3\sqrt{5}(0) + 0 - 15\sqrt{5} + 2 = 2 - 10\sqrt{5}$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $= f\left(-\sqrt{5},0\right) = 2 + 10\sqrt{5}$

และ จุด $(-1,2)$ และ $(-1,-2)$ เป็นจุดอานม้าของ f ■

■ วิธีกำลังสองน้อยสุด

ในการหาความรู้ทางวิทยาศาสตร์ ปัญหาหนึ่งก็คือ การหาสูตรที่เข้ากันได้ดีกับข้อมูลจากสังเกตการณ์ เช่น เราได้จากการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลว่าขนาดของประชากรควรมีการเติบโตตามสูตร

$$N(t) = \frac{M}{1+Ce^{-Mrt}}$$

โดยที่ $M,\ C,\ r$ เป็นค่าคงตัวที่เรายังไม่ทราบค่า เราต้องหาค่ามาแทนค่าคงตัวเหล่านี้ ให้ได้สูตรที่ fit กันดีกับข้อมูลจากสังเกตการณ์ วิธีการทั่วๆ ไปมีดังนี้

สมมติว่าเรามีข้อมูล

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & y_n \end{array}$$

และต้องการหาสูตร ในรูป $y=f(x)$ ที่ fit กับข้อมูลชุดนี้ ในที่นี้ f เป็นสูตรที่มีตัวคงค่าที่เรายังไม่ทราบค่าอยู่จำนวนหนึ่ง เราใช้

$$E = \sum_{j=1}^{n} (y_j - f(x_j))^2$$

เป็นตัววัดว่าค่าสังเกตการณ์กับค่าที่คิดจากสูตรห่างกันเท่าใด E บอกให้เราทราบถึงความคลาดเคลื่อน วิธีกำลังสองน้อยสุดก็คือวิธีที่เลือกค่าคงตัวชุดที่ทำให้ E มีค่าน้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้

ตัวอย่าง 14.7.4 กำหนดให้ว่าปริมาณ y ขึ้นอยู่กับ x ด้วยสูตรในรูป

$$y = a + bx$$

จงแสดงการหาค่า a กับ b ที่ fit กับข้อมูล x_j, y_j , $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

ตัวอย่าง 14.7.5

1. กำหนดให้ว่าปริมาณ y ขึ้นอยู่กับ x ด้วยสูตรในรูป

$$y = a + \frac{b}{x}$$

จงแสดงการหาค่า a กับ b ที่ fit กับข้อมูล x_j, y_j , $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

2. ถ้าสูตรในโจทย์ข้างบนเป็น

$$y = ax + b\sin(\pi x)$$

จงแสดงการหาค่า a กับ b ที่ fit กับข้อมูลในทำนองเดียวกัน

แบบฝึกหัด 14.7

1. จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้ และจงจำแนกว่าเป็นจุดวิกฤตชนิดใด และจงหาค่าของฟังก์ชันที่แต่ละจุด

   1.1 $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5$

   1.2 $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 4y + 7$

   1.3 $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 - y^2$

   1.4 $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$

2. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (ถ้ามี)

   2.1 $f(x,y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$

   2.2 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$

   2.3 $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$

   2.4 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$

   2.5 $f(x,y) = x^2 + y - e^y$

2.6 $f(x,y) = 4xy - x^2y + 2xy^2$

2.7 $f(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} - 4x + y$

2.8 $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + \dfrac{2}{x^2y}$

2.9 $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y;\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\quad 0 < y < \dfrac{\pi}{2}$

2.10 $f(x,y) = \dfrac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$

14.8 อนุพันธ์ระบุทิศทาง

อนุพันธ์ย่อยบอกให้เราทราบถึงอัตราการแปรค่าของฟังก์ชันในทิศทางของแกนพิกัด ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้แกน x อยู่ในทิศตะวันออก-ตะวันตก และ ให้แกน y อยู่ในทิศเหนือ-ใต้ ให้ $f(x,y)$ บอกค่าของปริมาณบางอย่างที่จุด (x,y) เช่นอาจให้ $f(x,y)$ เป็นอุณหภูมิที่ (x,y) เป็นต้น เช่นนี้ อนุพันธ์เทียบกับ x ก็คืออัตราการแปรเปลี่ยนอุณหภูมิเมื่อเราเคลื่อนไปทางทิศตะวันออก และอนุพันธ์เทียบกับ y ก็คือ อัตราการแปรเปลี่ยนอุณหภูมิเมื่อเราเคลื่อนไปทางทิศเหนือ

การวัดอัตราการแปรเปลี่ยนค่าของฟังก์ชันนั้นได้จำกัดอยู่เพียงสองทิศทางนี้เท่านั้น เราอาจวัดในทิศทางใดก็ได้ เช่นวัดอัตราการแปรค่าของอุณหภูมิเมื่อเคลื่อนไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นต้น เราบอกทิศทางในระนาบได้ด้วยเวกเตอร์หน่วยซึ่งแทนได้ด้วยคู่อันดับที่มีผลบวกของกำลังสองเท่ากับหนึ่ง เช่น $(0.6, 0.8)$ เป็นต้น

บทนิยาม 14.8.1 ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร และ $u = (a,b)$ เป็นเวกเตอร์หน่วย ถ้า

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((x,y) + h(a,b)) - f(x,y)}{h}$$

มีค่า เราเรียกค่าลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (x,y) ในทิศของ u** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'((x,y);u)$

ข้อสังเกต ถ้า $u = (1,\ 0)$ หรือ $u = (0,\ 1)$ อนุพันธ์ในทิศของ u ก็คือ อนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y ตามลำดับ

ตัวอย่าง 14.8.1 กำหนดให้ $f(x,y)=3x^2y$ จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (2,1) ในทิศของ $\vec{u}=(0.6,0.8)$ **โดยคำนวณจากบทนิยาม**

วิธีทำ ให้ $\vec{u}=(0.6,0.8)$ จะได้ว่า $|\vec{u}|=\sqrt{(0.6)^2+(0.8)^2}=1$

ดังนั้น
$$f'((2,1);\vec{u})=\lim_{h\to 0}\frac{f((2,1)+h(0.6,0.8))-f(2,1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+0.6h,1+0.8h)-f(2,1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+0.6h)^2(1+0.8h)-3(4)(1)}{h}=16.8$$
■

> ***ทฤษฎีบท 14.8.2*** *ให้ $u=(a,b)$ เป็นเวกเตอร์หน่วยใดๆ ถ้า f มีดิฟเฟอเรนเชียลที่ (x_0,y_0) จะได้ว่า อนุพันธ์ของ f ที่ (x_0,y_0) ในทิศทางของ u มีค่า*
> $$f'((x_0,y_0);u)=a\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+b\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$

ตัวอย่าง 14.8.2 กำหนดให้ $f(x,y)=3x^2y$ จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (2,1) ในทิศของ $\vec{u}=(0.6,0.8)$ **โดยคำนวณจากทฤษฎีบท**

วิธีทำ ให้ $\vec{u}=(0.6,0.8)$ จะได้ว่า $|\vec{u}|=\sqrt{(0.6)^2+(0.8)^2}=1$
$$f'((2,1);(0.6,0.8))=(0.6)\frac{\partial f(2,1)}{\partial x}+(0.8)\frac{\partial f(2,1)}{\partial y}$$

เนื่องจาก $f(x,y)=3x^2y$ ดังนั้น
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=6xy \qquad \frac{\partial f(2,1)}{\partial x}=12$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^2 \qquad \frac{\partial f(2,1)}{\partial y}=12$$

จะได้ว่า $f'((2,1);(0.6,0.8))=(0.6)12+(0.8)12=16.8$ ■

ตัวอย่าง 14.8.3 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชันต่อไปนี้ ที่จุดที่กำหนดให้ และในทิศทางที่กำหนดให้

1. $f(x,y)=x^3y^2$ ที่จุด $(1,1)$ ในทิศทาง $(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$
2. $f(x,y)=5-x^2-3y^2$ ที่จุด $(1,0)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $(1,2)$

วิธีทำ 1. ให้ $\vec{u} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ จะได้ว่า $|\vec{u}| = \sqrt{(\frac{5}{13})^2 + (\frac{12}{13})^2} = 1$

เนื่องจาก $f(x,y) = x^3y^2$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2y^2 \qquad \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 3$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x^3y \qquad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 2$$

ดังนั้น
$$f'\left((1,1);(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})\right) = \frac{5}{13}(3) + \frac{12}{13}(2) = 3$$
■

วิธีทำ 2. ให้ $\vec{u} = (1,2)$ จะได้ว่า $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

นั่นคือ เวกเตอร์หน่วยในทิศทางของเวกเวอร์ $\vec{u} = (1,2)$ คือ $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$

เนื่องจาก $f(x,y) = 5 - x^2 - 3y^2$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial f(1,0)}{\partial x} = -2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -6y \qquad \frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = 0$$

ดังนั้น
$$f'\left((1,0);\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2) + \frac{2}{\sqrt{5}}(0) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$
■

หมายเหตุ ถ้าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ไม่เป็นเวกเตอร์หน่วย ต้องหาเวกเตอร์หน่วยในทิศนั้นมาใช้แทน

แบบฝึกหัด 14.8

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุดที่กำหนดให้ ในทิศทางเวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่กำหนดให้

   1.1 $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^3 : (-2,0) : \vec{u} = (1,2)$

   1.2 $f(x,y) = (1+xy)^{\frac{3}{2}} : (3,1) : \vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

   1.3 $f(x,y) = xe^y + ye^x : (1,2) : \vec{u} = (1,-1)$

   1.4 $f(x,y) = \ln(1+x^2+y) : (0,0) : \vec{u} = \frac{-1}{\sqrt{10}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$

   1.5 $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x} : (-2,2) : \vec{u} = (-1,-1)$

   1.6 $f(x,y) = y^2 \ln x : (1,4) : \vec{u} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$

1.7 $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 : (1,-1) : \vec{u} = (1,2)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = x^2y^5$
จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด $(3,1)$ ในทิศทางจากจุด $(3,1)$ ไปยังจุด $(4,-3)$

3. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}$ ที่ทำให้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด $(-2,0)$ ในทิศทางของ $\vec{u}$ มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $f(x,y) = xe^y$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y) = \sqrt{x}y$ ที่จุด $(1,4)$ ในทิศทางทำมุม $\dfrac{\pi}{3}$ เรเดียน กับแกน x ทางด้านบวก

5. กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

5.1 จงหา $f'((1,0),\vec{u})$ เมื่อ $\vec{u} = (-2,-1)$

5.2 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x,y)$ ที่จุด $(1,0)$ ในทิศทางจากจุด $(1,0)$ไปยังจุด $(-1,-1)$

6. ถ้า $f'((1,2),\vec{u}) = -5$ เมื่อ $\vec{u} = \dfrac{3}{5}\vec{i} - \dfrac{4}{5}\vec{j}$ และ

$f'((1,2),\vec{v}) = 10$ เมื่อ $\vec{u} = \dfrac{4}{5}\vec{i} + \dfrac{3}{5}\vec{j}$ จงหาค่าของ

6.1 $f_x(1,2)$ และ $f_y(1,2)$

6.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด $(1,2)$ ในทิศทางจากจุด $(1,2)$ ไปยังจุดกำเนิด

7. จงหา $\vec{u}$ ที่ทำให้ $f'((1,-1),\vec{u}) = 0$ เมื่อ $f(x,y) = x^3y^3 - xy$