ในกรณีที่ u, v เป็นฟังก์ชันของตัวแปร s เดียวกัน และ $\lim\limits_{s\to c} u(s) = a,\quad \lim\limits_{s\to c} v(s) = b$

จะได้ว่า $\lim\limits_{s\to c} f\left(u(s), v(s)\right) = f(a,b)$

(2) ถ้า g เป็นฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรที่มีความต่อเนื่องที่ c และ f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรซึ่งมีลิมิต $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$ ย่อมได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g\left(f(x,y)\right) = g(c)$

ตัวอย่าง 14.2.6 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x-y}$ จงแสดงการพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ใดบ้าง

วิธีทำ จะแสดงว่า f ต่อเนื่องทุกจุด (a,b) เมื่อ $a \neq b$

ให้ (a,b) เป็นจุดใดๆ ที่ $a \neq b$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} x = a,\quad \lim\limits_{y\to b} y = b$ ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x - y = a - b \neq 0$

ฉะนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f\left(x,y\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{x^2}{x-y}$ มีค่าลิมิตซึ่งเท่ากับ $\dfrac{a^2}{a-b} = f(a,b)$ ■

ตัวอย่าง 14.2.7 กำหนดให้ $f(s,t) = \dfrac{\sin(t)}{st}$ จงแสดงการพิจารณาหา $\lim\limits_{(s,t)\to(1,0)} f(s,t)$

วิธีทำ $\lim\limits_{(s,t)\to(1,0)} f(s,t) = \lim\limits_{(s,t)\to(1,0)} \left(\dfrac{\sin t}{t}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{s}\right)$

เนื่องจาก $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ และ $\lim\limits_{s\to 1} \dfrac{1}{s} = 1$

ดังนั้น $\lim\limits_{(s,t)\to(1,0)} f(s,t) = 1 \cdot 1 = 1$ ■

ตัวอย่าง 14.2.8

1. จงแสดงการพิจารณาว่า $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ มีความต่อเนื่องที่ใดบ้าง

2. จงแสดงการพิจารณาหาลิมิตต่อไปนี้

 2.1 $\lim\limits_{(s,t)\to(1,0)} \dfrac{e^{\frac{\sin(t)}{st}}}{s^2}$

 2.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \cos\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$

แบบฝึกหัด 14.2

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตมีค่า) ถ้าไม่มีค่า จงแสดงให้เห็น

1.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

1.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$

1.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^x(\cos x+\sin y)$

1.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^2}{x^4-y^2}$

1.5 $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1.6 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^3y+2x^2+3xy-y^2+5)$

1.7 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$

1.8 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

1.9 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

1.10 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^4+y^4}$

1.11 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

1.12 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{y^2x-y^2}{xy-y}$

1.13 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

1.14 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2-y^6}$

1.15 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}$

1.16 $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy-2x}{xy-6-2x+3y}$

1.17 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{y}$

1.18 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^2-y^4)^3}$

1.19 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y+x^2-y^2}{x^4-y^4}$

1.20 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\frac{1}{2})} \dfrac{2y^3-y^2+4xy-2x}{6x^2y+2y-3x^2-1}$

1.21 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-xy^3}{-xy^2-x^2y-x^3}$

1.22 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2+y^2}{x^2+y^2}$

1.23 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-x^2y}{x^2+y^2}$

1.24 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-3xy-3x+9y}{x-3y}$

2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชั่นต่อไปนี้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

2.1 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

2.2 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

2.3 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy - y}{x^2 + y^2 - 2x + 1} & ,(x,y) \neq (1,0) \\ 0 & ,(x,y) = (1,0) \end{cases}$

2.4 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 1 & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

2.5 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

2.6 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^8 + x^4y + y^2}{x^8 + y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ C & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

จงพิจารณาว่ามีจำนวนจริง C ที่ทำให้ f ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่เพราะเหตุใด

14.3 อนุพันธ์ย่อย

ในฟังก์ชันของสองตัวแปร $f(x,y)$ เมื่อเรากำหนดค่าให้กับตัวแปรหนึ่ง ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นฟังก์ชันของอีกตัวแปรที่เหลือ เช่นถ้าเรากำหนดให้ $y = 2$ ใน

$$f(x,y) = 3xe^{2xy} + 5y\sin(xy)$$

เราจะได้ว่า $f(x,2) = 3xe^{4x} + 10\sin(2x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว หรือถ้าให้ $x = 3$ จะได้ว่า $f(3,y) = 9e^{6y} + 5y\sin(3y)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว

เนื่องจาก $f(x,2)$ และ $f(3,y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรตัวเดียว เราจึงอาจนำความติดเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหนึ่งตัวแปรมาใช้กับฟังก์ชันเหล่านี้

อนุพันธ์ของ $f(x,2)$ ที่จุด x ใดๆ ก็คือ $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,2) - f(x,2)}{h}$

อนุพันธ์ของ $f(3,y)$ ที่จุด y ใดๆ ก็คือ $\displaystyle\lim_{k\to 0} \frac{f(3,y+k) - f(3,y)}{k}$

บทนิยาม 14.3.1 ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร

1) ถ้า $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ มีค่า เราเรียกค่าลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด (x,y) เทียบกับ x**

2) ถ้า $\lim_{k\to 0}\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ มีค่า เราเรียกค่าลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด (x,y) เทียบกับ y**

เราเขียนแทนอนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด (x,y) เทียบกับ x ด้วยสัญลักษณ์

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad D_x f(x,y),\quad f_x(x,y),\quad D_1 f(x,y)\quad \text{หรือ}\quad f_1(x,y)$$

และเขียนแทนอนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด (x,y) เทียบกับ y ด้วยสัญลักษณ์

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad D_y f(x,y),\quad f_y(x,y),\quad D_2 f(x,y)\quad \text{หรือ}\quad f_2(x,y)$$

ตัวอย่าง 14.3.1 กำหนดให้ $f(x,y)=3xe^{2xy}+5y\sin(xy)$ จงหา $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

วิธีทำ $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3\cdot e^{2xy}+(3x)\cdot e^{2xy}(2y)+5y\cdot\cos(xy)\cdot y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x\cdot e^{2xy}\cdot 2x+5\cdot\sin(xy)+5y\cdot\cos(xy)\cdot x$$ ■

ตัวอย่าง 14.3.2 กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & \text{เมื่อ } x=0 \text{ หรือ } y=0\\ 0, & \text{ในกรณีนอกนั้น}\end{cases}$

จงหา $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

วิธีทำ $\boxed{\text{I. หา } \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$ โดยแบ่งพิจารณาเป็นสองกรณี คือ $y\neq 0$ และ $y=0$

กรณี 1 $y\neq 0$

จะได้ว่า $$f(x,y)=\begin{cases}y & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$$

เมื่อ $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ f ไม่ต่อเนื่อง ทำให้ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ไม่มีค่า

ดังนั้น
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \text{ไม่มีค่า} & x \neq 0 \end{cases}$$

กรณี 2 $y = 0$

ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $f(x,y) = f(x,0) = x$

ดังนั้น
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1$$

ฉะนั้น เราจึงได้ว่า
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} 0, & y \neq 0,\ x = 0 \\ \text{ไม่มีค่า}, & y \neq 0,\ x \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$$ ■

วิธีทำ $\boxed{\text{II. หา } \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$

กรณี 1 $x \neq 0$

$$f(x,y) = \begin{cases} x & y = 0 \\ 0 & y \neq 0 \end{cases}$$

ถ้า $y \neq 0$ แล้ว $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial 0}{\partial y} = 0$

ถ้า $y = 0$ เนื่องจากฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $y = 0$ จะได้ $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}$ ไม่มีค่า

กรณี 2 $x = 0$

จะได้ว่า $f(x,y) = y, \quad f(0,y) = y$

นั่นคือ
$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \quad y \neq 0 \\ \text{ไม่มีค่า} & x \neq 0, \quad y = 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$ ■

ตัวอย่าง 14.3.3 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

จงหา $\dfrac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y}$

วิธีทำ

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2-3y^2)\cdot(x^2+y^2)-(x^2y-y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= \frac{(4x^3-8y^2x-0)(x^2+y^2)^2-(x^4-4x^2y^2-y^4)\cdot 2(x^2+y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^4}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y}\right) = \dfrac{(4-8)(2)^2-(-4)4(2)}{24} = 1$ ■

เราอาจพิจารณาได้ว่าอนุพันธ์ย่อยทั้งสองของ f ที่จุด (x,y) ใดๆ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร เราจึงอาจหาอนุพันธ์ของมัน ซึ่งจะได้อนุพันธ์ย่อยอันดับสูงๆ ขึ้นไป เราพิจารณาเขียนสัญลักษณ์ของอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงๆ ดังนี้

หากเราหาอนุพันธ์ย่อยของ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ เทียบกับ x เราจะได้ $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x})$ ซึ่งจะแทนได้ด้วย $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$

หรือ หาอนุพันธ์ย่อยของ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ เทียบกับ y เราจะได้ $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x})$ ซึ่งจะแทนได้ด้วย $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$

หรือ หาอนุพันธ์ย่อยของ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ เทียบกับ x เราจะได้ $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y})$ ซึ่งจะแทนได้ด้วย $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$

ตัวอย่าง 14.3.4 กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

จงหา $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$ และ $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$

วิธีทำ เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ จึงใช้สูตรหาอนุพันธ์ย่อยไม่ได้ เราจึงต้องหาค่าจากนิยาม

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(x+h,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{h}$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f(h,0)}{\partial y}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{h} \tag{14.3}$$

ต่อไปหาค่า $\dfrac{\partial f(h,0)}{\partial y}$ เพื่อแทนใน (14.3)

สังเกตว่า $h\neq 0$ ดังนั้น เราสามารถหาค่า $\dfrac{\partial f(h,0)}{\partial y}$ จากสูตรได้

นั่นคือ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{yx^2-y^3}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2)-(yx^2-y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f(h,0)}{\partial y}=\dfrac{h^2\cdot h^2}{h^4}-0=1$

ต่อไปหาค่า $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ เพื่อแทนใน (14.3)

เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ จึงใช้สูตรหาอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ ไม่ได้ เราจึงต้องหาค่าจากนิยาม

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{k(-k^2)}{k^2}-0}{k}=-1$$

แทนผลที่ได้ใน (14.3) จะได้ว่า $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\partial f(h,0)}{\partial y}-\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-(-1)}{h}=\infty$ ∎

ตัวอย่าง 14.3.5 กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองทั้งสี่แบบ

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

แบบฝึกหัด 14.3

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y)=3xy-4x^4y^4$

   1.2 $f(x,y)=\sqrt[3]{1-\cos^3(x^2y)}$

   1.3 $f(x,y)=\ln(\sec\sqrt{x+y})$

   1.4 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

   1.5 $f(x,y)=x^2+y^2\sin(xy)$

   1.6 $f(x,y)=4e^{x^2y^3}+\cos(x^5y^4)$

   1.7 $f(x,y)=x^{y^2}$

   1.8 $f(x,y,z)=y^3e^{2x+3z}$

   1.9 $f(x,y)=\arctan(\dfrac{y^2}{x})$

   1.10 $f(x,y)=e^{-\frac{x}{y}}+\ln(\dfrac{y}{x})$

2. กำหนดให้ $f(x,y)=x^2ye^{xy}$ จงหาค่าของ $D_1f(1,1)$ และ $D_2f(1,1)$

3. กำหนดให้ $f(x,y)=(x^2+2y^2)\sqrt{x^2-y^2}$ จงหาค่าของ $f_x(2,1)$ และ $f_y(2,1)$

4. กำหนดให้ $f(x,y,z)=x\sin(xyz)$ จงหาค่าของ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,\dfrac{1}{2},\pi)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,\dfrac{1}{2},\pi)$

5. กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ จงหาค่าของ $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$

6. กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}x^2y^3 & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ จงหาค่าของ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

7. กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-xy}{x+y} & ,x+y\neq 0\\ 0 & ,x+y=0\end{cases}$ จงหาค่าของ

   7.1 $D_1f(0,y)$ เมื่อ $y\neq 0$ และ $D_1f(0,0)$

   7.2 $D_2f(x,0)$ เมื่อ $x\neq 0$ และ $D_2f(0,0)$

8. กำหนดให้ $z = x\sin(\frac{x}{y}) + ye^{\frac{y}{x}}$ จงแสดงว่า $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$

9. กำหนดให้ $z = y^2 + \tan(ye^{\frac{1}{x}})$ จงแสดงว่า $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2y^2$

10. กำหนดให้ $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)\cos(\frac{y+z}{x})$ จงแสดงว่า $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 2f$

14.4 ดิฟเฟอเรนเชียล (differentials)

ในหัวข้อนี้ เราจะใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นประมาณค่าฟังก์ชัน f ที่จุดใกล้ๆ (x,y) ด้วยฟังก์ชันเชิงเส้น

ฟังก์ชันเชิงเส้นได้แก่ฟังก์ชัน L ใดๆ ที่มีคุณสมบัติว่า

$$L(u,v) = L(u) + L(v) \quad \text{ทุกๆ } u,\ v \text{ ใน } \mathbb{R}^2$$

และ

$$L(kv) = kL(v) \quad \text{ทุกๆ } k \text{ ใน } \mathbb{R} \quad \text{ทุกๆ } v \text{ ใน } \mathbb{R}^2$$

โดยอาศัยคุณสมบัติสองข้อนี้ จะพิสูจน์ได้ว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น L ใดๆ ต้องมีสูตรในรูป

$$L(x,y) = c_1x + c_2y$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่

เราจะหาฟังก์ชันเชิงเส้น L ฟังก์ชันหนึ่ง ซึ่งทำให้เราสามารถใช้ $f(x,y) + L(h,k)$ เป็นค่าประมาณของ $f(x+h, y+k)$ คือ

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + L(h,k)$$

ความคลาดเคลื่อนของการประมาณนี้ก็คือ

$$E(h,k) = |\, f(x+h, y+k) - (f(x,y) + L(h,k))\,|$$

เมื่อ (h,k) เข้าใกล้ (0,0) เราต้องการให้ $E(h,k)$ เข้าใกล้ศูนย์เร็วกว่า $|(h,k)|$

โดยอาศัยแนวคิดเดียวกันกับฟังก์ชันของตัวแปรเดียว จะพบว่าเราต้องหาฟังก์ชันเชิงเส้น L ซึ่ง

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{|\,(h,k)\,|} = 0$$

นั่นคือ ซึ่ง

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\, f(x+h, y+k) - f(x,y) - L(h,k)\,|}{|\,(h,k)\,|} = 0$$

บทนิยาม 14.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้า L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\, f(x+h, y+k) - f(x,y) - L(h,k)\,|}{|\,(h,k)\,|} = 0$$

เราเรียก L ว่าเป็น**ดิฟเฟอเรนเชียล (differential) ของ f ที่ (x,y)**

เราจะเขียนแทน L ด้วยสัญลักษณ์ $df(x,y)$ (ดังนั้น $df(x,y)(h,k)$ ก็คือ $L(h,k)$)

ทฤษฎีบท 14.4.2 *ถ้า f มีดิฟเฟอเรนเชียลที่ (x,y) ย่อมได้ว่า*

1) f มีความต่อเนื่องที่ (x,y)

2) ดิฟเฟอเรนเชียลที่ (x,y) มีสูตรว่า

$$df(x,y)(h,k) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} k$$

ดังนั้นจึงเขียนเงื่อนไข

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\, f(x+h, y+k) - f(x,y) - L(h,k)\,|}{|\,(h,k)\,|} = 0$$

เสียใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\, f(x+h, y+k) - f(x,y) - \{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} k\}\,\right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

ตัวอย่าง 14.4.1 จงใช้เงื่อนไขในบทนิยามและทฤษฎีบท 14.4.2 แสดงว่า $f(x,y) = xy^2$ มีดิฟเฟอเรนเชียลที่ (x,y) ใดๆ

ตัวอย่าง 14.4.2 กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{เมื่อ } x = 0 \text{ หรือ } y = 0 \\ 1, & \text{ในกรณีอื่นนั้น} \end{cases}$

จงใช้เงื่อนไขในบทนิยามและทฤษฎีบท 14.4.2 แสดงว่า f ไม่มีดิฟเฟอเรนเชียลที่ (0,0)

ทฤษฎีบท 14.4.3 *ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งทั้งสองของ f มีความต่อเนื่องที่ (x,y) f ย่อมมีดิฟเฟอเรนเชียลที่ (x,y)*

หมายเหตุ ตัวอย่าง 14.4.1 นั้นอาจทำอีกวิธีหนึ่งโดยใช้ทฤษฎีบท **14.4.3** นี้

เมื่อเริ่มต้น เราต้องการหาฟังก์ชันเชิงเส้น L ซึ่ง

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + L(h,k)$$

และบัดนี้ เราก็ได้แล้วว่า $L(h,k)$ ก็คือ

$$df(x,y)(h,k) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k$$

ดังนั้น เราก็มีสูตรสำหรับประมาณค่าฟังก์ชัน f ว่า

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &\approx f(x,y) + df(x,y)(h,k) \\ &= f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 14.4.3 ฟังก์ชัน f มีค่าที่ $x,\ y$ ใดๆ ซึ่ง $x>0,\ y>0$ เป็น

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{1+x+y}$$

เมื่อ $x=1,\ y=3$ เราได้ว่า $f(1.3)=1.8$ จงแสดงการใช้ดิฟเฟอเรนเชียลประมาณค่า $f(1.1,\ 2.8)$

วิธีทำ ใช้สูตร $f(x+h, y+k) \approx f(x,y) + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}k$

โดยให้ $x=1,\ y=3,\ h=0.1,\ k=-0.2$

ดังนั้น $f(1.1, 2.8) = f(1+0.1, 3+(-0.2))$

เนื่องจาก
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2(1+x+y)-xy^2}{(1+x+y)^2} = \frac{y^2+y^3}{(1+x+y)^2}$$

และ
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{(2xy)(1+x+y)-xy^2}{(1+x+y)^2}$$

จะได้ว่า
$$\frac{\partial f(1,3)}{\partial x} = \frac{36}{25} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f(1,3)}{\partial y} = \frac{21}{25}$$

ดังนั้น $f(1.1, 2.8) = f(1+0.1, 3+(-0.2)) = \dfrac{9}{5} + \dfrac{36}{25}(0.1) + \dfrac{21}{25}(-0.2)$ ■

ตัวอย่าง 14.4.4 ถ้าด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งยืดออก 2% แต่ด้านยาวหดลง 1% พื้นที่จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงประมาณกี่เปอร์เซ็นต์ จงแสดงวิธีการประมาณโดยใช้ดิฟเฟอเรนเชียล

วิธีทำ ให้ x และ y แทนความกว้างและความยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามลำดับ

ดังนั้น $f(x,y)=xy$ แทน พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จะใช้สูตร
$$f(x+h,y+k)\approx f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k$$

เนื่องจากความกว้างยืดออก 2% และความยาวลดลง 1%

ดังนั้น $h=\frac{2}{100}x\,,\ k=-\frac{1}{100}y$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y$ และ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x$

จะได้ว่า $f\left(x+\frac{2x}{100},y-\frac{y}{100}\right)\approx f\left(x,y\right)+y\frac{2x}{100}-\frac{xy}{100}=f\left(x,y\right)+\frac{xy}{100}=xy+\frac{xy}{100}$

ดังนั้นพื้นที่ใหม่เพิ่มขึ้น $\frac{xy}{100}$ หรือ $\frac{1}{100}=1\%$ ■

ตัวอย่าง 14.4.5 ทรงกระบอกตรงมีฐานเป็นวงกลม ถ้ารัศมีของฐานยืดออก 3% และส่วนสูงก็เพิ่มขึ้น 2% ปริมาตรจะเพิ่มขึ้นประมาณกี่เปอร์เซ็นต์ จงแสดงการประมาณโดยใช้ดิฟเฟอเรนเชียล

วิธีทำ ให้ r และ s แทนรัศมีและความสูงของทรงกระบอกตามลำดับ

ปริมาตรทรงกระบอก คือ $f(r,s)=\pi r^2 s$

ดังนั้น
$$\frac{\partial f(r,s)}{\partial r}=2\pi rs \qquad \frac{\partial f(r,s)}{\partial s}=\pi r^2$$

เนื่องจากรัศมีเพิ่มขึ้น 3% และความสูงเพิ่มขึ้น 2%

ดังนั้น
$$h=\frac{3}{100}r \qquad k=\frac{2}{100}s$$

ดังนั้นปริมาตรเพิ่มขึ้น $df(r,s)(h,k)=\frac{\partial f(r,s)\cdot h}{\partial r}+\frac{\partial f(r,s)\cdot k}{\partial s}=2\pi rs\frac{3}{100}r+\pi r^2\frac{2s}{100}$
$$=\frac{6}{100}\pi r^2 s+\frac{2}{100}\pi r^2 s=\frac{8}{100}\pi r^2 s$$

ปริมาตรเดิมคือ $\pi r^2 s$ ฉะนั้นปริมาตรเพิ่มขัน 8% ■

แบบฝึกหัด 14.4

1 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีดิฟเฟอเรนเชียลที่จุด (x,y) ที่กำหนดให้หรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผล

1.1 $f(x,y)=x^2y+3x+2y$, ที่ $(x,y)=(2,3)$

1.2 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ที่ $(x,y)=(0,0)$

2 กำหนดให้ $f(x,y)=\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ จงประมาณค่าของ $f(4.01,8.9)$

3 กำหนดให้ $f(x,y)=y\sqrt[4]{x}$ จงประมาณค่าของ $f(16.01,1.1)$

4 กำหนดให้ $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ จงประมาณค่าของ $f(0.9,1.1)$

5 กำหนดให้ $f(x,y)=x^2+y^2$ จงประมาณค่าของ $f(2.1,-2.1)$

6 ถ้าสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีด้านกว้างเพิ่มขึ้น 1% ด้านยาวเพิ่มขึ้น 1% จงหาว่าพื้นที่เพิ่มประมาณกี่เปอร์เซนต์

7 จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลประมาณปริมาตรของกรวยกลมอันหนึ่งซึ่งมีความสูง 7.01 หน่วย และมีรัศมีที่ฐานเท่ากับ 5.2 หน่วย

8 ทรงกระบอกมีรัศมี 1หน่วย สูง 2หน่วย ถ้าเรายืดความสูงออกไป 1% เราต้องหดรัศมีให้เหลือประมาณเท่าไร เพื่อจะได้มีปริมาตรเท่าเดิม

14.5 การประมาณรากของระบบสมการ

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาวิธีการประมาณรากของระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการสองสมการ และมีตัวไม่ทราบค่าสองตัว เช่น

$$x^2+y^2=25 \quad \ldots\ldots(1)$$
$$x^2-y=1 \quad \ldots\ldots(2)$$

แต่เราจะเขียนสมการให้อยู่ในรูป

$$x^2+y^2-25=0 \quad \ldots\ldots(1')$$
$$x^2-y-1=0 \quad \ldots\ldots(2')$$

คือจัดพจน์ให้ทางขวามือของสมการเป็นศูนย์

โดยเราจะพิจารณาว่าจะหารากของระบบสมการ