บทที่ 15
ระบบสมการดิฟเฟอเรนเชียล

ในบทนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับปัญหาที่ประกอบด้วยสมการดิฟเฟอเรนเชียลหลายสมการซึ่งผูกอัตราการแปรค่าของฟังก์ชันต่างๆ หลายฟังก์ชัน ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาวิธีวิเคราะห์ระบบสมการในรูปง่ายๆ เพื่อเป็นแนวทางสำหรับศึกษาระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีบทประยุกต์ในวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ระบบสมการที่จะศึกษาในหัวข้อนี้ได้แก่ระบบสมการในรูปต่อไปนี้

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1x(t) + b_1y(t) + c_1 \quad \ldots\ldots(1)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = a_2x(t) + b_2y(t) + c_2 \quad \ldots\ldots(2)$$

ในระบบสมการนี้ t เป็นตัวแปรอิสระ x กับ y เป็นฟังก์ชันที่เราต้องการทราบ ค่าของมันแปรผันไปตามค่าของ t คือเป็นตัวแปรตาม

15.1 ระบบสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

ระบบสมการที่จะศึกษาในหัวข้อนี้ได้แก่ระบบสมการในรูปต่อไปนี้

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1x(t) + b_1y(t) + c_1 \quad \ldots\ldots(1)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = a_2x(t) + b_2y(t) + c_2 \quad \ldots\ldots(2)$$

ในระบบสมการนี้ t เป็นตัวแปรอิสระ x กับ y เป็นฟังก์ชันที่เราต้องการทราบ ค่าของมันแปรผันไปตามค่าของ t คือเป็นตัวแปรตาม เราอาจหาผลเฉลยของระบบสมการแบบนี้ได้โดยวิธีในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 15.1.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x - y$$

และจงหาผลเฉลยเฉพาะที่มีค่าเริ่มต้น $x(0) = 3,\ y(0) = 2.$

วิธีทำ

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y \qquad .....(1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - y \qquad .....(2)$$

ดิฟเฟอเรนชิเอต (1) เทียบกับ t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} = 4\frac{dx}{dt} - 2(3x - y) = 4\frac{dx}{dt} - 6x + 2y$$

$$= 4\frac{dx}{dt} - 6x + 2\left(\frac{4x - \frac{dx}{dt}}{2}\right) = 3\frac{dx}{dt} - 2x$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

ต่อมา แก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล หา $x(t)$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$(r-2)(r-1) = 0$$

$$\therefore r = 1{,}2$$

$$\therefore x(t) = Ae^t + Be^{2t}$$

ต่อมาได้ว่า $\frac{dx}{dt} = Ae^t + 2Be^{2t}$ เพื่อใช้หา $y(t)$

จาก (1) ได้ว่า

$$y = \frac{4x - \frac{dx}{dt}}{2} = \frac{4x - (Ae^t + 2Be^{2t})}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[4x - Ae^t - 2Be^{2t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\left(Ae^t + 2Be^{2t}\right) - Ae^t - 2Be^{2t}\right]$$

$$\therefore y(t) = \frac{3}{2}Ae^t + Be^t$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x(t) = Ae^t + Be^{2t}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}Ae^t + Be^{2t}$$

ต่อมา หาผลเฉลยเฉพาะที่มีค่าเริ่มต้น $x(0) = 3,\ \ y(0) = 2.$

$$2 = y(0) = \frac{3}{2}A + B \qquad .....(1)$$

$$3 = x(0) = A + B \qquad .....(2)$$

$$(1) - (2); -1 = \frac{1}{2}A$$

$$\therefore A = -2 \quad B = 5$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$x(t) = -2e^t + 5e^{2t}$$

$$y(t) = -3e^t + 5e^{2t}$$

■

ตัวอย่าง 15.1.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 9y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 5y$$

และจงหาผลเฉลยเฉพาะที่มีค่าเริ่มต้น $x(0) = 3, \ y(0) = 1$ แล้วจงร่างกราฟของ $x(t)$ และ $y(t)$ คู่นี้ลงในกราฟเดียวกัน

วิธีทำ

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 9y \qquad .....(1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 5y \qquad .....(2)$$

ดิฟเฟอเรนชิเอต (1) เทียบกับ t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} - 9\frac{dy}{dt}$$
$$= 5\frac{dx}{dt} - 9(x - 5y) = 5\frac{dx}{dt} - 9x + 45y$$
$$= 5\frac{dx}{dt} - 9x + 45\left(\frac{\frac{dx}{dt} - 5x}{-9}\right)$$
$$= 5\frac{dx}{dt} - 9x - 5\frac{dx}{dt} + 25x = 16x$$

ดังนั้น

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 16x = 0$$

ต่อมา แก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล หา $x(t)$

$$r^2 - 16 = 0$$

$$\therefore r = \pm 4$$

$$\therefore x(t) = Ae^{4t} + Be^{-4t}$$

หา $y(t)$

เริ่มโดย $$\frac{dx}{dt} = 4Ae^{4t} - 4Be^{-4t}$$

จาก (1) จะได้ $$y(t) = \frac{1}{9}\left(5x - \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{9}\left(5\left(Ae^{4t} + Be^{-4t}\right) - \left(4Ae^{4t} - 4Be^{4t}\right)\right)$$

$$\therefore y(t) = \frac{A}{9}e^{4t} + Be^{-4t}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x(t) = Ae^{4t} + Be^{-4t}$$

$$y(t) = \frac{A}{9}e^{4t} + Be^{-4t}$$

ต่อมา หาผลเฉลยเฉพาะที่มีค่าเริ่มต้น $x(0) = 3,\ \ y(0) = 1$

$$3 = x(0) = A + B \qquad .....(1)$$

$$1 = y(0) = \frac{A}{9} + B \qquad .....(2)$$

$$(1) - (2); 2 = \frac{8}{9}A$$

$$\therefore A = \frac{9}{4} \quad B = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $$x(t) = \frac{9}{4}e^{4t} + \frac{3}{4}e^{-4t}$$

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{4t} + \frac{3}{4}e^{-4t}$$

■

ข้อแนะ ผลเฉลยของข้อนี้จะมี $y(t)$ อยู่ในรูป

$$y(t) = a\cos(4t) + b\sin(4t)$$

โดยที่ a, b เป็นจำนวนที่เราทราบค่า

ให้ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ จะได้ว่า

$$y(t) = c(\sin(\theta)\cos(4t) + \cos(\theta)\sin(4t))$$
$$y(t) = c\sin(\theta + 4t)$$

ซึ่งจะเขียนกราฟได้ง่ายกว่าสูตรเดิม
หมายเหตุ หาค่า θ ได้จากเครื่องคิด

ตัวอย่าง 15.1.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการ

$$\frac{dx}{dt} = 4x + 5y$$
$$\frac{dy}{dt} = -4x - 4y$$

และจงหาผลเฉลยเฉพาะที่มีค่าเริ่มต้น $x(0) = -1,\ y(0) = 2$ แล้วจงร่างกราฟของ $y(t)$

วิธีทำ
$$\frac{dx}{dt} = 4x + 5y \qquad .....(1)$$
$$\frac{dy}{dt} = -4x - 4y \qquad .....(2)$$

จาก (1) จะได้
$$y = \frac{1}{5}\left(\frac{dx}{dt} - 4x\right)$$

ดิฟเฟอเรนซิเอต (1) เทียบกับ t

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= 4\frac{dx}{dt} + 5\frac{dy}{dt} \\ &= 4\frac{dx}{dt} + 5(-4x - 4y) \\ &= 4\frac{dx}{dt} + 5\left(-4x - 4\left(\frac{\frac{dx}{dt} - 4x}{5}\right)\right) \\ &= 4\frac{dx}{dt} - 20x - 4\frac{dx}{dt} + 16x = -4x\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\frac{dx^2}{dt^2} + 4x = 0$$
$$r^2 - 4 = 0$$
$$\therefore r = \pm 2i$$
$$\therefore x(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t)$$

ต่อมา หา $y(t)$ โดยเริ่มจาก

$$x'(t) = 2A\cos(2t) - 2B\sin(2t)$$

แทนค่า $x' = \dfrac{dx}{dt}$ และ x ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{5}\big(2A\cos(2t) - 2B\sin(2t) - 4A\sin(2t) - 4B\cos(2t)\big) \\ &= \frac{1}{5}\big((2A-4B)\cos(2t) - (2B+4A)\sin(2t)\big) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x(0) = -1,\ y(0) = 2$ ดังนั้น หา A และ B โดย

$$-1 = x(0) = A\sin(2\cdot 0) + B\cos(2\cdot 0) = B$$

$$2 = y(0) = \frac{1}{5}\big((2A-4B)\cos(0) - (2B+4A)\sin(0)\big)$$

$$2 = \frac{1}{5}(2A+4)$$

$$\therefore A = 3, \quad B = -1$$

ฉะนั้น จะได้ $$y(t) = 2\cos(2t) - 2\sin(2t)$$

ต่อมา ร่างกราฟของ $y(t)$

ให้ $\sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น $$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.785$$

นั่นคือ $$\begin{aligned} y(t) &= 2\sqrt{2}\left[\sin\theta\cos(2t) - \cos\theta\sin(2t)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left[\sin(\theta - 2t)\right] = 2\sqrt{2}\sin(0.785 - 2t) \\ &= 2\sqrt{2}\sin\big(-2(t - 0.392)\big) \\ &= -2\sqrt{2}\sin\big(2(t-0.392)\big) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $2t = \dfrac{\pi}{2},\ t = \dfrac{\pi}{4}$ ซึ่งใช้ในการร่างกราฟ ■

ระบบอิสระ

โดยทั่วๆ ไป ระบบสมการดิฟเฟอเรนเชียลอันดับที่หนึ่งจะอยู่ในรูป

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,t) \quad \ldots(1)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y,t) \quad \ldots(2)$$

โดยที่ f กับ g เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร x,y,t แต่ถ้า f กับ g ไม่ขึ้นอยู่กับ t กล่าวคือระบบสมการเป็นดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \quad \ldots(1A)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y) \quad \ldots(2A)$$

เรากล่าวว่าระบบสมการเป็น**ระบบอิสระ (Autonomous system)** ตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วข้างต้นก็เป็นระบบเช่นนี้ การประยุกต์ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ ก็จะใช้ระบบสมการแบบนี้ในการจำลองสถาณการณ์ทางชีววิทยา ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการสร้างแบบจำลองดังกล่าว

เราได้เห็นการจำลองการเติบโตของประชากรหนึ่งประชากรมาแล้ว โดยเราใช้สมการ

$$\frac{dN(t)}{N(t)(M-N(t))} = rdt$$

หรืออีกนัยหนึ่ง

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} &= r(M-N)\\ &= rM - rN\\ &= a - bN\end{aligned}$$

โดยที่ a กับ b เป็นค่าคงตัว

เมื่อแรกเริ่ม เราพิจารณาสมการในรูป

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a \quad \text{(ค่าคงตัวของการแปรผัน)}$$

ซึ่งจะให้ผลเฉลยในรูป

$$N = Ce^{at}$$

แต่เมื่อพิจารณาดูถึงความเป็นจริง ก็จะเห็นว่าเป็นไปไม่ได้ เพราะจากสูตรนี้เราจะได้ว่าขนาดของประชากรจะเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด แต่สิ่งจำเป็นต่างๆ ในการดำรงชีพเช่นอาหาร ที่อยู่อาศัย นั้นมีเพียงจำนวนจำกัด

จากการพิจารณาดังกล่าว เราจึงปรับปรุง

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a \qquad \ldots(1)$$

เป็น

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a - bN \quad \ldots(2)$$

ปริมาณซ้ายมือของสมการทั้งสองนี้เป็นปริมาณที่เราใช้วัด**อัตราการเจริญเติบโต (growth rate)** ของประชากร แฟคเตอร์ $\frac{1}{N}$ ที่คูณอยู่ข้างหน้านั้นทำให้หน่วยของการวัดนี้ไม่ขึ้นกับขนาดของประชากร เช่นถ้านักวิทยาศาสตร์สองคนทำการทดลองเพาะเลี้ยงจุลินทรีย์อย่างเดียวกันเพื่อศึกษาหาอัตราการเจริญเติบโตของจุลินทรีย์ชนิดนั้น แต่การทดลองทั้งสองมีขนาดต่างกัน หากเราวัด $\frac{dN}{dt}$ จากการทดลองทั้งสอง ค่าที่ได้ย่อมแตกต่างกันด้วยเหตุที่ขนาดประชากรเริ่มต้นของคนทั้งสองนั้นต่างกัน การคูณด้วยแฟคเตอร์ $\frac{1}{N}$ เป็นการเทียบให้ขนาดของประชากรมีขนาด 1 หน่วยเท่าๆ กัน ดังนั้นเราจึงใช้ $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ ในการสร้างแบบจำลองเกี่ยวกับการเจริญเติบโต

ต่อไปนี้เราจะสร้างแบบจำลองสำหรับสองประชากร แบบจำลองสำหรับหลายๆ ประชากรก็อาจทำได้ในทำนองเดียวกัน

ให้ $x(t)$ กับ $y(t)$ เป็นขนาดของประชากรที่หนึ่งกับประชากรที่สองตามลำดับ ถ้าประชากรสองประชากรนี้ต่างฝ่ายต่างอยู่ ไม่เกี่ยวข้องกัน สมการการเจริญเติบโตของประชากรทั้งสองย่อมอยู่ในรูปของสมการ (2) ที่กล่าวมาข้างต้น คือจะได้ว่า

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a_1 - b_1 x \qquad \ldots(2')$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = a_2 - b_2 y \qquad \ldots(2'')$$

แต่ถ้าประชากรทั้งสองมีการเกี่ยวข้องกัน เช่นใช้ปัจจัยร่วมกัน หรือสมาชิกของประชากรหนึ่งล่าสมาชิกของอีกประชากรหนึ่งเป็นอาหาร(หรืออื่นๆ) เราก็ต้องปรับปรุงสมการ $(2')$ กับ $(2'')$ ตามความเหมาะสม เราจะแยกพิจารณาสองกรณีที่กล่าวมานี้

(ก) **ใช้ปัจจัยร่วมกัน** ในกรณีนี้ ขนาดของแต่ละประชากรย่อมส่งผลให้อัตราการเจริญเติบโตของอีกประชากรหนึ่งลดลง สมการจึงควรเป็นดังนี้

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a_1 - b_1 x - c_1 y \qquad \ldots(2')$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = a_2 - b_2 y - c_2 x \qquad \ldots(2'')$$

โดยที่ในที่นี้ ค่าคงตัว $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 > 0$

(ข) **เหยื่อกับผู้ล่า** ในกรณีนี้ ขนาดประชากรของเหยื่อ ยิ่งมากจะส่งผลให้อัตราการเจริญเติบโตของประชากรผู้ล่ามากตาม กลับกันถ้าขนาดประชากรของเหยื่อลดน้อยลง อัตราการเจริญเติบโตของประชากรผู้ล่าก็ย่อมลดลงด้วย

ยิ่งกว่านั้น ถ้าเหยื่อถูกล่าจนหมด (คือขนาดประชากรเหยื่อเป็นศูนย์) อัตราการเจริญเติบโตของประชากรผู้ล่าควรมีค่าเป็นลบ เพราะเมื่อผู้ล่าไม่มีอาหารก็มีแต่จะล้มตายไป (*สมมติว่าไม่กินอย่างอื่น*)

ส่วนอัตราการเจริญเติบโตของประชากรเหยื่อนั้นคงได้รับผลกระทบเช่นเดียวกับกรณีที่พิจารณามาแล้ว ดังนั้น ถ้าให้ x เป็นขนาดประชากรเหยื่อ y เป็นขนาดประชากรผู้ล่า เราควรได้สมการดังนี้

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a_1 - b_1 x - c_1 y$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a_2 - b_2 y + c_2 x$$

โดยที่ในที่นี้ ค่าคงตัว $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 > 0$

ระบบสมการทั้งสองแบบที่กล่าวมานั้นแม้จะดูว่าเป็นสมการง่ายๆ แต่ยังไม่มีวิธีหาผลเฉลยออกมาในรูปของสูตรเช่นที่เราทำกับระบบสมการเชิงเส้น *เราต้องใช้วิธีการประมาณ*

■ การหาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีการประมาณ

การหาผลเฉลยที่ได้ออกมาเป็นสูตรดังในตัวอย่างที่กล่าวมาในหัวข้อก่อนนั้นบางทีก็ทำไม่ได้ ในกรณีเช่นนั้นเราต้องหาผลเฉลยโดยวิธีการประมาณ ซึ่งมีมากมายหลายวิธี ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาวิธีง่ายๆ วิธีหนึ่งซึ่งเราคุ้นเคยดีอยู่แล้ว คือการประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยดิฟเฟอเรนเชียล

$$\begin{aligned} f(x+h) &\approx f(x) + df(x)(h) \\ &= f(x) + f'(x)h \end{aligned}$$

จากสมการ

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y$$

กับ
$$\frac{dy}{dt} = 3x - y$$

เราจึงได้ว่า

$$x(t+h) \approx x(t) + (4\,x(t) - 2\,y(t))h$$
$$y(t+h) \approx y(t) + (3\,x(t) - y(t))\,h$$

ซึ่งเห็นได้ว่า จากค่าเริ่มต้น

$$x(0) = 3, \quad y(0) = 2$$

เราสามารถคำนวณ $x(t)$, $y(t)$ สำหรับ $t = h, 2h, 3h, \ldots$

วิธีการประมาณผลเฉลยด้วยวิธีการที่กล่าวมานั้นเป็น**วิธีการของออยเลอร์** เราจะใช้วิธีนี้กับสมการเดียวก็ได้

ตัวอย่าง 15.1.4 กำหนดให้

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - y$$

และ $x(0) = 3,\ y(0) = 2$ จงแสดงการใช้วิธีประมาณของออยเลอร์ประมาณค่า $x(0.1)$ กับ $y(0.1)$ โดยใช้ค่า $h = 0.05$

วิธีทำ

จากสูตร
$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{dx}{dt} \cdot h$$
$$y(t+h) \approx y(t) + \frac{dy}{dt} \cdot h$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x(0+0.05) &\approx x(0) + \big(4x(0) - 2y(0)\big)(0.05) \\ &= 3 + \big(4(3) - 2(2)\big)(0.05) \end{aligned}$$

ได้ $x(0.05) = 3.4$

$$\begin{aligned} y(0+0.05) &\approx y(0) + \big(3x(0) - y(0)\big)(0.05) \\ &= 2 + \big(3(3) - 2\big)(0.05) \end{aligned}$$

ได้ $y(0.05) = 2.35$

$$\begin{aligned} x(0.05+0.05) &\approx x(0.05) + \big(4x(0.05) - 2y(0.05)\big)(0.05) \\ &= 3.4 + \big(4(3.4) - 2(2.35)\big)(0.05) \end{aligned}$$

ได้ $x(0.1) = 3.845$

$$\begin{aligned} y(0.05+0.05) &\approx y(0.05) + \big(3x(0.05) - y(0.05)\big)(0.05) \\ &= 3.35 + \big(3(3.4) - 2.35\big)(0.05) \end{aligned}$$

ได้ $y(0.1) = 2.7425$

จึงได้คำตอบเป็น $x(0.1) = 3.845\,,\ y(0.1) = 2.7425$ ■

แบบฝึกหัด 15.1

กำหนดให้

$$\frac{dx}{dt} = 5x + 9y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 5y$$

โดยที่ $x(0) = 3,\ y(0) = 1$ จงแสดงการใช้วิธีประมาณของออยเลอร์ประมาณค่า $x(0.03)$ กับ $y(0.03)$ โดยใช้ค่า $h = 0.01$