$$
\begin{aligned}
y(0+0.05) &\approx y(0) + \big(3x(0) - y(0)\big)(0.05) \\
&= 2 + \big(3(3) - 2\big)(0.05)
\end{aligned}
$$

ได้ $y(0.05) = 2.35$

$$
\begin{aligned}
x(0.05+0.05) &\approx x(0.05) + \big(4x(0.05) - 2y(0.05)\big)(0.05) \\
&= 3.4 + \big(4(3.4) - 2(2.35)\big)(0.05)
\end{aligned}
$$

ได้ $x(0.1) = 3.845$

$$
\begin{aligned}
y(0.05+0.05) &\approx y(0.05) + \big(3x(0.05) - y(0.05)\big)(0.05) \\
&= 3.35 + \big(3(3.4) - 2.35\big)(0.05)
\end{aligned}
$$

ได้ $y(0.1) = 2.7425$

จึงได้คำตอบเป็น $x(0.1) = 3.845$, $y(0.1) = 2.7425$ ■

แบบฝึกหัด 15.1

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของระบบสมการดิฟเฟอเรนเชียล และจงหาผลเฉลยเฉพาะสำหรับค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้

1.1 $\dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -3x$

1.2 $\dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -2x + y, \qquad x(0) = 2,\ y(0) = 4$

1.3 $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{9}{7}y, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{6}{7}x + \dfrac{11}{7}y, \qquad x(0) = 4,\ y(0) = 1$

1.4 $\dfrac{dx}{dt} = 6x + 15y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -3x - 6y, \qquad x(0) = -1,\ y(0) = 1$

2. สำหรับระบบสมการดิฟเฟอเรนเชียล และค่าเริ่มต้นในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงแสดงการใช้วิธีประมาณของออยเลอร์ประมาณค่า $x(0.03)$ กับ $y(0.03)$ โดยใช้ค่า $h = 0.01$

2.1 $\dfrac{dx}{dt} = 5x + 9y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 5y, \qquad x(0) = 3,\ y(0) = 1$

2.2 $\dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -2x + y, \qquad x(0) = 2,\ y(0) = 4$

2.3 $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{9}{7}y, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{6}{7}x + \dfrac{11}{7}y, \qquad x(0) = 4,\ y(0) = 1$

2.4 $\dfrac{dx}{dt} = 6x + 15y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -3x - 6y, \qquad x(0) = -1,\ y(0) = 1$

15.2 Phase plane และ Trajectory

ให้ $x(t),\ y(t)$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการในรูป

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,t)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x,y,t)$$

หากเราสนใจว่า x กับ y มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ก็อาจทำได้โดยการนำคู่อันดับ $(x(t), y(t))$ ลงจุดในระนาบ xy เราเรียกกราฟที่ได้ว่า **phase plane** และเรียกเส้นโค้งที่แสดงความสัมพันธ์ของ x กับ y ว่า **trajectory**

ในบางกรณีเราสามารถหาได้ว่า trajectory มีสมการอย่างไร เช่น ในกรณีของตัวอย่าง 15.1.1 ซึ่งเราทราบสูตรของผลเฉลยเฉพาะว่าเป็น

$$x = -2e^t + 5e^{2t} \quad \ldots(1)$$
$$y = -3e^t + 5e^{2t} \quad \ldots(2)$$

เราขจัดตัวแปร t ได้ดังนี้

$(1)-(2)$ ได้

$$x - y = e^t \qquad \ldots(3)$$

$3\cdot(1)-2\cdot(2)$ ได้

$$3x - 2y = 5e^{2t} \qquad \ldots(4)$$

จาก (3) ได้ว่า

$$(x-y)^2 = e^{2t} \qquad \ldots(5)$$

จาก (4) กับ (5) ได้ว่า

$$5(x-y)^2 = 3x - 2y \quad \ldots(6)$$

ซึ่งก็คือสมการของ trajectory

ตัวอย่าง 15.2.1 จงหาสมการของ trajectory ของสองฟังก์ชันต่อไปนี้

$$x = -3e^{2t} + 5e^{3t}$$
$$y = 2e^{2t} - e^{3t}$$

วิธีทำ

$$x = -3e^{2t} + 5e^{3t} \qquad .....(1)$$
$$y = 2e^{2t} - e^{3t} \qquad .....(2)$$
$$(1)\times 2;\ 2x = -6e^{2t} + 10e^{3t} \qquad .....(3)$$
$$(2)\times 3;\ 3y = 6e^{2t} - 3e^{3t} \qquad .....(4)$$
$$(3)+(4);\ 2x + 3y = 7e^{3t} \qquad .....(5)$$

หา e^{2t} ในรูปของ x, y

$$\text{จาก } (5); \left(\frac{2x+3y}{7}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(e^{3t}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{2t} \qquad .....(*)$$

$$\text{แทน } (*) \text{ ใน } (2);\ y = 2\left(\frac{2x+3y}{7}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{2x+3y}{7}\right)$$ ■

trajectory จะบอกให้เราทราบว่าประชากรทั้งสองจะแปรเปลี่ยนไปในทิศทางใด จะไปสู่จุดสมดุลที่ใดบ้างหรือไม่ เราอาจร่าง trajectory คร่าวๆได้โดยใช้การประมาณโดยวิธีของออยเลอร์เป็นแนวทาง กล่าวคือ

1. จากจุดเริ่มต้น เราคำนวณหา dx กับ dy
2. ลากเวกเตอร์ (dx, dy) จากจุดนั้น เราจะได้ปลายเวกเตอร์เป็นจุดใหม่บน trajectory
3. แล้วคำนวณหา dx กับ dy ที่จุดใหม่
4. แล้ว ลากเวกเตอร์ (dx, dy) จากจุดนั้น เราจะได้จุดใหม่บน trajectory อีกจุดหนึ่ง

และทำซ้ำต่อไปเรื่อยๆ จะได้ trajectory คร่าวๆ

แบบฝึกหัด 15.2

จงหาสมการของ trajectory ของสองฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x(t) = -2e^{t} + 5e^{2t}$

   $y(t) = -3e^{t} + 5e^{2t}$

2. $x(t) = \dfrac{9}{4}e^{4t} + \dfrac{3}{4}e^{-4t}$

   $y(t) = \dfrac{1}{4}e^{4t} + \dfrac{3}{4}e^{-4t}$

3. $x(t) = e^{2t} + 3e^{-t}$

   $y(t) = 2e^{2t} - e^{-t}$

15.3 Michaelis – Menton Equation

เราได้เคยใช้ Michaelis-Menton Equation มาแล้วในการสร้างแบบจำลองของการขจัด drug ออกจากร่างกาย สมการดังกล่าวคือ

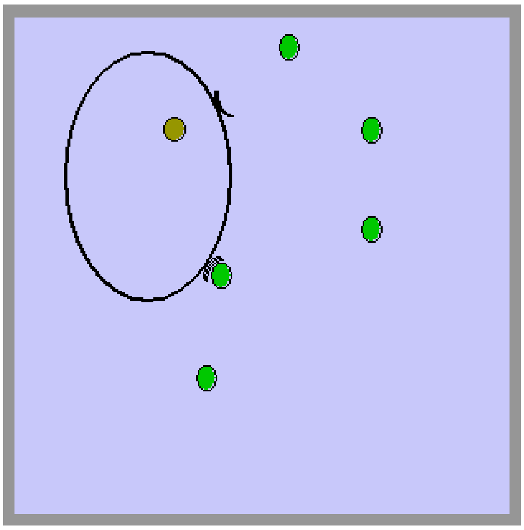
$$\frac{dx}{dt} = \frac{-Kx}{A+x}$$

ในหัวข้อนี้เราจะได้เห็นถึงที่มาของสมการนี้

เราจะสร้างแบบจำลองของการเจริญเติบโตของ bacteria ว่าขึ้นอยู่กับความเข้มข้นของ nutrient อย่างไร การเจริญเติบโตของ bacteria ย่อมขึ้นอยู่กับปริมาณ nutrient ที่ bacteria ขจัดไป ดังนั้นในที่นี้เราจะสร้างสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่บอกอัตราการแปรค่าของปริมาณ nutrient แบบจำลองเกี่ยวกับการขจัด drug ออกจากร่างกายก็ทำได้อย่างเดียวกัน โดยให้ cell ของตับทำหน้าที่ของ bacteria และถือว่า drug เป็น nutrient

สมการดิฟเฟอเรนเชียลที่บอกอัตราการแปรค่าของปริมาณ nutrient กับที่บอกอัตราการแปรค่าของปริมาณของ drug ก็เป็นสมการเดียวกัน

การที่โมเลกุลของ nutrient จะผ่านเข้าไปใน cell ของ bacteria นั้น ต้องอาศัย receptor ซึ่งอยู่นอก cell wall receptor ที่มี nutrient เกาะอยู่อาจทำให้เกิด product ผ่านเข้าไปใน cell หรืออาจหลุดแยกออกไปก็ได้ เราจะให้



N แทนโมเลกุลของ nutrient

X_0 แทน receptor ที่ยังว่างอยู่

X_1 แทน receptor ที่มี nutrient

P แทน product

เราเขียนสมการปฏิกิริยาระหว่างสิ่งเหล่านี้ได้ดังนี้

$$N + X_0 \rightleftharpoons X_1$$
$$X_1 \rightarrow P + X_0$$

ให้ n, x_0, x_1 และ p แทนความเข้มข้นของ N, X_0, X_1 และ P ตามลำดับ

เราจะเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการแปรค่าของปริมาณต่างๆ เหล่านี้ได้โดยใช้ **Law of mass action**

Law of mass action กล่าวว่า อัตราเร็วของปฏิกิริยาเป็นปฏิภาคกับผลคูณของความเข้มข้นของสารที่ทำปฏิกิริยากัน

ในสมการปฏิกิริยาข้างต้น ให้ k_1, k_{-1}, k_2 แทนค่าคงที่ของการเกิดปฏิกิริยาดังแสดงข้างล่าง

$$N + X_0 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} X_1 \qquad .....(*)$$
$$X_1 \xrightarrow{k_2} P + X_0 \qquad .....(**)$$

ในกรณีที่มีสารอย่างเดียว อัตราเร็วของปฏิกิริยาก็เป็นปฏิภาคกับความเข้มข้นของสารนั้น เช่น จากสมการ

$$X_1 \xrightarrow{k_2} P + X_0$$

เราได้ว่าอัตราการเกิด P จากปฏิกิริยานี้เป็นปฏิภาคกับ X_1 นั่นคือ $\dfrac{dp}{dt} \propto x_1$ จึงได้ว่า

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = k_2 x_1}$$

อัตราสูญเสีย X_1 ในปฏิกิริยานี้ก็เท่ากับ $k_2 x_1$ เช่นกัน แต่เรามีทั้งการเกิดและการสูญเสีย X_1 ไปโดยปฏิกิริยา

$$N + X_0 \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} X_1$$

ซึ่งมีอัตราเกิดเท่ากับ $k_1 n x_0$ และ อัตราสูญเสียเท่ากับ $k_{-1} x_1$

จึงได้ว่า

$$\boxed{\frac{dx_1}{dt} = k_1 n x_0 - k_{-1} x_1 - k_2 x_1}$$

โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกัน เราจะได้อีกสองสมการ รวมเป็น Michaelis-Menton Equation สี่สมการ คือ

$$\frac{dn}{dt} = -k_1 n x_0 + k_{-1} x_1 \qquad .....(1)$$
$$\frac{dx_0}{dt} = -k_1 n x_0 + k_{-1} x_1 + k_2 x_1 \qquad .....(2)$$
$$\frac{dx_1}{dt} = -k_2 x_1 + k_1 n x_0 - k_{-1} x_1 \qquad .....(3)$$
$$\frac{dp}{dt} = k_2 x_1 \qquad .....(4)$$

จากสมการทั้งสี่นี้ประกอบกับ assumption เพิ่มเติมว่า มี nutrient มากจน receptor ต้องทำงานเต็มที่ (ซึ่งยังผลให้อัตราเพิ่ม X_1 เป็นศูนย์) เราจะแสดงได้ว่า

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{Kn}{A+n} \text{ โดยที่ } K \text{ กับ } A \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ตัวอย่าง 15.3.1 จากระบบสมการ Michaelis-Menton Equation ต่อไปนี้

$$\frac{dn}{dt} = -k_1 n x_0 + k_{-1} x_1 \qquad .....(1)$$
$$\frac{dx_0}{dt} = -k_1 n x_0 + k_{-1} x_1 + k_2 x_1 \qquad .....(2)$$
$$\frac{dx_1}{dt} = -k_2 x_1 + k_1 n x_0 - k_{-1} x_1 \qquad .....(3)$$
$$\frac{dp}{dt} = k_2 x_1 \qquad .....(4)$$

จงแสดงว่า $\frac{dn}{dt} = -\frac{Kn}{A+n}$ โดยที่ K กับ A เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ

จาก (2) และ (3) จะได้ว่า

$$\frac{dx_0}{dt} + \frac{dx_1}{dt} = 0 \text{ นั่นคือ } \frac{d(x_0 + x_1)}{dt} = 0$$

ดังนั้น

$$x_0 + x_1 = r \quad \text{เมื่อ } r \text{ เป็นค่าคงที่}$$
$$\therefore x_0 = r - x_1$$

แทน x_0 ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= -k_1 n(r - x_1) + k_{-1}x_1 \\ &= -k_1 nr + k_1 n x_1 + k_{-1}x_1 \\ &= -k_1 nr + \left(k_1 n + k_{-1}\right)x_1 \qquad .....(5)\end{aligned}$$

แทน x_0 ใน (3) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= k_1 n(r - x_1) - k_{-1}x_1 - k_2 x_1 \\ &= k_1 nr - (k_1 n - k_{-1} + k_2)x_1 \qquad .....(6)\end{aligned}$$

จาก *assymption* มีจำนวน *nutrient* มากจนทำให้ *receptor* ต้องทำงานเต็มที่จนทำให้เพิ่มไม่ได้

นั่นคือ
$$\frac{dx_1}{dt} = 0$$

ดังนั้น สมการ $(6) = 0$; จึงได้ว่า

$$k_1 nr - (k_2 + k_1 n + k_{-1})x_1 = 0 \quad .....(7)$$

ต่อมา หา x_1 จาก (7); ได้ว่า

$$x_1 = \frac{k_1 nr}{k_2 + k_1 n + k_{-1}}$$

แทน x_1 ใน (5);

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= -k_1 nr + (k_1 n + k_{-1})\frac{k_1 nr}{k_2 + k_1 n + k_{-1}} \\ &= \frac{-k_1 nrk_2}{k_2 + k_1 n + k_{-1}} \\ &= \frac{-(k_1 rk_2)n}{(k_2 + k_1) + k_{-1}n} \\ &= \frac{-(rk_2)n}{\frac{(k_2 + k_{-1})}{k_1} + n}\end{aligned}$$

ฉะนั้น จึงได้ว่า

$$\boxed{\frac{dn}{dt} = \frac{-Kn}{A + n} \qquad \text{โดยที่} \quad K = rk_2,\ A = \frac{k_2 + k_{-1}}{k_1}}$$

15.4 สมการผลต่าง

ในการสร้างแบบจำลองบางเรื่อง ปริมาณที่เราสนใจจะศึกษานั้นไม่ได้แปรค่าตลอดเวลา แต่แปรค่าเป็นคาบ เช่นหากเราสนใจจะศึกษาขนาดของประชากรพืชล้มลุกเมืองหนาวชนิดหนึ่ง เริ่มงอกในฤดูใบไม้ผลิออกดอกในฤดูร้อน ออกเมล็ดและร่วงหล่นลงบนพื้นดินในฤดูใบไม้ร่วง และล้มตายไปในฤดูหนาว ซึ่งก็จะถูกหิมะตกลงมาทับถมในฤดูหนาว เมื่อเริ่มเข้าฤดูใบไม้ผลิ หิมะละลายเมล็ดที่ร่วงหล่นอยู่ก็เริ่มงอก แล้วออกดอก ออกเมล็ด และร่วงหล่น วนเวียนไปในปีต่อๆ ไป

เช่นที่กล่าวมานี้ การสร้างแบบจำลองการเจริญเติบโตของประชากรพืชชนิดนี้ด้วยสมการดิฟเฟอเรนเชียลย่อมไม่เหมาะสมทั้งนี้เพราะเวลาที่มีการเปลี่ยนขนาดของประชากรนั้นเราอาจถือได้ว่าเปลี่ยนที่เวลาเดียวกัน และเป็นขนาดของประชากรของแต่ละคาบการวัดขนาดของประชากร เราอาจวัดโดยการนับหรือการชั่งน้ำหนัก หรือวิธีอื่นใดที่เหมาะสม

ถ้าเราให้ $x(t)$ เป็นขนาดของประขากรในปี(คาบ) ที่ t เราก็จะมีค่า $x(0), x(1), x(2), \ldots$ เป็นอันดับของจำนวนจริง

การสร้างแบบจำลองสำหรับปัญหาที่กล่าวมาจึงทำโดยการใช้ อันดับของจำนวนจริง เราจะกำหนดค่า parameters ต่างๆ และกำหนด assumptions เกี่ยวกับการออกเมล็ด และการงอกดังต่อไปนี้

ให้ $x(t)$ เป็นจำนวนต้นของพืชในปีที่ t
s เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนเมล็ดต่อต้น
f เป็น fraction ของเมล็ดพืชที่มีชีวิตรอดผ่านฤดูหนาว
g เป็น fraction ของเมล็ดใหม่ที่งอก
g' เป็น fraction ของเมล็ดเก่าที่งอก

เรา assume ว่า เมล็ดเก่าที่ตกค้างสองปีขึ้นไปจะไม่งอก

สังเกตเห็นได้ว่าค่าของ $x(t)$ ขึ้นอยู่กับ ค่าของ $x(t-1)$ กับ $x(t-2)$ ดังนี้

$$x(t) = \text{จำนวนต้นในปีที่ } t$$

ได้จากการงอกของเมล็ดสองพวกคือ พวกที่หนึ่งจากปีที่ $t-1$ กับพวกที่สองจากปีที่ $t-2$

พวกที่หนึ่งมาจากเมล็ดของ $x(t-1)$ ต้น ซึ่งมีเล็ดรวม $s\,x(t-1)$ เมล็ด ในบรรดาเมล็ดเหล่านี้ อยู่รอดฤดูหนาวเพียง $fs\,x(t-1)$ เมล็ด และในจำนวนนี้มีที่งอกเพียง $gfs\,x(t-1)$ เมล็ด

พวกที่สองมาจากเมล็ดของ $x(t-2)$ ต้น ซึ่งมีเล็ดรวม $s\,x(t-2)$ เมล็ด ในบรรดาเมล็ดเหล่านี้ อยู่รอดฤดูหนาวแรกเพียง $fs\,x(t-2)$ เมล็ด และในจำนวนนี้มีที่ไม่งอกในปีถัดมา $(1-g)fs\,x(t-2)$ เมล็ด เมล็ดเหล่านี้ต้องฝ่าฤดูหนาวอีกฤดูหนึ่ง จำนวนที่ฝ่ารอดไปได้มี $f(1-g)fs\,x(t-2)$ เมล็ด และในจำนวนนี้มีที่งอก $g'f(1-g)fs\,x(t-2)$ เมล็ด เราจึงได้ว่า

$$x(t) = gfs\,x(t-1) + g'f(1-g)fs\,x(t-2)$$

เห็นได้ว่าสมการที่ได้เป็นสมการในรูป

$$x(t) = a\,x(t-1) + b\,x(t-2)$$

หรือเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$$x(t) - a\,x(t-1) - b\,x(t-2) = 0$$

ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของสมการรูปทั่วๆ ไป

$$x(t) + a_1\,x(t-1) + a_2 x(t-2) + \cdots + a_n x(t-n) = 0$$

ซึ่งเป็นสมการผลต่างอันดับที่ n

วิธีหาผลเฉลยของสมการนี้ทำได้ด้วยวิธีการในทำนองเดียวกันกับการหาผลเฉลยของสมการดิฟเฟอเรนเชียล

ตัวอย่าง 15.4.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$x(t) - 2x(t-1) = 0$$

และหาผลเฉลยเฉพาะซึ่ง $x(0) = 150$

วิธีทำ

สมมติ $x(t) = Cr^t$ ดังนั้น $x(t-1) = Cr^{t-1}$

แทนในสมการที่กำหนดให้ จะได้ $Cr^t - 2Cr^{t-1} = 0$ นั่นคือ $Cr^{t-1}(r-2) = 0$

ดังนั้น $r = 2$ ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x(t) = C2^t$$

จาก $x(0) = 150$ จะได้ว่า

$$150 = C2^0$$

ได้

$$C = 150$$

จึงได้ผลเฉลยเฉพาะเป็น

$$x(t) = (150)2^t$$ ■

หมายเหตุ หากเราสมมติ $x(t) = e^{rt}$ แล้วแทนในสมการ เราจะได้

$$e^r = 2$$

ซึ่งจะทำให้ได้ผลเฉลยเป็น

$$x(t) = (e^r)^t = 2^t$$

เช่นกัน e^r ในที่นี้ก็คือ r ในวิธีทำข้างต้นนั่นเอง

ตัวอย่าง 15.4.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$x(t) - 3x(t-1) = 0$$

และหาผลเฉลยเฉพาะซึ่ง $x(0) = 1$

วิธีทำ

สมมติ $x(t) = Cr^t$ จะได้ว่า

$$r - 3 = 0$$

$$r = 3$$

ดังนั้น

$$x(t) = C3^t$$

เนื่องจาก

$$1 = x(0) = C3^0$$

ดังนั้น

$$C = 1$$

$$\therefore x(t) = 3^t$$

■

ตัวอย่าง 15.4.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$x(t) - 4x(t-1) + 4x(t-2) = 0$$

แล้วหาผลเฉลยเฉพาะซึ่ง $x(0) = 100$ และ $x(1) = 210$

วิธีทำ

สมมติ $x(t) = Cr^t$ จะได้ว่า $x(t-1) = Cr^{t-1}$

ดังนั้น

$$Cr^t - 4Cr^{t-1} + 4Cr^{t-2} = 0$$

$$Cr^{t-2}\left(r^2 - 4r + 4\right) = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2 = 0$$

$$r = 2, 2 \ \text{(รากซ้ำ)}$$

จะได้ผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$x(t) = (A + Bt)2^t$$

หาผลเฉลยเฉพาะโดยใช้เงื่อนไขที่กำหนดให้ $x(0) = 100$ และ $x(1) = 210$

$$100 = x(0) = A + B(0) = A$$

$$210 = x(1) = (A + B)2$$

$$105 = A + B$$

$$105 = 100 + B$$

$$\therefore A = 100,\ B = 5$$

ฉะนั้นได้ว่า $$x(t) = (100 + 5t)2^t$$ ■

ตัวอย่าง 15.4.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$x(t) - x(t-1) - x(t-2) = 0$$

และหาผลเฉลยเฉพาะซึ่ง $x(0) = 1$ และ $x(1) = 1$

วิธีทำ

เนื่องจาก $$r^2 - r - 1 = 0$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ดังนั้น $$x(t) = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

เนื่องจาก $x(0) = 1$ และ $x(1) = 1$ จึงได้

$$1 = x(0) = A + B$$

$$\begin{aligned} 1 = x(1) &= A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-A)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \sqrt{5}A + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}A$$

$$\therefore A = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

ดังนั้น
$$x(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$
■

แบบฝึกหัด 15.4

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $2x(t) - 3x(t-1) = 0$ และหาผลเฉลยเฉพาะซึ่ง $x(0) = 2$
2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $x(t) - 2x(t-1) - 5x(t-2) = 0$
   และหาผลเฉลยเฉพาะซึ่ง $x(0) = 1$ และ $x(1) = 1$
3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $x(t) + 10x(t-1) + 25x(t-2) = 0$
   และหาผลเฉลยเฉพาะซึ่ง $x(0) = 20$ และ $x(1) = 12$
4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $x(t) + 4x(t-1) + 4x(t-2) = 0$
   และหาผลเฉลยเฉพาะซึ่ง $x(0) = 100$ และ $x(1) = 64$