2301116
Calculus for Business II

บทที่ 5

ปัญหาค่าสุดขีด

ของฟังก์ชันสองตัวแปร

Dr.Paisan Nakmahachalasint

Paisan.N@chula.ac.th

ค่าสุดขีดสัมพัทธ์และค่าสุดขีดสัมบูรณ์

<u>นิยาม</u> ให้ (x_0,y_0) เป็นจุดในโดเมนของฟังก์ชัน f

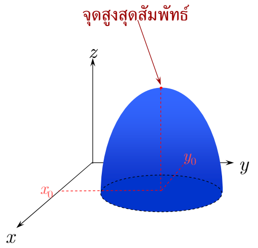
1. ถ้ามีบริเวณรอบ ๆ จุด (x_0,y_0) ซึ่ง $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ ทุก (x,y) ในบริเวณนั้นแล้ว เรียก $f(x_0,y_0)$ ว่า**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** และเรียก (x_0,y_0) ว่า **จุดสูงสุดสัมพัทธ์** ของ f

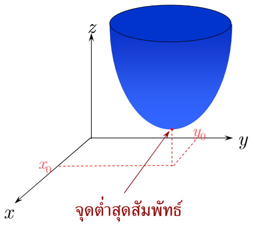
2. ถ้า $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ ทุก (x,y) ในโดเมนแล้ว เรียก $f(x_0,y_0)$ ว่า**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** และเรียก (x_0,y_0) ว่า**จุดสูงสุดสัมบูรณ์**ของ f

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์นิยามได้ในทำนองเดียวกัน เพียงแต่เปลี่ยนเครื่องหมาย $\geq$ เป็น $\leq$

เรียกค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดว่า **ค่าสุดขีด**

ความหมายทางเรขาคณิตของค่าสุดขีด





ถ้า (x_0,y_0) เป็นจุดภายในของโดเมนของ f แล้ว (x_0,y_0) เป็นจุดวิกฤตของ f เมื่อ

(1) $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ **หรือ**

(2) $f_x(x_0,y_0)$ หรือ $f_y(x_0,y_0)$ ไม่มีค่า

ขั้นตอนการหาค่าสุดขีด

<u>ขั้นที่ 1</u>

ถ้า $z = f(x, y)$ มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) และถ้าทั้ง f_x และ f_y นิยามที่ทุกจุดรอบ ๆ (x_0, y_0) แล้วหาค่าวิกฤตของ f จากการแก้ระบบสมการ

$$f_x(x, y) = 0 \quad \text{และ} \quad f_y(x, y) = 0$$

จุดวิกฤตอาจจะเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือถ้าไม่ใช่ทั้งสองอย่าง ก็จะเรียกว่าจุดอานม้า (saddle point)

ขั้นที่ 2 (การทดสอบแบบอนุพันธ์อันดับสอง)

ให้ $z = f(x, y)$ มีอนุพันธ์ย่อย f_{xx}, f_{yy}, และ f_{xy} ต่อเนื่องที่ทุกจุด (x, y) รอบๆ จุดวิกฤต (x_0, y_0) กำหนด

$$A = f_{xx}(x_0, y_0),\ B = f_{xy}(x_0, y_0),\ C = f_{yy}(x_0, y_0),$$

$$D = AC - B^2$$

จะได้ว่า

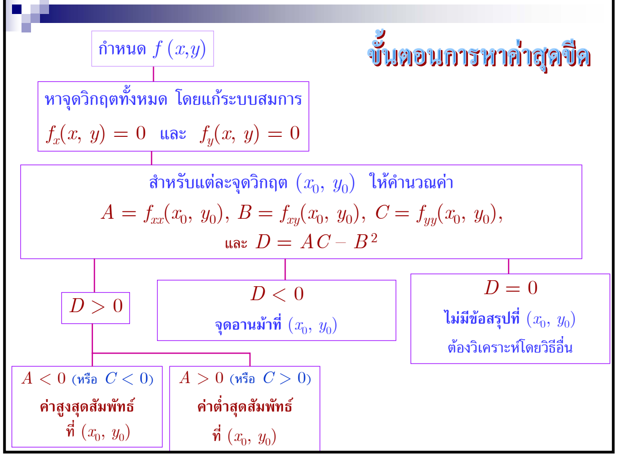
(i) ถ้า $D > 0$ และ $A < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0)

(ii) ถ้า $D > 0$ และ $A > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ (x_0, y_0)

(iii) ถ้า $D < 0$ แล้ว f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) → จุดอานม้า

(iv) ถ้า $D = 0$ ยังสรุปไม่ได้ ต้องอาศัยวิธีอื่นมาวิเคราะห์

ขั้นตอนการหาค่าสุดขีด



Example

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x - 2y + 5 = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y - 2x - 3 = 0 \end{aligned}\right\}\quad x = -1, y = \frac{1}{2}$$

จุดวิกฤต: $(-1, \frac{1}{2})$

ทดสอบแบบอนุพันธ์อันดับสอง

$A = f_{xx}(-1, \frac{1}{2}) = 4$

$B = f_{xy}(-1, \frac{1}{2}) = -2$

$C = f_{yy}(-1, \frac{1}{2}) = 2$

$D = AC - B^2 = (4)(2) - (-2)^2 = 4$

เนื่องจาก $D > 0$ และ $A > 0$

ดังนั้น f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(-1, \frac{1}{2})$

Example

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 - y = 0 \quad ...(1) \\ f_y(x,y) &= 3y^2 - x = 0 \quad ...(2) \end{aligned}\right\}$$

แทนค่า $y = 3x^2$ จาก (1) ลงใน (2) จะได้

$$\begin{aligned} 27x^4 - x &= 0 \\ x\left(27x^3 - 1\right) &= 0 \end{aligned}\qquad x = 0, \frac{1}{3}$$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = 0$ และถ้า $x = 1/3$ จะได้ $y = 1/3$

จุดวิกฤตของ f คือ $(0,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

การทดสอบแบบอนุพันธ์อันดับสอง

$A = f_{xx}(x,y) = 6x$

$B = f_{xy}(x,y) = -1$ $\qquad D = AC - B^2$

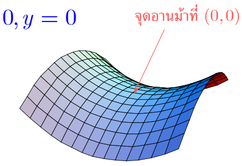
$C = f_{yy}(x,y) = 6y$

จุด	A	B	C	D	ข้อสรุป
(0,0)	0	-1	0	-1	$D < 0$ จุดอานม้า
$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	2	-1	2	3	$D > 0,\ A > 0$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

Example

$f(x,y) = y^2 - x^2$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2x = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}\right\} \quad x = 0, y = 0$$



จุดวิกฤต: $(0,0)$

การทดสอบแบบอนุพันธ์อันดับสอง

$A = f_{xx}(0,0) = -2$ $\qquad D = AC - B^2 = (-2)(2) - (0)^2 = -4$

$B = f_{xy}(0,0) = 0$ $\qquad$ เนื่องจาก $D < 0$

$C = f_{yy}(0,0) = 2$ $\qquad$ f มีจุดอานม้าที่ (0,0)

Example

$f(x,y) = x^4 + (x-y)^4$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x^3 + 4(x-y)^3 \quad ...(1) \\ f_y(x,y) &= -4(x-y)^3 = 0 \quad ...(2) \end{aligned}\right\}$$

จาก (2) เราทราบว่า $x - y = 0$ หรือ $x = y$ นั่นเอง

สมการ (1) จึงลดรูปเป็น $4x^3 = 0$

ดังนั้น คำตอบเดียวที่เป็นไปได้คือ $x = 0$ และ $y = 0$

จุดวิกฤตของ f คือ (0, 0)

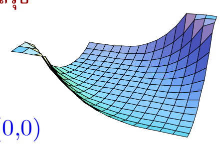
การทดสอบแบบอนุพันธ์อันดับสอง

$A = f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 12(x-y)^2 = 0$

$B = f_{xy}(x,y) = -12(x-y)^2 = 0$

$C = f_{yy}(x,y) = 12(x-y)^2 = 0$

$D = AC - B^2 = 0 \Longrightarrow$ ไม่มีข้อสรุป



แต่เราทราบว่า $f(0,0) = 0$

และ $f(x,y) > 0$ สำหรับทุกๆ $(x,y) \neq (0,0)$

ดังนั้น f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์(และสัมบูรณ์) ที่จุด (0, 0)

Example

จงหาจุดสุดขีดสัมพัทธ์และจุดสุดขีดสัมบูรณ์ (ถ้ามี) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 4x$
2. $f(x,y) = \dfrac{2}{3}x^3 + 2xy - y^2$
3. $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ เมื่อ $x^2 + y^2 \le 1$
4. $f(x,y) = 6xy - 4x^3 - 3y^2$

   เมื่อ $0 \le x \le 1$ และ $0 \le y \le 1$

ค่าสุดขีดภายใต้เงื่อนไขบังคับ

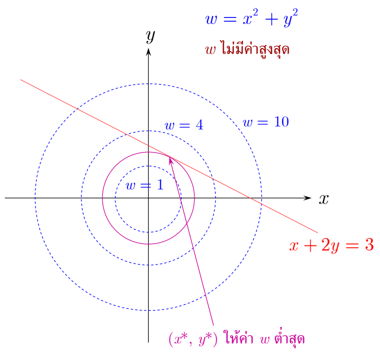
เราต้องการพัฒนาวิธีหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

พิจารณาตัวอย่างการหาค่าสุดขีดของ

$$w = x^2 + y^2$$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$x + 2y = 3$$



$x = 3 - 2y$

$w = (3-2y)^2 + y^2$

$w = 5y^2 - 12y + 9$

$\dfrac{dw}{dy} = 10y - 12$

$10y^* - 12 = 0$

$y^* = 1.2$

$x^* = 0.6$

เวกเตอร์เกรเดียนท์

กำหนด f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร

นิยาม **เวกเตอร์เกรเดียนท์** ของ f ที่จุด (x,y) เป็น

$$\nabla f = \left(f_x, f_y\right)$$

Example จงหาเวกเตอร์เกรเดียนท์ของ $f(x,y) = x^2 + 5y$

เวกเตอร์เกรเดียนท์คือ

$$\nabla f = (2x, 5)$$

ตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange's Multipliers)

ต้องการหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x,\ y)$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $g(x,\ y) = 0$

จุดวิกฤตของ f หาได้จากการแก้สมการ

$$\nabla f = \lambda \nabla g \implies \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \end{cases}$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัว ซึ่งเรียกว่า **ตัวคูณลากรองจ์**

Example

จงหาจุดวิกฤตของ $f = x^2 + y^2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $x + 2y = 3$

เขียนเงื่อนไขบังคับเสียใหม่เป็น

$$g(x,y) = x + 2y - 3 = 0$$

หาจุดวิกฤตได้จากสมการ

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \Rightarrow \quad (2x, 2y) = \lambda(1,2)$$

$$2x = \lambda \implies x = \frac{\lambda}{2}$$

$$2y = 2\lambda \implies y = \lambda$$

เมื่อแทนในเงื่อนไขบังคับ $x + 2y = 3$ จะได้

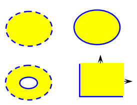
$$\frac{\lambda}{2} + 2\lambda - 3 = 0 \implies \lambda = 1.2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\lambda}{2} = 0.6 \\ y = \lambda = 1.2 \end{array}}$$

การมีค่าสุดขีดสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท

ถ้า f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบนบริเวณ D ซึ่ง D เป็นบริเวณปิดและมีขอบเขต แล้วจะได้ว่า f จะมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนบริเวณ D



Example

พิจารณา $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

โดยทฤษฎีข้างบน ฟังก์ชันนี้จะต้องมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนเซตปิดและมีขอบเขต เช่น

$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 8\}$ หรือ $\{(x,y) \mid x + y \le 8,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

แต่อาจไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน

$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 8\}$ หรือ $\{(x,y) \mid x + y \ge 2\}$

Example

จงหาจุดวิกฤตของ $f = 3x - y$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $x^2 + y^2 = 4.$

หาจุดวิกฤตจากสมการ

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \Rightarrow \quad (3,-1) = \lambda(2x, 2y)$$

$$3 = \lambda(2x) \implies x = \frac{3}{2\lambda}$$

$$-1 = \lambda(2y) \implies y = -\frac{1}{2\lambda}$$

เมื่อแทนลงในเงื่อนไขบังคับ $x^2 + y^2 = 4$ จะได้

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 4 \implies \frac{10}{4\lambda^2} = 4$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{4}$$

จุดวิกฤต

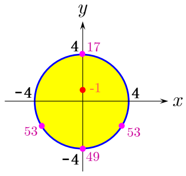
$\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \implies f = 2\sqrt{10}$ ค่าสูงสุด

$\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right) \implies f = -2\sqrt{10}$ ค่าต่ำสุด

แนวคิดของค่าสุดขีดภายใต้เงื่อนไขแบบคุห์น-ทักเกอร์

จงหาค่าสุดขีดของ $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$

ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 \le 16$



(1) ถ้าคิดว่าไม่มีเงื่อนไขบังคับ $x^2 + y^2 \le 16$ เลย

$$\begin{cases} f_x = 6x = 0 \\ f_y = 4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

จุด (0,1) สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ จึงเป็นจุดวิกฤต

(2) พิจารณาตรงขอบ กล่าวคือ $x^2 + y^2 = 16$

หาจุดวิกฤตจาก $\nabla f = \lambda \nabla g \;\Rightarrow\; (6x,\, 4y - 4) = \lambda(2x,\, 2y)$

$$\begin{cases} 6x = \lambda(2x) \\ 4y - 4 = \lambda(2y) \end{cases} \Rightarrow (0, \pm 4), (\pm 2\sqrt{3}, -2)$$

ค่าสุดขีดภายใต้เงื่อนไขแบบคุห์น-ทักเกอร์

ต้องการหาค่าสุดขีดของ $f(x,y)$ ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $g(x,y) \le 0$

หาจุดวิกฤตจากการแก้ระบบสมการ

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ \lambda g = 0 \\ g \le 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0$ หาจุดวิกฤตเหมือนไม่มีเงื่อนไขบังคับ

$$f_x = f_y = 0, \quad g \le 0$$

หาจุดวิกฤตบนขอบ $g = 0$

$$f_x - \lambda g_x = 0, \quad f_y - \lambda g_y = 0, \quad g = 0$$

ถ้ามีเงื่อนไขบังคับ $g(x,y) \ge 0$

ให้เปลี่ยนเครื่องหมาย $\le$ เป็น $\ge$

Example

จงหาค่าสุดขีดของ $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$

ภายใต้เงื่อนไข $x^2 + y^2 \le 16$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 16$

$g(x,y) \le 0$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ \lambda g = 0 \\ g \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 2\lambda x \\ 4y - 4 = 2\lambda y \\ \lambda(x^2 + y^2 - 16) = 0 \\ x^2 + y^2 \le 16 \end{cases}$$

กรณี $\lambda = 0$

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 \le 16 \end{cases}$$

จุดวิกฤตคือ (0, 1)

กรณี $\lambda \ne 0$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = 16$

$$\begin{cases} 6x = 2\lambda x \\ 4y - 4 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

จุดวิกฤตคือ $(0, \pm 4), (\pm 2\sqrt{3}, -2)$

$f(0,1) = -1,\; f(0,4) = 17,\; f(0,-4) = 49,\; f(\pm 2\sqrt{3}, -2) = 53$

ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ f คือ -1 และค่าสูงสุดของ f คือ 53

Example

จงหาค่าสุดขีดของ $f(x,y) = 4x^2 + 5y^2 - 6y$

ภายใต้เงื่อนไข $x + 2y \ge 18$

$g(x,y) = x + 2y - 18$

$g(x,y) \ge 0$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ \lambda g = 0 \\ g \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = \lambda \\ 10y - 6 = 2\lambda \\ \lambda(x + 2y - 18) = 0 \\ x + 2y \ge 18 \end{cases}$$

กรณี $\lambda = 0$

$$\begin{cases} 8x = 0 \\ 10y - 6 = 0 \\ x + 2y \ge 18 \end{cases}$$

ไม่มีจุดวิกฤต

กรณี $\lambda \ne 0$ นั่นคือ $x + 2y = 18$

$$\begin{cases} 8x = \lambda \\ 10y - 6 = 2\lambda \\ x + 2y = 18 \end{cases}$$

จุดวิกฤตคือ (4,7)

เห็นได้ง่ายว่า f ไม่มีค่าสูงสุด ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ f คือ 267

Example จงหาค่าสุดขีดของ $f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$

ภายใต้เงื่อนไข $x + 2y - 24 \geq 0$

$g(x,y) = x + 2y - 24$

$g(x,y) \geq 0$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ \lambda g = 0 \\ g \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - y = \lambda \\ 12y - x = 2\lambda \\ \lambda(x + 2y - 24) = 0 \\ x + 2y \geq 24 \end{cases}$$

กรณี $\lambda = 0$

$$\begin{cases} 10x - y = 0 \\ 12y - x = 0 \\ x + 2y \geq 24 \end{cases}$$

ไม่มีจุดวิกฤต

กรณี $\lambda \neq 0$ นั่นคือ $x + 2y = 24$

$$\begin{cases} 10x - y = \lambda \\ 12y - x = 2\lambda \\ x + 2y = 24 \end{cases}$$

จุดวิกฤตคือ $(6,9)$

เห็นได้ง่ายว่า f ไม่มีค่าสูงสุด ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ f คือ 612

การประยุกต์ของค่าสุดขีด

จำนวนครั้งในการหยุดเครื่องจักรชนิดหนึ่งขึ้นอยู่กับตัวเลข 2 ตัว ซึ่งมีความสัมพันธ์กันในลักษณะ $2x = y$ โดยจำนวนครั้งในการหยุดทำงานในหนึ่งปีคือ

$$N(x,y) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 22x + 6$$

จงหาตัวเลข x และ y ที่ทำให้จำนวนครั้งที่เครื่องจักรจะหยุดทำงานมีน้อยที่สุด

ให้ $g(x,y) = 2x - y$ ได้เงื่อนไขบังคับเป็น $g = 0$

$$\begin{cases} N_x = \lambda g_x \\ N_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y - 22 = 2\lambda \\ 2y + 2x = -\lambda \\ 2x = y \end{cases}$$

$10x + 6y = 22$

$x = 1, y = 2$

ดังนั้น $x = 1$ และ $y = 2$ เป็นตัวเลขที่ทำให้จำนวนครั้งที่เครื่องจักรจะหยุดทำงานมีน้อยที่สุด

การหาต้นทุนต่ำสุด

ในการผลิตน้ำอัดลมชนิดหนึ่งมีฟังก์ชันต้นทุนรวมคือ

$$C(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy - 800x - 1400y + 185000$$

เมื่อ x และ y คือปริมาณ(แกลลอน)ของหัวเชื้อน้ำส้มและหัวเชื้อน้ำตาล ตามลำดับ จงหาว่าควรผลิตอย่างไรให้ต้นทุนต่ำสุด

ต้องการหาค่าต่ำสุดของ $C(x,y)$ หาจุดวิกฤตโดยแก้ระบบสมการ $C_x = C_y = 0$

$$\begin{cases} 4x + 2y - 800 = 0 \\ 6y + 2x - 1400 = 0 \end{cases}$$

$x = 100,\ y = 200$

ต้องใช้หัวเชื้อน้ำส้ม 100 แกลลอนและหัวเชื้อน้ำตาล 200 แกลลอน จึงจะทำให้ต้นทุนต่ำสุด (เท่ากับ 5000 บาท)

Example ในโรงงานแห่งหนึ่ง ทำการผลิตยาสีฟัน 2 ชนิด โดยฟังก์ชันต้นทุนรวมในการผลิตยาสีฟันทั้ง 2 ชนิด มีสมการดังต่อไปนี้

$$C(x,y) = 10x^2 + 5y^2 - 10xy - 20x + 5y + 12$$

โดย x และ y คือปริมาณการผลิตยาสีฟันชนิดแรกและชนิดสอง (หน่วยเป็นพัน) ตามลำดับ จงหาว่าโรงงานแห่งนี้ต้องการผลิตยาสีฟันชนิดละเท่าไรเพื่อให้ต้นทุนการผลิตต่ำสุด

ถ้าจำหน่ายยาสีฟันชนิดแรกได้ราคา 10000 บาทต่อพันหน่วย และจำหน่ายยาสีฟันชนิดที่สองได้ในราคา 7985 บาทต่อพันหน่วย

จงหาฟังก์ชันรายได้รวมของการจำหน่ายยาสีฟันทั้งสองประเภท

1. จงหาฟังก์ชันกำไรรวมของการจำหน่ายยาสีฟันทั้งสองประเภท
2. จงหาว่าโรงงานควรผลิตยาสีฟันประเภทละกี่พันหน่วยเพื่อจะได้มีกำไรสูงสุด
3. จงหากำไรสูงสุด

การกำหนดราคาสินค้าในหลายตลาด

ต้นทุนเฉลี่ยในการผลิตสินค้าอย่างหนึ่งของนาย ก มีสมการ $C(x) = \frac{20}{x} + 5$

นาย ก มีลูกค้าสองคนคือ นาย ข และนาย ค โดยนาย ข และนาย ค ให้ราคาสินค้าตามจำนวนสินค้าที่ต้องการซื้อดังนี้

นาย ก: $p_1 = 23 - 3x_1$ และ **นาย ข:** $p_2 = 25 - 2x_2$

จงหาว่าเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด นาย ก ควรขายสินค้าให้นาย ข และนาย ค เท่าไร

กำไรหาได้จาก

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2) &= (p_1x_1 + p_2x_2) - (x_1 + x_2)C(x_1 + x_2) \\ &= x_1(23 - 3x_1) + x_2(25 - 2x_2) - (20 + 5(x_1 + x_2)) \\ &= 18x_1 + 20x_2 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - 20 \end{aligned}$$

ต้องการหาวิธีขายสินค้าเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด $\begin{cases} P_{x_1} = 0 \\ P_{x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18 - 6x_1 = 0 \\ 20 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

ต้องขายให้ ข 3 ชิ้น และขายให้ ค 5 ชิ้น

Example

ผู้ผลิตแร่รายหนึ่งมีตลาดขายส่งในประเทศและต่างประเทศ โดยราคาต่อตันและปริมาณความต้องการของตลาดแต่ละตลาดมีสมการดังต่อไปนี้

ตลาดภายในประเทศ $p_1 = 630 - 40x_1$

ตลาดต่างประเทศ $p_2 = 800 - 50x_2$

โดยที่ p_1 และ p_2 คือราคาต่อตันเมื่อจำหน่ายในประเทศและต่างประเทศ(พันบาท) x_1 และ x_2 คือปริมาณแร่(พันตัน) เมื่อจำหน่ายในประเทศและต่างประเทศตามลำดับ

ถ้าฟังก์ชันต้นทุนรวมในการผลิตแร่คือ $C(x) = 20 + 150x$

อยากทราบว่าผู้ผลิตแร่ควรจำหน่ายแร่ในแต่ละตลาดเป็นจำนวนเท่าไร และในราคาตันละเท่าไร จึงจะได้กำไรสูงสุด

การแสวงหาความพอใจสูงสุด

นาย ข ต้องการเลือกซื้อเสื้อสองยี่ห้อ โดยยี่ห้อแรกนั้นราคาตัวละ 500 บาท และยี่ห้อหลังราคาตัวละ 300 บาท กำนหดสมการความพอใจของนาย ข ในรูป

$$xy^2 = k$$

เมื่อ x และ y คือจำนวนเสื้อยี่ห้อแรกและยี่ห้อหลังตามลำดับ ถ้านาย ข มีเงินอยู่ 4500 บาท จงหานาย ข ควรซื้อเสื้อแต่ละยี่ห้อกี่ตัวจึงจะได้ความพอใจสูงสุด

ต้องการค่าสูงสุดของ $f(x, y) = xy^2$

ภายใต้เงื่อนไข $500x + 300y = 4500 \Rightarrow 5x + 3y = 45$

จะได้ $(y^2, 2xy) = \lambda(500, 300) \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 500\lambda \\ 2xy = 300\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{2x} = \frac{5}{3}$

แทน $3y = 10x$ ใน $5x + 3y = 45$ จะได้ $x = 3,\ y = 10$

นาย ข ต้องซื้อเสื้อยี่ห้อแรก 3 ตัวและซื้อเสื้อยี่ห้อหลัง 10 ตัว จึงจะพอใจสูงสุด

Example

กำหนดให้ความพอใจเท่ากันของนาย ก ในการบริโภคสินค้า X และ Y มีสมการเป็น

$$U = xy$$

โดยที่ X และ Y ราคาหน่วยละ 15 และ 5 บาทตามลำดับ

ถ้านาย ก มีเงิน 150 บาท นาย ก ควรซื้อสินค้า X และ Y อย่างละกี่หน่วยเพื่อให้ได้ความพอใจสูงสุด